中国科学院研究生教学丛书

李群和 Hermite 对称空间

许以超 著

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书为《中国科学院研究生教学丛书》之一.

本书是介绍李代数和李群的入门书. 全书比较详细地给出有限维复李代数和实李代数、复李群和实李群的基础知识，即复半单李代数和实半单李代数的构造理论和表示理论、李群的基本概念以及紧李群的构造理论和表示理论（但是不涉及到 Kac-Moody 李代数以及量子群）. 作为应用，介绍了 Hermite 对称空间，以及它的 Harish-Chandra 嵌入和正规 Siegel 域实现.

本书可供高等院校数学系教师、研究生和数学研究工作者阅读，也可供从事理论物理、化学、生物方面的科研工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

李群和 Hermite 对称空间/许以超著. -北京：科学出版社，2001.3
(中国科学院研究生教学丛书/白春礼主编)
ISBN 7-03-008624-4

Ⅰ.李… Ⅱ.许… Ⅲ.①李群-群论②对称空间，Hermite Ⅳ.O152.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 64122 号

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

科 地 亚 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 3 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
2001 年 3 月第一次印刷 印张：18 1/8
印数：1—3 500 字数：475 000

定价：36.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换（北燕））

《中国科学院研究生教学丛书》序

在21世纪曙光初露，中国科技、教育面临重大改革和蓬勃发展之际，《中国科学院研究生教学丛书》——这套凝聚了中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世了.相信这套丛书的出版，会在一定程度上缓解研究生教材不足的困难，对提高研究生教育质量起着积极的推动作用.

21世纪将是科学技术日新月异，迅猛发展的新世纪，科学技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力，成为经济和社会发展的首要推动力量.世界各国之间综合国力的竞争，实质上是科技实力的竞争.而一个国家科技实力的决定因素是它所拥有的科技人才的数量和质量.我国要想在21世纪顺利地实施"科教兴国"和"可持续发展"战略，实现邓小平同志规划的第三步战略目标——把我国建设成中等发达国家，关键在于培养造就一支数量宏大、素质优良、结构合理、有能力参与国际竞争与合作的科技大军，这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光荣的战略任务.

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展中心，在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨，长期坚持走科研与教育相结合的道路，发挥了高级科技专家多、科研条件好、科研水平高的优势，结合科研工作，积极培养研究生；在出成果的同时，为国家培养了数以万计的研究生.当前，中国科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好"三个基地"的指

示，在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进高新技术产业发展基地的同时，加强研究生教育，努力建设好高级人才培养基地，在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业发展重任的同时，为国家源源不断地培养输送大批高级科技人才.

质量是研究生教育的生命，全面提高研究生培养质量是当前我国研究生教育的首要任务.研究生教材建设是提高研究生培养质量的一项重要的基础性工作.由于各种原因，目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展.为了改变这种情况，中国科学院组织了一批在科学前沿工作，同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材，并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版.希望通过数年努力，出版一套面向21世纪科技发展、体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书.本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性，同时也兼顾前沿性，使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科学基础知识，也能被引导进入当代科学研究的前沿.这套研究生教学丛书，不仅适合于在校研究生学习使用，也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书.

“桃李不言，下自成蹊.”我相信，通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘，《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花，也将似润物春雨，滋养莘莘学子的心田，把他们引向科学的殿堂，不仅为科学院，也为全国研究生教育的发展作出重要贡献.

序

李群理论是 S.Lie 在研究微分方程的积分曲线族在什么变换作用下不变时发现，并且建立起来的．早期的李群理论，实际上是研究李群的局部性质，而且很快就化为纯代数的问题，即研究李代数的构造和表示论．从 20 世纪 40 年代起，流形概念已经很明确地形成后，才逐渐从局部性质的研究转向整体性质的研究．

从提出到形成李群和李代数的完整理论，已经有 100 年以上的历史．由于李群定义实际上是有机地联结流形和群这两个概念而形成的，因此很自然地，它是属于几何和代数的交叉学科．在长期发展后，已形成所谓李理论这个独立的学科，而且由于李群理论在各方面的广泛应用，在国际上李群课已经成为基础数学研究生的主要课程之一，但是在我国只有少数数学系开设这门课．编写这本书的目的是希望推动这方面的发展．

这里值得一提的是李群、李代数理论在理论物理中的应用．熟知的 Einstein 的相对论成功地运用了 (3.1) 型 Lorentz 群为运动群，来研究时空的物理理论．再如在基本粒子理论中的轻粒子理论是用李群、李代数理论来描述的，因此发现在自然界中存在一个新的轻粒子，且以后为实验所证实．近年来，由于量子场中的量子反散射理论和规范场的研究，从李代数的通用包络代数出发成功地引进了 q 量子化和量子群的概念，使得李理论有了更广阔的发展前景．

本书是李代数和李群的入门书，而且着眼于李群入门，所以我们不涉及到 Kac-Moody 李代数以及量子群，而是只考虑复及实的有限维李代数和李群．实际上本书包含了两方面内容，主要部分比较详细地给出复李代数和实李代数、复李群和实李群的基

础知识；作为应用，本书介绍了 Hermite 对称空间.

Hermite 对称空间是由 É.Cartan 引进且给出分类的，它本身的几何性质和函数论一直受到人们的关注，至今尚在发展之中. 另一方面，Hermite 对称空间又是一类特殊的复齐性有界域，对 Hermite 对称空间的了解提供了研究复齐性有界域的思想源泉.

Hermite 对称空间上的函数论，从历史上看，有两种做法. 一种是以华罗庚和 Siegel 为主，对不可分解 Hermite 对称空间 (即典型域，除了两个例外典型域)，一类类地研究其函数论性质. 另一种则是用 Harish-Chandra 嵌入或者用 Jordan 三数组，用 Jordan 代数分别统一地研究 Hermite 对称空间.

本书作为一本入门书，其目的也是帮助从事 Hermite 对称空间研究的科研工作者以及研究生较快地进入这一领域. 由于是从李群角度研究 Hermite 对称空间，因此有必要论述复半单李代数、实半单李代数、李群的基本概念以及紧李群，这些构成了本书的前一部分，也是主要部分. 第二部分是考虑 Hermite 对称空间，我们将实半单李群的一些性质也放在其中，但是不打算专门讨论，而是着重介绍 Harish-Chandra 实现.

本书共分六章. 第一章完整地讲述复半单李代数的构造和表示，但略去具体的实现 (包括略去例外单李代数的构造和表示的实现). 第二章论述实半单李代数的构造所必须的基本理论，仍然略去具体的实现，读者可以参阅严志达和许以超合著的《李群及其李代数》(高等教育出版社 1985 年出版) 一书. 前两章构成李代数的入门内容. 第三章介绍李群的基本理论. 第四章讲述紧李群的构造和表示的基本内容，特别包括了 Weyl 特征公式及 Peter-Weyl 定理，这两章构成李群的入门内容. 第五章介绍 Hermite 对称空间的 Harish-Chandra 嵌入，为此先引进 Riemann 流形和 Hermite 流形，将 Hermite 对称空间的分类化为李代数问题，进一步给出 Hermite 对称空间的分类，介绍 Harish-Chandra 嵌入及利用这种实现所作的进一步展开. 第六章利用 $\mathbb{C}^n$ 中的齐性有界域必全纯同构于齐性 Siegel 域 (Vinberg, Piatetski-Shapiro, Gindikin 的结果)

和齐性 Siegel 域必线性同构于正规 Siegel 域，给出了 Hermite 对称空间在 $\mathbb{C}^n$ 中的实现 (作者的结果)，其中包括 É.Cartan 在 1935 年没有能够在 $\mathbb{C}^n$ 中实现的两个例外典型域的实现. 进一步，我们还考虑了例外典型域的性质.

本书由 1996 年上半年在中国科学技术大学数学系研究生班讲课二个月的讲稿整理而成. 在写作过程中得到了史济怀教授和班上很多同学以及中国科学技术大学出版社李攀峰先生的帮助. 本书的出版得到中国科学院研究生教学丛书出版基金的资助. 在最后修改时，作者用这讲稿在河南大学数学系研究生班讲课二个月，得到班上很多同学的帮助. 另一方面，科学出版社毕颖女士的辛勤劳动，使本书得以早日问世，作者在此表示衷心的感谢.
最后，必须指出，书中难免出现各种错误，欢迎读者批评指正.

许以超
中国科学院数学研究所

2000 年 3 月 20 日

目　　录

第一章　李代数理论

在这一章中，我们引进李代数的基本概念和基本技巧，给出复半单李代数的分类理论以及表示论.

§ 1.1　李代数的基本概念

定义 1.1.1　设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的线性空间. 若在 $\mathfrak{L}$ 中引进运算 $[x, y]$（称为 **换位运算** ），使得它适合条件:

(1) **反交换性**

$$[y, x] = -[x, y], \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{L};$$

(2) **双线性性**

$$[\lambda x + \mu y, z] = \lambda[x, z] + \mu[y, z], \quad \forall\, \lambda, \mu \in F,\ x, y, z \in \mathfrak{L};$$

(3) **Jacobi 恒等式**

$$[[x, y],\ z] + [[z, x],\ y] + [[y, z],\ x] = 0, \quad \forall\, x, y, z \in \mathfrak{L}.$$

则 $\mathfrak{L}$ 称为域 F 上的 **李代数**.

若线性空间 $\mathfrak{L}$ 的维数为 n, 则 $\mathfrak{L}$ 称为域 F 上的 n **维李代数**; 若 $\mathfrak{L}$ 的维数无限，则 $\mathfrak{L}$ 称为 **无限维李代数**. 另一方面，当域 F 为复数域时，$\mathfrak{L}$ 称为 **复李代数**. 当 F 为实数域时，$\mathfrak{L}$ 称为 **实李代数**.

本书只考虑有限维实李代数和复李代数.

定义 1.1.2　记 $e_1, \cdots, e_n$ 为域 F 上的 n 维李代数 $\mathfrak{L}$ 的一组

基，则有**乘法表**

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

它决定了 n^3 个元素 C_{ij}^k, $1 \leq i,\ j,\ k \leq n$, 称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的**构造常数**.

由李代数的定义，显然有

引理 1.1.3 设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的 n 维李代数，n^3 个元素 $C_{ij}^k \in F$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的构造常数，当且仅当 $C_{ij}^k, 1 \leq i, j, k \leq n$ 适合条件

$$C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0;$$
$$\sum_{l=1}^{n} C_{ij}^l C_{lk}^t + \sum_{l=1}^{n} C_{ki}^l C_{lj}^t + \sum_{l=1}^{n} C_{jk}^l C_{li}^t = 0,\ 1 \leq i, j, k, t \leq n.$$

定义 1.1.4 记 F 为域 K 的子域，$\mathfrak{L}$ 为域 F 上的 n 维李代数. 在 $\mathfrak{L}$ 中任取一组基 $e_1, \cdots, e_n$, 则

$$\mathfrak{L}^K = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \mid \forall\, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K \}$$

称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 K 化, 其中 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ 为域 K 上的形式线性组合，它有 $\sum \lambda_i e_i = \sum\ \mu_i\ e_i$, 当且仅当 $\lambda_i = \mu_i, 1 \leq i \leq n$.

由李代数的定义，可以证明

引理 1.1.5 记 F 为域 K 的子域，$\mathfrak{L}$ 为域 F 上的 n 维李代数，则李代数 $\mathfrak{L}$ 的 K 化 $\mathfrak{L}^K$ 在换位运算

$$[\sum_i \lambda_i e_i, \sum_j \mu_j e_j] = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j [e_i, e_j] = \sum_{i,j,k} \lambda_i \mu_j C_{ij}^k e_k$$

下构成域 K 上的 n 维李代数，且李代数 $\mathfrak{L}^K$ 的定义与李代数 $\mathfrak{L}$ 的基底选取无关.

证 前一断言由李代数的定义可直接验证. 后一断言证明如下: 在域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 中另取一组基 $f_1,\cdots,f_n$, 则有

$$f_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\,e_j,\quad 1\le i\le n,$$

其中 $a_{ji}\in F$. 任取 $\rho_1,\cdots,\rho_n\in K$, 则由 $\sum\limits_{j=1}^{n}\rho_j a_{kj}\in K, 1\le k\le n$, 有

$$\sum_{j=1}^{n}\rho_j f_j=\sum_{j,k=1}^{n}\rho_j a_{kj}e_k=\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\rho_j a_{kj}\Big)e_k\in\mathfrak{L}^K.$$

这就证明了断言, 证完.

特别重要的是取 $F=\mathbb{R}$, $K=\mathbb{C}$. 这时, 实李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **复化** $\mathfrak{L}^C$ 是复李代数, 而且有

$$\mathfrak{L}^C=\mathfrak{L}+\sqrt{-1}\mathfrak{L},\quad \dim_C(\mathfrak{L}^C)=\dim_R(\mathfrak{L}).$$

引理 1.1.6 n 维实李代数 $\mathfrak{L}$ 的复化 $\mathfrak{L}^C$ 也是 $2n$ 维实李代数, 记作 $(\mathfrak{L}^C)_R$. 且对于李代数 $\mathfrak{L}$ 中任意一组基 $e_1,\cdots,e_n$, 则 $e_1,\cdots,e_n,\sqrt{-1}e_1,\cdots,\sqrt{-1}e_n$ 为实李代数 $(\mathfrak{L}^C)_R$ 的一组基.

定义 1.1.7 设 $\mathfrak{L}$ 为 n 维复李代数, $\mathfrak{L}_0$ 为 n 维实李代数. $\mathfrak{L}_0$ 称为 $\mathfrak{L}$ 的 **实形式**, 如果 $\mathfrak{L}_0$ 的复化 $\mathfrak{L}_0^C=\mathfrak{L}$.

于是, 显然有

引理 1.1.8 设 $\mathfrak{L}$ 为 n 维复李代数. 则 $\mathfrak{L}$ 有实形式当且仅当在李代数 $\mathfrak{L}$ 中存在一组基 $e_1,\cdots,e_n$, 使得这组基的构造常数全由实数构成.

由引理 1.1.8 可知, 并不是任一复李代数都有实形式.

下面给出两个重要的李代数的例子.

例 1 设 F 为域, V 为域 F 上的 m 维线性空间. 记 $\mathrm{gl}(V)$ 为 V 上的所有线性变换构成的集合. 在线性变换的加法和纯量积下, 显然它构成一个线性空间. 在线性空间 $\mathrm{gl}(V)$ 中引进换位运

算 $[A,B]=AB-BA$. 易证这时 $\mathrm{gl}(V)$ 为李代数，称为 **一般线性李代数**.

例 2　设 F 为域. 记 $\mathrm{gl}(m,F)$ 为域 F 上的所有 $m\times m$ 矩阵构成的集合. 在方阵的加法和纯量积下，显然它构成一个 m^2 维线性空间. 在线性空间 $\mathrm{gl}(m,F)$ 中引进换位运算 $[A,B]=AB-BA$, 易证这时 $\mathrm{gl}(m,F)$ 为 m^2 维李代数，称为 **一般矩阵李代数**.

显然有

引理 1.1.9　设 F 为域，V 为域 F 上的 m 维线性空间. 一般线性李代数 $\mathrm{gl}(V)$ 为 m^2 维李代数. 在 V 中取定基 $e_1,\cdots,e_m$, 则线性变换的矩阵表示构成 m^2 维一般矩阵李代数.

为了进一步展开李代数理论，先约定一个符号. 设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的李代数，$\mathfrak{R}$ 和 $\mathfrak{S}$ 为 $\mathfrak{L}$ 的两个子集，则 $[\mathfrak{R},\mathfrak{S}]$ 记由元素集 $\{[m,n]\mid m\in\mathfrak{R},n\in\mathfrak{S}\}$ 线性生成的线性子空间.

我们有

定义 1.1.10　设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的李代数. $\mathfrak{L}$ 的线性子空间 $\mathfrak{L}_1$ 称为 **子代数**（或 **理想**），如果 $[\mathfrak{L}_1,\mathfrak{L}_1]\subset\mathfrak{L}_1$(或 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}_1]\subset\mathfrak{L}_1$). 设 $\mathfrak{L}_1$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的理想，**商空间**$\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_1$ 称为李代数 $\mathfrak{L}$ 关于理想 $\mathfrak{L}_1$ 的 **商李代数**, 如果在商空间 $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_1$ 中引进换位运算

$$[x+\mathfrak{L}_1,y+\mathfrak{L}_1]=[x,y]+\mathfrak{L}_1,\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{L}.$$

显然，商李代数中引进的换位运算的定义和等价类集 $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_1$ 中的等价类的代表元素选取无关，且商李代数是李代数.

定义 1.1.11　设 $\mathfrak{L}_1$ 和 $\mathfrak{L}_2$ 为域 F 上的李代数. $\mathfrak{L}_1$ 到 $\mathfrak{L}_2$ 内的线性映射 σ 称为李代数的 **同态映射**, 如果

$$\sigma([x,y])=[\sigma(x),\sigma(y)],\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{L}_1.$$

这时称 $\mathfrak{L}_2$ 和 $\mathfrak{L}_1$ **同态**. 李代数 $\mathfrak{L}$ 到 $\mathfrak{L}$ 的同态映射 σ 称为 **自同态映射**. 这时称 σ 为李代数的 **自同态**. 当李代数的同态映射 σ 为到上的一一映射时，称为李代数的 **同构映射**. 这时称 $\mathfrak{L}_2$ 和 $\mathfrak{L}_1$ **同构**. 李代数 $\mathfrak{L}$ 到 $\mathfrak{L}$ 的同构映射 σ 称为 **自同构映射**. 这时称 σ 为李代数的 **自同构**.

显然，李代数的同构是等价关系．李代数的构造理论，即分类理论，就是找出同构下的全系不变量以及在每个同构等价类中找出一个代表元素．

从定义出发，容易证明关于李代数同态的重要定理．

定理 1.1.12(李代数的同态基本定理) 设 σ 为域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}_1$ 到 $\mathfrak{L}_2$ 内的同态，则同态像 $\sigma(\mathfrak{L}_1)$ 为李代数 $\mathfrak{L}_2$ 的子代数，同态核 $\ker(\sigma)=\sigma^{-1}(0)$ 为李代数 $\mathfrak{L}_1$ 的理想．另一方面，自然映射 $\mathfrak{L}_1\to\mathfrak{L}_1/\ker(\sigma)$ 为李代数 $\mathfrak{L}_1$ 到商李代数 $\mathfrak{L}_1/\ker(\sigma)$ 上的同态映射，且存在商李代数 $\mathfrak{L}_1/\ker(\sigma)$ 到李代数 $\sigma(\mathfrak{L}_1)$ 上的同构映射 ρ, 使得

$$\sigma=\rho\circ\pi.$$

现在引进伴随表示如下：设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的李代数，任取 $x\in\mathfrak{L}$, 则在李代数 $\mathfrak{L}$ 上有线性变换

$$\mathrm{ad}\,(x):\quad y\to[x,y],\quad \forall\, y\in\mathfrak{L}.$$

于是有线性变换集

$$\mathrm{ad}\,(\mathfrak{L})=\{\mathrm{ad}\,(x)\mid\forall x\in\mathfrak{L}\}\subset\mathrm{gl}\,(\mathfrak{L}).$$

利用李代数的定义，容易证明．

引理 1.1.13 符号同上．线性变换集 $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{L})$ 为一般线性李代数 $\mathrm{gl}\,(\mathfrak{L})$ 的子代数，且有

$$[\mathrm{ad}\,(x),\mathrm{ad}\,(y)]=\mathrm{ad}\,([x,y]),\quad\forall\, x,y\in\mathfrak{L}.$$

又映射 $\mathrm{ad}:x\to\mathrm{ad}\,(x),\forall x\in\mathfrak{L}$ 给出李代数 $\mathfrak{L}$ 到 $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{L})$ 上的同态映射．我们称映射 ad 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **伴随表示**. $\mathrm{ad}^{-1}(0)$ 称为 **伴随表示的核**.

定义 1.1.14 (1) 域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的子代数 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **换位子代数**. (2) 李代数 $\mathfrak{L}$ 称为 **交换李代数**, 如果 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]=0$. (3) 域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的子集

$$\mathrm{C}(\mathfrak{L})=\{x\in\mathfrak{L}\mid[x,\mathfrak{L}]=0\}$$

称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **中心**.

显然有

引理 1.1.15 李代数 $\mathfrak{L}$ 的中心 $C(\mathfrak{L})$ 是李代数 $\mathfrak{L}$ 的交换理想，且是李代数 $\mathfrak{L}$ 的伴随表示的核.

下面引进四类重要的李代数.

定义 1.1.16 设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的李代数. 它有理想序列

$$\mathfrak{L}^1 = \mathfrak{L},\ \mathfrak{L}^k = [\mathfrak{L}^{k-1}, \mathfrak{L}],\ k = 2, 3, \cdots,$$
$$\mathfrak{L}^{(1)} = \mathfrak{L},\ \mathfrak{L}^{(k)} = [\mathfrak{L}^{(k-1)}, \mathfrak{L}^{(k-1)}],\ k = 2, 3, \cdots.$$

李代数 $\mathfrak{L}$ 称为 **幂零的**（或 **可解的** ），如果存在自然数 N 使得 $\mathfrak{L}^N = 0$ （或 $\mathfrak{L}^{(N)} = 0$).

引理 1.1.17 交换李代数必幂零，幂零李代数必可解. 又交换、幂零、可解李代数的子代数仍然分别为交换、幂零、可解的.

证 后一断言由定义立即可知. 下面证明前一断言. 显然，交换必幂零. 为了证明幂零必可解，只要证明 $\mathfrak{L}^{(k)} \subset \mathfrak{L}^k, k = 1, 2, \cdots$ 就够了，这由归纳法立即可知. 证完.

引理 1.1.18 设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的李代数，则李代数 $\mathfrak{L}$ 的换位子代数 $\mathfrak{L}^{(2)} = \mathfrak{L}^2 = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$ 幂零蕴含李代数 $\mathfrak{L}$ 可解.

证 由于

$$(\mathfrak{L}^{(2)})^k \supset (\mathfrak{L}^{(2)})^{(k)} = \mathfrak{L}^{(k+1)}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

所以由 $\mathfrak{L}^{(2)}$ 幂零可知 $\mathfrak{L}$ 可解. 证完.

显然有

引理 1.1.19 设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的李代数，则 $\mathfrak{L}$ 的任意两个幂零（或可解）理想的和仍为幂零（或可解）理想.

由引理 1.1.19 可知，在有限维李代数 $\mathfrak{L}$ 中存在最大可解理想 $\mathfrak{R}$ 及最大幂零理想 $\mathfrak{R}_0$.

定义 1.1.20 设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的 n 维李代数. $\mathfrak{L}$ 的 **最大幂零理想** 称为 $\mathfrak{L}$ 的 **幂零根基**, **最大可解理想** 称为 $\mathfrak{L}$ 的 **根基**. 根基等

于零的李代数称为 **半单李代数**. 又无非零真理想的李代数称为 **单李代数**.

由定义可知

引理 1.1.21 (1) 一维李代数必为交换李代数, 且为单李代数. (2) 可解李代数 $\mathfrak{L}$ 必有 $\mathfrak{L}^{(2)}=[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]\neq\mathfrak{L}$. (3) 维数大于 1 的单李代数必半单.

引理 1.1.22(É.Cartan) 域 F 上的李代数半单, 当且仅当它没有非零交换理想.

证 设李代数 $\mathfrak{L}$ 有非零交换理想 $\mathfrak{C}$. 由于交换必可解, 所以 $\mathfrak{L}$ 有包含 $\mathfrak{C}$ 的最大可解理想 $\mathfrak{R}$. 这证明了李代数 $\mathfrak{L}$ 不半单. 反之, 若李代数 $\mathfrak{L}$ 不半单, 则 $\mathfrak{L}$ 的根基 $\mathfrak{R}\neq 0$. 由于 $\mathfrak{R}$ 为可解李代数, 由定义可知存在最小自然数 N, 使得

$$\mathfrak{R}^{(N-1)}\neq 0,\mathfrak{R}^{(N)}=[\mathfrak{R}^{(N-1)},\mathfrak{R}^{(N-1)}]=0.$$

这证明了 $\mathfrak{R}^{(N-1)}$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的非零交换理想. 证完.

为了在下一节展开复半单李代数的分类理论, 我们需要给出下面两个重要定理.

定义 1.1.23 一般线性 (或矩阵) 李代数的子代数称为 **线性李代数** (或 **矩阵李代数**). 李代数到线性 (或矩阵) 李代数上的同态映射称为李代数的 **线性表示** (或 **矩阵表示**).

定理 1.1.24(Lie定理) 设 F 是特征为零的代数闭域, $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的一般线性李代数 $\mathrm{gl}(V)$ 的子代数. 若李代数 $\mathfrak{L}$ 可解, 则 $\mathfrak{L}$ 在线性空间 V 中有公共特征向量.

证 对线性李代数 $\mathfrak{L}$ 的维数作归纳法. 当 $\dim(\mathfrak{L})=1$ 时, 定理显然成立. 现在考虑 n 维可解线性李代数 $\mathfrak{L}$. 由引理 1.1.21 的 (2) 可知 $\mathfrak{L}^{(2)}=[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]\neq\mathfrak{L}$, 所以 $\dim(\mathfrak{L}^{(2)})<n$. 任取包含 $\mathfrak{L}^{(2)}$ 的 $n-1$ 维子空间 $\mathfrak{L}_0$, 于是 $[\mathfrak{L}_0,\mathfrak{L}_0]\subset[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]=\mathfrak{L}^{(2)}\subset\mathfrak{L}_0$, 即 $\mathfrak{L}_0$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 $n-1$ 维可解理想. 对 $n-1$ 维线性可解理想 $\mathfrak{L}_0$ 应用归纳法假设, 所以存在理想 $\mathfrak{L}_0$ 上的线性函数 $\lambda(y)$, 使得线性空间 V

的子空间

$$V_0 = \{v_0 \in V \mid y(v_0) = \lambda(y)v_0, \forall y \in \mathfrak{L}_0\} \neq 0.$$

今

$$\dim(\mathfrak{L}) = \dim(\mathfrak{L}_0) + 1,$$

任取 $x \in \mathfrak{L}$, $x \notin \mathfrak{L}_0$, 则

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + < x >,$$

其中 $< x >$ 表示以 x 为基的一维子空间. 因此, 问题化为在线性空间 V 的子空间 V_0 中寻找非零向量 v, 使得 v 为线性变换 x 的特征向量.

为此, 任取 $v_0 \in V_0$, $v_0 \neq 0$. 作向量序列

$$v_k = x^k(v_0), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

记 V_1 为由线性空间 V 的向量集 $\{v_k, k = 0, 1, \cdots\}$ 线性生成的子空间. 显然存在最小自然数 r, 使得 $v_0, v_1, \cdots, v_{r-1}$ 线性无关, 而

$$v_r = \sum_{j=0}^{r-1} \mu_j v_j,$$

其中 $\mu_0, \cdots, \mu_{r-1} \in F$. 由归纳法易证 $v_0, v_1, \cdots, v_{r-1}$ 为子空间 V_1 的一组基. 由此也推出 $x(V_1) \subset V_1$, 即 V_1 在线性变换 x 的作用下不变.

今任取 $y \in \mathfrak{L}_0$, 则有 $y(v_0) = \lambda(y)v_0$. 由归纳法不难证明

$$y(v_k) = \lambda(y)v_k + \mu_{k-1,k}(y)v_{k-1} + \cdots + \mu_{0k}(y)v_0,$$

其中 $\mu_{ik}(y) \in F, 0 \leq i < k$. 这推出 $y(V_1) \subset V_1$, 即子空间 V_1 在 $\mathfrak{L}_0$ 的作用下不变, 且对子空间 V_1 的基 $v_0, v_1, \cdots, v_{r-1}$, 有 $\mathrm{tr}_{V_1}(y) = r\lambda(y), \forall y \in \mathfrak{L}_0$. 今 $x(V_1) \subset V_1, y(V_1) \subset V_1, \forall y \in \mathfrak{L}_0$, 又 $[x, y] \in [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \subset \mathfrak{L}_0$, 所以 $\mathrm{tr}_{V_1}([x, y]) = \mathrm{tr}_{V_1}(xy - yx) = 0$. 这证明了 $\lambda([x, y]) = 0$, $\forall y \in \mathfrak{L}_0$, 所以

$$[x, y](v_0) = 0, \quad \forall y \in \mathfrak{L}_0, \quad v_0 \in V_0.$$

今用归纳法有 $[x,y](v_k)=0$. 事实上 $[[x,y],x]\in[\mathfrak{L}_0,x]$,

$$[x,y](v_{k+1})=[x,y]x(v_k)=[[x,y],x](v_k)+x([x,y](v_k)),$$

所以证明了 $[x,y](v_k)=0,\ k=0,1,\cdots$. 今用归纳法, 有 $y(v_k)=\lambda(y)v_k$. 事实上, 由

$$y(v_{k+1})=y(x(v_k))=[y,x](v_k)+xy(v_k)=x(\lambda(y)v_k)=\lambda(y)v_{k+1},$$

用归纳法可证明

$$y(v_k)=\lambda(y)v_k,\quad k=0,1,\cdots,\quad \forall\, y\in\mathfrak{L}_0,$$

因此, $v_k\in V_0$, 即 $V_1\subset V_0$.

今 V_1 为线性变换 x 的非零不变子空间, 所以在 V_1 中存在线性变换 x 的特征向量 v. 由 $v\in V_1\subset V_0$ 可知 v 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的公共特征向量. 定理证完.

推论 设 F 为特征零的代数闭域, $\mathrm{gl}(V)$ 为 F 上的一般线性李代数. 设 $\mathfrak{L}$ 为 $\mathrm{gl}(V)$ 的可解子代数, 则在 V 中存在一组基, 使得 $\mathfrak{L}$ 中元素的方阵表示全部为上三角方阵.

证 对线性空间 V 的维数 m 作归纳法. 由 Lie 定理, 在线性空间 V 中存在向量 $e_n\neq 0$, 使得 $x(e_n)=\lambda(x)e_n,\quad \forall\, x\in\mathfrak{L}$, 其中 $\lambda(x)$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 上的线性函数. 记 V_0 为由 e_n 线性生成的一维子空间, 则商空间 V/V_0 为 $m-1$ 维线性空间. 又任取 $x\in\mathfrak{L}$, 则由 $x(V_0)\subset V_0$ 可知 x 诱导了商空间 V/V_0 上的线性变换 $\widetilde{x}$, 它定义为

$$\widetilde{x}(v+V_0)=\widetilde{x}(v)+V_0,\quad \forall\, x\in\mathfrak{L},\quad v\in V.$$

显然 $x\to\widetilde{x}$ 为李代数同态, 所以

$$\widetilde{\mathfrak{L}}=\{\widetilde{x}\mid\forall\, x\in\mathfrak{L}\}\subset\mathrm{gl}(V/V_0)$$

仍为可解线性李代数, 由归纳法假设可知在线性空间 V/V_0 中存在基 $e_2+V_0,e_3+V_0,\cdots,e_n+V_0$, 使得

$$\widetilde{x}(e_i+V_0)=\sum_{j=2}^{i}\mu_{ji}(e_j+V_0),\quad 2\le i\le n.$$

因此有

$$x(e_1) = \mu_{11}e_1,$$

$$x(e_i) = \mu_{1i}e_1 + \sum_{j=2}^{i}\mu_{ji}e_j, \quad 2 \le i \le n.$$

这证明了线性变换 x 的方阵表示为上三角方阵. 证完.

定理 1.1.25 (Engel 定理)　设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的一般线性李代数 $\mathrm{gl}(V)$ 的子代数. 设 $\mathfrak{L}$ 由线性空间 V 上的幂零线性变换构成, 则 $\mathfrak{L}$ 在线性空间 V 中有特征根为零的公共特征向量.

证　由归纳法不难证明

$$(\mathrm{ad}\,(x))^k y = \sum_{i=1}^{k}(-1)^i C_k^i x^{k-i} y x^i, \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{L}.$$

由条件可知 x 为线性空间 V 上的幂零线性变换. 由此推出 $\mathrm{ad}\,(x)$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 上的幂零线性变换.

为了证明 Engel 定理, 我们对线性空间 V 的维数以及线性李代数 $\mathfrak{L}$ 的维数作双重数学归纳法. 注意到 $\mathfrak{L} \subset \mathrm{gl}\,(V)$ 蕴含 $\dim(\mathfrak{L}) \le (\dim(V))^2$. 当 $\dim(\mathfrak{L}) = 1$ 时, 对任意的线性空间 V, 只要 $\mathfrak{L} \subset \mathrm{gl}\,(V)$ 且 $\mathfrak{L}$ 由线性空间 V 上的幂零线性变换构成, 则 $\mathfrak{L}$ 在 V 中有特征根为零的公共特征向量.

由归纳法假设, 对任一线性空间 $\widetilde{V}$ 及线性李代数 $\widetilde{\mathfrak{L}} \subset \mathrm{gl}\,(\widetilde{V})$, 其中 $\dim(\widetilde{\mathfrak{L}}) \le n-1$, 且 $\widetilde{\mathfrak{L}}$ 由 $\widetilde{V}$ 上的一些幂零线性变换构成, 则在线性空间 $\widetilde{V}$ 中存在 $\widetilde{\mathfrak{L}}$ 的特征根为零的公共特征向量. 今对 m 维线性空间 V 上的线性李代数 $\mathfrak{L}$ 进行讨论, 其中 $\dim(\mathfrak{L}) = n \ge 2$, 且 $\mathfrak{L}$ 由线性空间 V 上的一些幂零线性变换构成. 由于 $\mathfrak{L}$ 的极大真子代数 $\mathfrak{L}_0$ 的维数 ≥ 1, 任取 $x_0 \in \mathfrak{L}_0$, 则 $\mathrm{ad}\,(x_0)(\mathfrak{L}_0) \subset \mathfrak{L}_0$, 所以 $\mathrm{ad}\,(x_0)$ 诱导了商空间 $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0$ 上的幂零线性变换 $\widetilde{x_0}$. 且由 $x_0 \to \mathrm{ad}\,(x_0)$ 为李代数同态可知, $\mathrm{ad}\,(x_0) \to \widetilde{x_0}$ 也是李代数同态. 所以

$$\widetilde{\mathfrak{L}_0} = \{\widetilde{x_0} \mid \forall\, x_0 \in \mathfrak{L}_0\} \subset \mathrm{gl}\,(\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0)$$

为线性李代数，且 $\widetilde{\mathfrak{L}}_0$ 由商空间 $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0$ 上的一些幂零线性变换构成．今 $\dim(\widetilde{\mathfrak{L}}_0) \leq \dim(\mathfrak{L}_0) < \dim(\mathfrak{L})$，由归纳法假设，在 $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0$ 中存在 $\widetilde{\mathfrak{L}}_0$ 的特征根为零的公共特征向量，即存在 $a \in \mathfrak{L}$，$a \notin \mathfrak{L}_0$，使得 $\widetilde{x_0}(a + \mathfrak{L}_0) = 0 + \mathfrak{L}_0$，即 $[x_0, a] \in \mathfrak{L}_0$，$\forall\ x_0 \in \mathfrak{L}_0$．这证明了 $[a, \mathfrak{L}_0] \subset \mathfrak{L}_0$，所以李代数 $\mathfrak{L}$ 的极大真子代数 $\mathfrak{L}_0$ 在 $\mathrm{ad}(a)$ 下不变．另一方面，由于 $a \in \mathfrak{L}$，$a \notin \mathfrak{L}_0$，记 $< a >$ 为由 a 线性生成的一维子空间，则李代数 $\mathfrak{L}$ 有子空间 $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_0 + < a >$．而 $[\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_1] \subset [\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_0] + [\mathfrak{L}_0, a] \subset \mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{L}_1$，所以 $\mathfrak{L}_1$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的子代数．但是 $\mathfrak{L}_0$ 为极大真子代数，这推出 $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}$．所以证明了

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + < a >, \quad [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \subset \mathfrak{L}_0,$$

即 $\mathfrak{L}_0$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的小一维的真理想．

对理想 $\mathfrak{L}_0$ 用归纳法假设，于是在线性空间 V 中存在 $\mathfrak{L}_0$ 的特征根为零的公共特征向量 v_0．因此线性空间 V 的子空间

$$V_0 = \{v \in V \mid x_0(v) = 0,\ \forall\, x_0 \in \mathfrak{L}_0\} \neq 0.$$

今 $[a, \mathfrak{L}_0] \subset \mathfrak{L}_0$，任取 $v_1 \in V_0$，由 $x(v_1) = 0$，$\forall\, x \in \mathfrak{L}_0$，有

$$x_0 a(v_1) = [x_0, a](v_1) + a x_0(v_1) = 0,\ \forall x_0 \in \mathfrak{L}_0.$$

这证明了 $a(V_0) \subset V_0$．然而，a 在线性空间 V 上为幂零线性变换，所以在不变子空间 V_0 上也是幂零线性变换，因此在子空间 V_0 中有线性变换 a 的特征根为零的特征向量 v_0．于是，$v_0 \neq 0$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的特征根为零的公共特征向量．至此证明了定理．证完．

推论 1 设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的一般线性李代数 $\mathrm{gl}(V)$ 的子代数，且 $\mathfrak{L}$ 由线性空间 V 上的一些幂零线性变换构成，则在线性空间 V 中存在一组基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，使得 $\mathfrak{L}$ 的元素在这组基下的方阵表示都是上三角方阵，且对角元素为零．特别地，$\mathfrak{L}$ 为幂零线性李代数．

证 前一断言和定理 1.1.24 的推论一样证明．为了证明后一断言，只要证明所有对角元素为零的 $m \times m$ 上三角方阵构成的李

代数 $\mathfrak{G}$ 幂零，于是它的子代数也幂零．事实上，易证 $\mathfrak{G}$ 的任意 m 个元素在矩阵乘法下的乘积为零，所以推出 $\mathfrak{G}^m = 0$，即 $\mathfrak{G}$ 幂零．因此证明了后一断言．推论证完．

推论 2 域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 幂零，当且仅当 $\mathrm{ad}(\mathfrak{L})$ 由 $\mathfrak{L}$ 上的幂零线性变换构成．

证 由推论 1，我们只要证明当李代数 $\mathfrak{L}$ 幂零时，李代数 $\mathrm{ad}(\mathfrak{L})$ 由 $\mathfrak{L}$ 上的幂零线性变换构成．事实上，由 $\mathfrak{L}$ 幂零，即存在自然数 N，使得 $\mathfrak{L}^N = 0$，所以 $(\mathrm{ad}(\mathfrak{L}))^{N-1}(\mathfrak{L}) = 0$，即 $(\mathrm{ad}(\mathfrak{L}))^{N-1} = 0$．所以，$N-1$ 个 $\mathrm{ad}(\mathfrak{L})$ 的元素相乘为零，因此 $\mathrm{ad}(x)$ 为幂零线性变换，$\forall\, x \in \mathfrak{L}$．证完．

容易证明，域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 可解，当且仅当 $\mathrm{ad}(\mathfrak{L})$ 可解．事实上，由定理 1.1.12，李代数 $\mathrm{ad}(\mathfrak{L})$ 同构于商李代数 $\mathfrak{L}/\mathrm{C}(\mathfrak{L})$，其中 $\mathrm{C}(\mathfrak{L})$ 是李代数 $\mathfrak{L}$ 的中心．设 $\mathrm{ad}(\mathfrak{L})$ 可解，则存在 N，使得 $(\mathfrak{L}/C(\mathfrak{L}))^{(N)} = 0$，即 $\mathfrak{L}^{(N)} \subset \mathrm{C}(\mathfrak{L})$．所以 $\mathfrak{L}^{(N+1)} = 0$，即李代数 $\mathfrak{L}$ 可解．

推论 3 域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 可解，当且仅当 $\mathfrak{L}$ 的换位子代数 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 幂零．

证 由引理 1.1.18 可知，我们只要证明，若李代数 $\mathfrak{L}$ 可解，则它的换位子代数 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 幂零．为了运用 Lie 定理，对域 F 作扩张．熟知存在包含域 F 的最小代数闭域 F_0．考虑域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的 F_0 化，记作 $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}^{F_0}$．由 $\mathfrak{L}$ 可解可知李代数 $\mathfrak{L}_0$ 也可解．因为 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的理想，且作为 $\mathfrak{L}_0$ 的向量子集，有 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}] \subset [\mathfrak{L}_0,\mathfrak{L}_0]$，由定义可知，为了证明域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的换位子代数 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 幂零，只要证明域 F_0 上的李代数 $\mathfrak{L}_0$ 的换位子代数 $[\mathfrak{L}_0,\mathfrak{L}_0]$ 幂零就够了．因此，我们无妨假设域 F 为代数闭域．因为李代数 $\mathfrak{L}$ 可解，所以李代数 $\mathrm{ad}(\mathfrak{L})$ 为可解线性李代数．由 Lie 定理的推论可知，$\mathrm{ad}(\mathfrak{L})$ 同构于由一些上三角方阵构成的矩阵李代数 $\mathfrak{L}_1$．于是，$[\mathrm{ad}(\mathfrak{L}_1),\mathrm{ad}(\mathfrak{L}_1)]$ 由一些对角元素为零的上三角方阵构成，因此由幂零方阵构成，所以证明了 $[\mathrm{ad}(\mathfrak{L}),\mathrm{ad}(\mathfrak{L})] = \mathrm{ad}([\mathfrak{L},\mathfrak{L}])$ 由一些幂零线性变换构成．由 Engel 定理的推论 2 可知李代数 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$

幂零. 至此证明了推论 3. 证完.

上面证明的 Lie 定理和 Engel 定理都是限制在线性李代数的情形. 由下面一个著名的定理可知, 这两个定理实际上刻画了李代数的本质性质. 下面的定理可在某些李代数书中找到.

定理 1.1.26(Ado 定理) 特征零域上的李代数必同构于一个线性李代数, 所以同构于一个矩阵李代数.

显然, 所有 $m\times m$ 上三角方阵构成可解李代数. 它的任一子代数也是可解李代数, 这时对域未加任何条件. 而 Lie 定理告诉我们, 对域加上特征零且代数闭的条件后, 研究一般的可解李代数, 在同构等价意义下就是研究上三角方阵构成的可解李代数的所有子代数. 同样, 所有 $m\times m$ 上三角方阵, 且对角元素全为零, 它们的全体构成幂零李代数. 而 Engel 定理告诉我们, 对域加上特征零的条件后, 研究一般的幂零李代数, 在同构等价意义下就是研究对角元素为零的上三角方阵构成的幂零李代数的所有子代数.

在结束这一节之前, 我们不加证明地引进 Levi-Malcev 定理, 为此要引进共轭的概念.

定义 1.1.27 域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 称为李代数 $\mathfrak{L}$ 上的 **微分**, 如果线性变换 $\mathcal{A}$ 适合条件

$$\mathcal{A}([x,y])=[\mathcal{A}(x),\ y]+[x,\ \mathcal{A}(y)],\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{L}.$$

李代数 $\mathfrak{L}$ 上的所有微分构成集合 $\mathrm{Der}\,(\mathfrak{L})$, 称为李代数 $\mathfrak{L}$ 上的 **微分代数**.

容易证明

引理 1.1.28 域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 上的微分代数 $\mathrm{Der}\,(\mathfrak{L})$ 为一般线性李代数 $\mathrm{gl}\,(\mathfrak{L})$ 的子代数.

引理 1.1.29 设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的李代数, 则线性李代数 $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{L})$ 为 $\mathrm{Der}\,(\mathfrak{L})$ 的理想.

证 由 Jacobi 恒等式有

$$\mathrm{ad}\,(x)([y,z])=[(\mathrm{ad}\,(x))(y),z]+[y,(\mathrm{ad}\,(x))(z)],\ \forall\, x,y,z\in\mathfrak{L},$$

所以任取 $x \in \mathfrak{L}$, 则 $\mathrm{ad}(x)$ 为微分. 这证明了 $\mathrm{ad}(\mathfrak{L}) \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{L})$.

再任取 $\mathcal{A} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{L})$, $x \in \mathfrak{L}$, 则有

$$\begin{aligned}[D, \mathrm{ad}(x)](y) &= D(\mathrm{ad}(x))(y) - (\mathrm{ad}(x))D(y) = D([x,y]) - [x, Dy] \\ &= [Dx, y] = (\mathrm{ad}(Dx))(y), \quad \forall\, y \in \mathfrak{L}.\end{aligned}$$

这证明了

$$[D, \mathrm{ad}(x)] = \mathrm{ad}(Dx) \in \mathrm{ad}(\mathfrak{L}), \quad \forall\, x \in \mathfrak{L}.$$

所以 $[\mathrm{Der}(\mathfrak{L}), \mathrm{ad}(\mathfrak{L})] \subset \mathrm{ad}(\mathfrak{L})$, 即 $\mathrm{ad}(\mathfrak{L})$ 为 $\mathrm{Der}(\mathfrak{L})$ 的理想. 证完.

定义 1.1.30 设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的李代数, 则 $\mathrm{ad}(\mathfrak{L})$ 的元素称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **内微分**, 而线性李代数 $\mathrm{ad}(\mathfrak{L})$ 称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **内微分代数**.

熟知, 当域 $F = \mathbb{R}$ 或 $F = \mathbb{C}$ 时, 对于线性空间 $\mathfrak{L}$ 上的任意线性变换 $\mathcal{A}$, 则

$$\exp(\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathcal{A}^k$$

仍为线性空间 $\mathfrak{L}$ 上的线性变换. 设 $\dim(\mathfrak{L}) = n$, 记 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为线性变换 $\mathcal{A}$ 的 n 个特征根, 则 $e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}$ 为线性变换 $\exp(\mathcal{A})$ 的 n 个特征根. 因此 $\det(\exp(\mathcal{A})) = \exp(\mathrm{tr}(\mathcal{A}))$. 我们有

引理 1.1.31 设 $\mathfrak{L}$ 为实或复李代数, D 为李代数 $\mathfrak{L}$ 上的微分, 则 $\exp(D)$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 上的自同构.

证 任取 $x, y \in \mathfrak{L}$, 则有

$$D([x,y]) = [D(x),\ y] + [x,\ D(y)].$$

由归纳法可证

$$D^k([x,y]) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j [D^j(x), D^{k-j}(y)],$$

其中

$$C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}, \quad 0 \le j \le k.$$

于是

$$(\exp(D))([x,y]) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} [D^j(x),\ D^{k-j}(y)]$$

$$= \sum_{j,l=0}^{\infty} \frac{1}{j!l!} [D^j(x), D^l(y)] = [(\exp(D))(x), (\exp(D))(y)].$$

证完.

定义 1.1.32 设 $\mathfrak{L}$ 为实李代数或复李代数. 任取 $x \in \mathfrak{L}$, 则 $\exp(\mathrm{ad}(x))$ 称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **内自同构**. 由 $\exp(\mathrm{ad}(\mathfrak{L}))$ 生成的群称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **内自同构群**, 其中的元素也称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **内自同构**. 对李代数 $\mathfrak{L}$ 的任意两个子集(或元素), 如果存在李代数 $\mathfrak{L}$ 的内自同构使之互变, 则这两个子集(或元素)称为 **互相共轭的**.

下面不加证明地引进

定理 1.1.33(Levi-Malcev定理) 设 $\mathfrak{L}$ 为实或复李代数, 它的根基为 $\mathfrak{R}$, 则在李代数 $\mathfrak{L}$ 中存在半单子代数 $\mathfrak{S}$, 使得李代数 $\mathfrak{L}$ 有如下子代数直接和分解

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{R} + \mathfrak{S}.$$

且若李代数 $\mathfrak{L}$ 有两种 Levi-Malcev 分解

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{R} + \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{R} + \mathfrak{S}_2,$$

其中 $\mathfrak{S}_1$ 及 $\mathfrak{S}_2$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的半单子代数, 则 $\mathfrak{S}_1$ 和 $\mathfrak{S}_2$ 互相共轭.

这个定理的重要性在于它将实或复李代数在同构等价意义下的分类问题化为: (1) 可解李代数及半单李代数在同构等价意义下的分类; (2) 给定半单李代数 $\mathfrak{S}$, 如何来确定可解李代数 $\mathfrak{R}$, 使得 $\mathfrak{G}=\mathfrak{R}+\mathfrak{S}$ 为 Levi-Malcev 分解. 关于半单李代数的分类问题, 已由 É.Cartan 最终完成, 而可解李代数的分类问题, 至今没有解决.

§ 1.2　复半单李代数的分类

复半单李代数的分类，主要用到 Killing 型、Cartan 子代数、根系和单根系，从而将分类问题化为一个简单的图论问题. 下面我们系统地叙述这个理论.

定义 1.2.1　设 $f(x,y)$ 为域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 上的对称双线性函数， $f(x,y)$ 称为 **不变对称双线性函数**, 如果

$$f([z,x],\ y)+f(x,\ [z,y])=0,\quad \forall\, x,y,z\in\mathfrak{L}.$$

李代数 $\mathfrak{L}$ 的子空间

$$\ker(f)=\{y\in\mathfrak{L}\mid f(y,\mathfrak{L})=0\}$$

称为对称双线性函数 f 的 **核**. 当 $\ker(f)=0$ 时，对称双线性函数 f 称为 **非退化的**, 否则称为 **退化的**.

显然有

引理 1.2.2　设 f 为域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 上的不变对称双线性函数，则有

(1)　f 的核 $\ker(f)$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的理想;

(2)　f 限制在李代数 $\mathfrak{L}$ 的任一子代数上仍为不变对称双线性函数.

定义 1.2.3　设 f 为域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 上的不变对称双线性函数， $\mathfrak{M}$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的子空间，则

$$\mathfrak{M}^{\perp}=\{x\in\mathfrak{L}\mid f(x,\mathfrak{M})=0\}$$

称为子空间 $\mathfrak{M}$ 的 **正交补**. 这时， $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}^{\perp}$ 的元素称为 **互相正交的**.

引理 1.2.4　设 $\mathfrak{M}^{\perp}$ 为域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的子空间 $\mathfrak{M}$ 关于 $\mathfrak{L}$ 上的不变对称双线性函数的正交补，则 $\mathfrak{M}^{\perp}$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的子空

间. 当 $\mathfrak{M}$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的理想时, 正交补 $\mathfrak{M}^{\perp}$ 仍为李代数 $\mathfrak{L}$ 的理想. 特别地, 当不变对称双线性函数 f 在李代数 $\mathfrak{L}$ 上非退化时, 李代数 $\mathfrak{L}$ 有子空间直接和分解: $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} + \mathfrak{M}^{\perp}$.

证 今若 $\mathfrak{M}$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的理想, 即 $[\mathfrak{L}, \mathfrak{M}] \subset \mathfrak{M}$, 则

$$f([\mathfrak{L}, \mathfrak{M}^{\perp}], \mathfrak{M}) = -f(\mathfrak{M}^{\perp}, [\mathfrak{L}, \mathfrak{M}]) = 0.$$

所以 $[\mathfrak{L}, \mathfrak{M}^{\perp}] \subset \mathfrak{M}^{\perp}$, 即 $\mathfrak{M}^{\perp}$ 仍为理想. 最后一个断言是线性代数的熟知结果. 证完.

定义 1.2.5 设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的李代数, 则 $\mathfrak{L}$ 上的函数

$$B(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(x))(\operatorname{ad}(y)), \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{L}$$

称为 $\mathfrak{L}$ 上的 **Killing 型**.

引理 1.2.6 设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的李代数, 则 $\mathfrak{L}$ 上的 Killing 型为不变对称双线性函数, 且有

(1) 设 $\mathfrak{M}$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的理想, 则李代数 $\mathfrak{L}$ 上的 Killing 型限制在理想 $\mathfrak{M}$ 上为李代数 $\mathfrak{M}$ 上的 Killing 型;

(2) 设 σ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 到李代数 $\mathfrak{L}_1$ 上的同构, 则李代数 $\mathfrak{L}$ 上的 Killing 型 $B(x, y)$ 有

$$B_1(\sigma(x), \sigma(y)) = B(x, y), \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{L}_1,$$

其中 $B_1(u, v)$, $\forall\, u, v \in \mathfrak{L}_1$ 为李代数 $\mathfrak{L}_1$ 上的 Killing 型. 特别地, 当 σ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的自同构时, 有

$$B(\sigma(x), \sigma(y)) = B(x, y), \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{L}.$$

证 先证明李代数 $\mathfrak{L}$ 上的 Killing 型 $B(x, y)$ 为不变对称双线性函数. 事实上, 只要证明不变性就够了. 今任取 $x, y, z \in \mathfrak{L}$, 则

$$\begin{aligned}
B([x, y], z) &= \operatorname{tr}\ \operatorname{ad}[x, y]\operatorname{ad} z \\
&= \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y - \operatorname{ad} y \operatorname{ad} x)\operatorname{ad} z \\
&= \operatorname{tr}\ \operatorname{ad} y \operatorname{ad} z \operatorname{ad} x - \operatorname{tr}\ \operatorname{ad} y \operatorname{ad} x \operatorname{ad} z \\
&= -\operatorname{tr}\ \operatorname{ad} y(\operatorname{ad}[x, z]) \\
&= -B(y, [x, z]).
\end{aligned}$$

这证明了不变性.

再来证 (1). 在李代数 $\mathfrak{L}$ 的理想 $\mathfrak{M}$ 中取基 $e_1,\cdots,e_r$, 再取李代数 $\mathfrak{L}$ 的基为 $e_1,\cdots,e_r,e_{r+1},\cdots,e_n$. 由理想的定义可知, 这组基的乘法表为

$$[e_i,e_j]=\sum_{k=1}^{r}C_{ij}^k e_k,\quad 1\le i\le r,\ 1\le j\le n,$$
$$[e_i,e_j]=\sum_{k=1}^{n}C_{ij}^k e_k,\quad r+1\le i,j\le n.$$

因此任取 $1\le i,j\le r$, $1\le k\le n$, 有

$$[e_i,\ [e_j,e_k]]=[e_i,\sum_{p=1}^{r}C_{jk}^p e_p]=\sum_{p,q=1}^{r}C_{jk}^p C_{ip}^q e_q.$$

所以

$$B(e_i,e_j)=\operatorname{tr}\ \operatorname{ad}e_i\ \operatorname{ad}e_j=\sum_{k,p=1}^{r}C_{jk}^p C_{ip}^k.$$

记李代数 $\mathfrak{L}$ 的理想 $\mathfrak{M}$ 的 Killing 型为 $B_2(u,v)$, 由直接计算有

$$B_2(e_i,e_j)=\sum_{k,p=1}^{r}C_{jk}^p C_{ip}^k,\quad 1\le i,j\le r.$$

这证明了李代数 $\mathfrak{L}$ 上的 Killing 型限制在理想 $\mathfrak{M}$ 上为李代数 $\mathfrak{M}$ 的 Killing 型.

最后证 (2). 在李代数 $\mathfrak{L}$ 中取基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$. 由于 σ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 到李代数 $\mathfrak{L}_1$ 上的同构, 所以 $\sigma(e_1),\sigma(e_2),\cdots,\sigma(e_n)$ 为李代数 $\mathfrak{L}_1$ 的基. 令

$$[e_i,e_j]=\sum_{k=1}^{n}C_{ij}^k e_k,\quad 1\le i,j\le n.$$

双方作用李代数的同构 σ, 有

$$[\sigma(e_i),\sigma(e_j)]=\sum_{k=1}^{n}C_{ij}^{k}\sigma(e_k),\quad 1\leq i,j\leq n.$$

于是李代数 $\mathfrak{L}$ 及李代数 $\mathfrak{L}_1$ 上的 Killing 型分别有

$$B(e_i,e_j)=\sum_{k,p=1}^{n}C_{jk}^{p}C_{ip}^{k},\quad B_1(\sigma(e_i),\sigma(e_j))=\sum_{k,p=1}^{n}C_{jk}^{p}C_{ip}^{k}.$$

由此证明了 $B(x,y)=B_1(\sigma(x),\sigma(y))$, $\forall\, x,y\in\mathfrak{L}$. 证完.

定义 1.2.7 设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的李代数, 李代数 $\mathfrak{L}$ 的子代数 $\mathfrak{H}$ 称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **Cartan 子代数**, 如果它适合条件

(1) $\mathfrak{H}$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **极大幂零子代数**;

(2) $\mathfrak{H}$ 的 **正规化子**

$$\mathrm{N}(\mathfrak{H})=\{x\in\mathfrak{L}\mid[x,\mathfrak{H}]\subset\mathfrak{H}\}=\mathfrak{H}.$$

为了给出复李代数的 Cartan 子代数的存在性, 我们先讨论复李代数关于 Cartan 子代数的根子空间分解. 下面的结果在特征零的代数闭域上也成立.

引理 1.2.8 设 $\mathfrak{H}$ 为 n 维复李代数 $\mathfrak{L}$ 的幂零子代数, 则李代数 $\mathfrak{L}$ 关于线性李代数 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 有 **根子空间** 直接和 **分解**

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_0+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{L}_\alpha,$$

其中 Δ 为幂零子代数 $\mathfrak{H}$ 上的非零线性函数构成的有限集, 使得 $\mathfrak{L}_\alpha\neq 0$, $\forall\alpha\in\Delta$. $\mathfrak{L}_\alpha$ 定义为

$$\mathfrak{L}_\alpha=\{x\in\mathfrak{L}\mid(\mathrm{ad}\,h-\alpha(h)\mathrm{id}\,)^n x=0,\ \ \forall\, h\in\mathfrak{H}\}.$$

又 $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{L}_0$, 其中 $\mathfrak{L}_0$ 定义为

$$\mathfrak{L}_0=\{x\in\mathfrak{L}\}\mid(\mathrm{ad}\,(h))^n x=0,\ \forall\ h\in\mathfrak{H}\}.$$

再有 阶化性质，即有

$$[\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_\beta] \subset \mathfrak{L}_{\alpha+\beta}, \quad \forall\ \alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\},$$

这里，约定当 $\alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}$ 时 $\mathfrak{L}_{\alpha+\beta} = 0$.

证　为了证明引理，我们对幂零李代数 $\mathfrak{H}$ 的维数作归纳法. 今由 $\mathfrak{H}$ 幂零，所以 $\mathfrak{H}$ 的同态像 $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{H})$ 也幂零，因此 $[\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}, \mathrm{ad}\,\mathfrak{H}] = \mathrm{ad}\,[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] \neq \mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$. 任取 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 中包含理想 $\mathrm{ad}\,[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$ 的低一维子空间 $\mathfrak{G}_0$，于是 $[\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}, \mathfrak{G}_0] \subset \mathrm{ad}\,[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] \subset \mathfrak{G}_0$，即为幂零李代数 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 的低一维的幂零理想. 在同态 $\mathfrak{H} \to \mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 下，$\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 的理想 $\mathfrak{G}_0$ 的完全原像自然为幂零李代数 $\mathfrak{H}$ 的理想，记作 $\mathfrak{H}_0$，于是有 $\mathfrak{G}_0 = \mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_0$. 由 $\mathfrak{H}_0$ 为幂零李代数的理想，所以仍幂零，且由 $\dim \mathfrak{G}_0 = \dim(\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}) - 1$ 可知 $\dim \mathfrak{H}_0 < \dim \mathfrak{H}$.

对李代数 $\mathfrak{L}$ 的幂零子代数 $\mathfrak{H}_0$ 用归纳法假设，所以李代数 $\mathfrak{L}$ 关于幂零子代数 $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{H}_0)$ 有根子空间直接和分解

$$\mathfrak{L} = \widetilde{\mathfrak{L}}_0 + \sum_{\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}} \widetilde{\mathfrak{L}}_\alpha,$$

$\widetilde{\Delta}$ 为李代数 $\mathfrak{H}_0$ 上的非零线性函数构成的有限集. 又 $\mathfrak{H}_0 \subset \widetilde{\mathfrak{L}}_0$，

$$\widetilde{\mathfrak{L}}_\beta = \{x \in \mathfrak{L} \mid (\mathrm{ad}\,h - \beta(h)(\mathrm{id}\,))^n x = 0,\ \forall\ h \in \mathfrak{H}_0\},$$

其中 $\beta \in \{0\} \cup \widetilde{\Delta}$. 我们来证 $[\widetilde{\mathfrak{L}}_\beta, \widetilde{\mathfrak{L}}_\delta] \subset \widetilde{\mathfrak{L}}_{\beta+\delta}$，$\forall\ \beta, \delta \in \widetilde{\Delta} \cup \{0\}$. 事实上，任取 $h \in \mathfrak{H}_0, x \in \widetilde{\mathfrak{L}}_\beta, y \in \widetilde{\mathfrak{L}}_\delta$. 于是有

$$(\mathrm{ad}\,h - \beta(h)(\mathrm{id}\,))^n x = 0, \quad (\mathrm{ad}\,h - \delta(h)(\mathrm{id}\,))^n y = 0.$$

由归纳法易证，任取 $k \in \mathbb{N}$，有公式

$$\begin{aligned}&(\mathrm{ad}\,h - (\beta(h) + \delta(h))\mathrm{id}\,)^k [x, y] \\ = &\sum_{i=0}^{k} C_k^i [(\mathrm{ad}\,h - \beta(h)(\mathrm{id}\,))^i x,\ (\mathrm{ad}\,h - \delta(h)(\mathrm{id}\,))^{k-i} y].\end{aligned}$$

所以我们有 $(\mathrm{ad}\,h - (\beta(h) + \delta(h))(\mathrm{id}\,))^{2n}[x, y] = 0$. 再利用复线性空间上的线性变换的 Jordan 标准形理论，便证明了

$$(\mathrm{ad}\,h - (\beta(h) + \delta(h))(\mathrm{id}\,))^n [x, y] = 0,$$

即 $[x,y]\in\widetilde{\mathfrak{L}}_{\beta+\delta}$. 所以证明了 $[\widetilde{\mathfrak{L}}_\beta,\widetilde{\mathfrak{L}}_\delta]\subset\widetilde{\mathfrak{L}}_{\beta+\delta},\forall\ \beta,\delta\in\widetilde{\Delta}\cup\{0\}$.

特别地，我们有 $[\widetilde{\mathfrak{L}}_0,\widetilde{\mathfrak{L}}_\beta]\subset\widetilde{\mathfrak{L}}_\beta,\ \forall\ \beta\in\widetilde{\Delta}\cup\{0\}$. 注意到 $\mathfrak{H}_0$ 为幂零李代数 $\mathfrak{H}$ 的幂零子代数，所以有自然数 N, 使得 $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_0)^N\mathfrak{H}=0$. 这证明了 $\mathfrak{H}\subset\widetilde{\mathfrak{L}}_0$, 因此 $[\mathfrak{H},\widetilde{\mathfrak{L}}_\beta]\subset\widetilde{\mathfrak{L}}_\beta,\ \forall\beta\in\widetilde{\Delta}\cup\{0\}$, 即根子空间 $\widetilde{\mathfrak{L}}_\beta,\ \forall\beta\in\widetilde{\Delta}\cup\{0\}$ 都在 $\mathrm{ad}\,h$ 下不变，其中，h 为幂零李代数 $\mathfrak{H}$ 的任意元素.

今由

$$\dim\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_0=\dim\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}-1,$$

任取元素 $\mathcal{A}\in\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$, $\mathcal{A}\notin\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_0$, 则存在元素 $h\in\mathfrak{H}$, $h\notin\mathfrak{H}_0$, 使得 $\mathcal{A}=\mathrm{ad}\,h$. 任取 $\beta\in\widetilde{\Delta}\cup\{0\}$, 由于子空间 $\widetilde{\mathfrak{L}}_\beta$ 在 $\mathrm{ad}\,h$ 下不变，所以 $\widetilde{\mathfrak{L}}_\beta$ 又可分解为关于 $\mathrm{ad}\,h$ 的根子空间直接和. 至此证明了在李代数 $\mathfrak{L}$ 中存在基，使得 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 的所有元素同时表示为 Jordan 标准形，即李代数 $\mathfrak{L}$ 分解为关于幂零李代数 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 的根子空间直接和

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_0+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{L}_\alpha.$$

最后，$[\mathfrak{L}_\alpha,\mathfrak{L}_\beta]\subset\mathfrak{L}_{\alpha+\beta},\ \forall\ \alpha,\beta\in\Delta\cup\{0\}$ 的证明和上面关于 $[\widetilde{\mathfrak{L}}_\beta,\widetilde{\mathfrak{L}}_\delta]\subset\widetilde{\mathfrak{L}}_{\beta+\delta},\ \forall\ \beta,\delta\in\widetilde{\Delta}\cup\{0\}$ 的证明完全相同，至此证明了引理. 证完.

下面对复李代数的 Cartan 子代数来证明

定理 1.2.9 设 $\mathfrak{H}$ 为 n 维复李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数，则复李代数 $\mathfrak{L}$ 关于线性李代数 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 有根子空间直接和分解

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{H}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{L}_\alpha,$$

其中 Δ 为 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 上的非零线性函数构成的有限集，称为李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的 **根系**, 且有

$$[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]\subset\mathfrak{H},$$
$$[\mathfrak{H},\mathfrak{L}_\alpha]\subset\mathfrak{L}_\alpha,\ \forall\ \alpha\in\Delta.$$

又当 $\alpha, -\alpha \in \Delta$ 时，还有

$$[\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{H}.$$

再有阶化性质

$$[\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_\beta] \subset \mathfrak{L}_{\alpha+\beta}, \quad \forall\ \alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\}, \quad \alpha + \beta \in \Delta \cup \{0\},$$
$$[\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_\beta] = 0, \quad \forall\ \alpha, \beta \in \Delta, \quad \alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}.$$

又对李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型 $B(x, y)$, 有

$$B(\mathfrak{H}, \mathfrak{L}_\alpha) = 0, \quad \forall\ \alpha \in \Delta,$$
$$B(\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_\beta) = 0, \quad \forall\ \alpha, \beta \in \Delta, \quad \alpha + \beta \neq 0.$$

证 由引理 1.2.8, 我们来证明 $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{H}$. 事实上，已知 $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{L}_0$, 又有 $[\mathfrak{H}, \mathfrak{L}_0] \subset [\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_0] \subset \mathfrak{L}_0$, 所以 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的子代数 $\mathfrak{L}_0$ 上的线性李代数. 由 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 的幂零性，可知 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 由幂零线性变换构成（见 Engel 定理的推论 2 及子空间 $\mathfrak{L}_0$ 的定义）. 由 Engel 定理可知，在线性空间 $\mathfrak{L}_0$ 中存在一组基，使得线性变换集 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 同时表示为对角元素为零的上三角方阵. 因此记 $\dim \mathfrak{L}_0 = r$, 则在 $\mathfrak{L}_0$ 上有 $(\mathrm{ad}\,h_1)(\mathrm{ad}\,h_2)\cdots(\mathrm{ad}\,h_r) = 0$, $\forall\ h_1, \cdots, h_r \in \mathfrak{H}$. 所以证明了 $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{H})^r(\mathfrak{L}_0) = 0$. 由 Cartan 子代数的第二个条件以及 $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{H})((\mathrm{ad}\,\mathfrak{H})^{r-1}(\mathfrak{L}_0)) = 0 \subset \mathfrak{H}$ 可知 $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{H})^{r-1}(\mathfrak{L}_0) \subset \mathfrak{H}$. 由归纳法便证明了 $\mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{H}$. 至此证明了 $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{H}$.

由 Killing 型 $B(x, y)$ 的定义易证

$$B(\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_\beta) = 0, \quad \forall\ \alpha \in \Delta,\ \beta \in \Delta \cup \{0\},\ \alpha + \beta \neq 0.$$

定理证完.

为了给出 n 维复李代数 $\mathfrak{L}$ 中 Cartan 子代数的存在性，我们引进

定义 1.2.10 设 $\mathfrak{L}$ 为 n 维复李代数. 任取 $x \in \mathfrak{L}$, 线性空间 $\mathfrak{L}$ 上的线性变换 $\mathrm{ad}\,x$ 的特征多项式记作

$$\det(\lambda(\mathrm{id}) - \mathrm{ad}\,x) = \lambda^n + a_1(x)\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-l}(x)\lambda^l,$$

其中 $a_1(x),\cdots,a_{n-l}(x)$ 为线性空间 $\mathfrak{L}$ 上的连续函数，且 a_{n-l} 在 $\mathfrak{L}$ 上不恒等于零，则非负整数 l 称为 **李代数 $\mathfrak{L}$ 的秩**. 又使得 $a_{n-l}(x)\neq 0$ 的元素 x 称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **正则元素**，否则称为 **非正则元素**.

由定义可知，复李代数 $\mathfrak{L}$ 的元素 x 为正则元素当且仅当线性变换 $\operatorname{ad} x$ 的属于特征根零的根子空间的维数恰为 l， x 为非正则元素当且仅当线性变换 $\operatorname{ad} x$ 的属于特征根零的根子空间的维数大于 l. 另一方面，由函数 $a_{n-l}(x)$ 的连续性可知，复李代数 $\mathfrak{L}$ 的所有正则元素构成 $\mathfrak{L}$ 的开子集，而所有非正则元素构成 $\mathfrak{L}$ 的低维闭子集，从而所有正则元素在 $\mathfrak{L}$ 中为稠密子集.

我们有如下的 Cartan 子代数存在性定理：

定理 1.2.11 任取 n 维复李代数 $\mathfrak{L}$ 的正则元素 x_0，则李代数 $\mathfrak{L}$ 上的线性变换 $\operatorname{ad} x_0$ 的属于特征根零的根子空间 $\mathfrak{H}$ 为复李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数.

证 取 x_0 为复李代数 $\mathfrak{L}$ 的正则元素. 考虑线性变换 $\operatorname{ad} x_0$ 的 Jordan 标准形，所以线性空间 $\mathfrak{L}$ 关于 $\operatorname{ad} x_0$ 有根子空间分解

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{H}+\sum_{i=1}^{r}\mathfrak{L}_{\lambda_i},$$

其中 $\mathfrak{L}_{\lambda_i}$ 为 $\mathfrak{L}$ 的属于非零特征根 λ_i 的根子空间，而 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 为线性变换 $\operatorname{ad} x_0$ 的所有不同的非零特征根. 且不难和引理 1.2.8 一样证明

$$[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]\subset\mathfrak{H},\quad [\mathfrak{H},\mathfrak{L}_{\lambda_i}]\subset\mathfrak{L}_{\lambda_i},\quad 1\leq i\leq r.$$

所以 $\mathfrak{H}$ 为 $\operatorname{ad} x_0$ 的属于特征根零的根子空间， $\dim\mathfrak{H}=l$，又 $\mathfrak{H}$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的子代数.

我们先来证明 $\mathfrak{H}$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的幂零子代数. 由 Eegel 定理的推论 1 可知，只要证明 $\operatorname{ad}_{\mathfrak{H}}\mathfrak{H}$ 由幂零线性变换构成就够了. 这里 $\operatorname{ad}_{\mathfrak{H}}\mathfrak{H}$ 表示同态映射 ad 仅限制在 $\mathfrak{H}$ 上的作用.

记 $\mathfrak{L}_0=\sum\limits_{i=1}^{r}\mathfrak{L}_{\lambda_i}$，于是 $\mathfrak{L}=\mathfrak{H}+\mathfrak{L}_0$ 为空间直接和. 任取 $h\in\mathfrak{H}$，则有 $(\operatorname{ad} h)\mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}$，$(\operatorname{ad} h)\mathfrak{L}_0\subset\mathfrak{L}_0$. 任取 $t\in\mathbb{C}$，$h(t)=x_0+th$，则

$\det(\lambda(\mathrm{id})-\mathrm{ad}_{\mathfrak{L}_0}(h(t)))$ 是 t 的多项式，所以只有有限个根 $t_1,\cdots,t_s$. 任取 $t\neq t_j$, $j=1,\cdots,s$, 则 $\mathrm{ad}(h(t))$ 在 $\mathfrak{L}_0$ 上非异，且 $\mathrm{ad}(h(t))$ 的属于特征根零的根子空间 $\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{H}$. 但是，$\mathrm{ad}(h(t))$ 的特征根为零的根子空间的维数 $\geq l=\dim\mathfrak{H}$. 这就证明了 $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}$. 所以 $h(t)$ 为 $\mathfrak{L}$ 的正则元素，且 $\mathrm{ad}(h(t))$ 在 $\mathfrak{H}$ 上为幂零线性变换. 由 $\mathfrak{H}$ 中李代数 $\mathfrak{L}$ 的正则元素构成线性空间 $\mathfrak{H}$ 的开子集，且在 $\mathfrak{H}$ 上稠密，所以任取 $h(t_j)$, 则存在正则元素序列 $h(t_{\alpha,j})=x_0+t_{\alpha,j}h\rightarrow h(t_j)$. 这证明了 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{H}}(h(t_j))$, $j=1,\cdots,s$ 由线性空间 $\mathfrak{H}$ 上的幂零线性变换构成，所以 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{H})$ 由线性空间 $\mathfrak{H}$ 上的幂零线性变换构成. 由 Engel 定理的推论 1 可知李代数 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{H}}\mathfrak{H}$ 为幂零李代数，所以 $\mathfrak{H}$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的幂零子代数.

再证 $\mathfrak{H}$ 在李代数 $\mathfrak{L}$ 上的正规化子 $\mathrm{N}(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$. 事实上，任取 $x\in\mathrm{N}(\mathfrak{H})$. 由于 $\mathfrak{L}=\mathfrak{H}+\mathfrak{L}_0$, 以及 $\mathfrak{H}\subset\mathrm{N}(\mathfrak{H})$, 可知 $\mathrm{N}(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}+\widetilde{\mathfrak{L}}_0$ 为子空间直接和，其中 $\widetilde{\mathfrak{L}}_0\subset\mathfrak{L}_0$. 由正规化子的定义可知 $[\widetilde{\mathfrak{L}}_0,\mathfrak{H}]\subset[\mathrm{N}(\mathfrak{H}),\mathfrak{H}]\subset\mathfrak{H}$, 又显然 $[\widetilde{\mathfrak{L}}_0,\mathfrak{H}]\subset[\mathfrak{L}_0,\mathfrak{H}]\subset\mathfrak{L}_0$, 所以证明了 $[\widetilde{\mathfrak{L}}_0,\mathfrak{H}]\subset\mathfrak{H}\cap\mathfrak{L}_0=0$. 这证明了 $[x_0,\widetilde{\mathfrak{L}}_0]=0$. 注意到正则元素的定义，所以证明了 $\widetilde{\mathfrak{L}}_0=0$, 即 $\mathrm{N}(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$.

最后证 $\mathfrak{H}$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数. 事实上，只要证明 $\mathfrak{H}$ 为极大幂零子代数就够了. 如果 $\mathfrak{H}$ 不是极大幂零子代数，则存在幂零子代数 $\mathfrak{H}_1$, 使得 $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}_1$. 由幂零李代数的定义可知，存在自然数 N, 使得 $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{H})^N\mathfrak{H}_1=\{0\}\subset\mathfrak{H}$. 利用 $\mathrm{N}(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$ 及归纳法便推出 $\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{H}$, 这证明了 $\mathfrak{H}$ 的极大幂零性. 定理证完.

由上面最后的证明可知，n 维复李代数的 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的定义可改为：(1) $\mathfrak{H}$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的幂零子代数；(2) $\mathfrak{H}$ 在李代数 $\mathfrak{L}$ 的正规化子 $\mathrm{N}(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$, 而极大性是推论.

另一方面，关于复半单李代数的 Cartan 子代数，有如下唯一性定理.

定理 1.2.12 设 $\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的两个 Cartan 子代数，则存在复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的内自同构 σ, 使得 $\sigma(\mathfrak{H}_1)=\mathfrak{H}_2$, 即 Cartan 子代数在共轭下唯一.

这个定理的证明我们放在第四章，作为紧李群的 Cartan 子群的共轭性定理的直接推论. 在这一章中，我们承认这个定理成立.

下面给出关于可解李代数及半单李代数的 Cartan 判别条件.

定理 1.2.13 复李代数 $\mathfrak{L}$ 可解当且仅当李代数 $\mathfrak{L}$ 的换位子代数 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 的 Killing 型恒为零.

证 设复李代数 $\mathfrak{L}$ 可解，则由 Engel 定理的推论 3 可知它的换位子代数幂零. 由 Engel 定理可知在李代数 $\mathfrak{L}$ 中存在一组基，使得 $\mathrm{ad}\,[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 的元素同时用对角元素为零的上三角方阵来表示. 因此任取 $x,y\in[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$, 则 $\mathrm{ad}\,(x)\mathrm{ad}\,(y)$ 仍用对角元素为零的上三角方阵表示，所以 $\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}\,(x)\mathrm{ad}\,(y)=0$. 这证明了可解李代数 $\mathfrak{L}$ 的理想 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 的 Killing 型恒为零.

反之，设复李代数 $\mathfrak{L}$ 的换位子代数 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 的 Killing 型恒为零. 为了证明 $\mathfrak{L}$ 可解，只要证明 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]\neq\mathfrak{L}$ 就够了. 在 $\mathfrak{L}$ 中取定 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$, 由定理 1.2.9, 李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{L}$ 有根子空间分解

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{H}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{L}_\alpha.$$

我们断言 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]\neq\mathfrak{L}$. 设若不然，则有 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]=\mathfrak{L}$. 由定理 1.2.9 可知

$$\mathfrak{H}=[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]+\sum_{\alpha,-\alpha\in\Delta}[\mathfrak{L}_\alpha,\mathfrak{L}_{-\alpha}]=\sum_{\alpha,-\alpha\in\Delta\cup\{0\}}[\mathfrak{L}_\alpha,\mathfrak{L}_{-\alpha}],$$

这里，$\mathfrak{L}_0=\mathfrak{H}$. 任取 $\alpha\in\Delta\cup\{0\}$, 设 $-\alpha\in\Delta\cup\{0\}$. 任取 $x\in[\mathfrak{L}_\alpha,\mathfrak{L}_{-\alpha}]$, 设 $\beta\in\Delta$, 作 **根链**

$$\beta-p\alpha,\cdots,\beta-\alpha,\beta,\beta+\alpha,\cdots,\beta+q\alpha,$$

使得 $\beta-(p+1)\alpha,\beta+(q+1)\alpha\notin\Delta\cup\{0\}$. 考虑子空间

$$\mathfrak{M}_0=\sum_{j=-p}^{q}\mathfrak{L}_{\beta+j\alpha}.$$

今 $x \in [\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_{-\alpha}]$, 我们无妨取这种元素 $x = [y, z], y \in \mathfrak{L}_\alpha$, $z \in \mathfrak{L}_{-\alpha}$ 来讨论. 这时子空间 $\mathfrak{M}_0$ 在 $\operatorname{ad} y$ 及 $\operatorname{ad} z$ 下不变, 而

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{M}_0} \operatorname{ad} x = \operatorname{tr}_{\mathfrak{M}_0} \operatorname{ad} [y, z] = \operatorname{tr}_{\mathfrak{M}_0} [\operatorname{ad} y, \operatorname{ad} z] = 0.$$

但是 $x = [y, z] \in [\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{H}$, 所以 $\operatorname{ad} x$ 在 $L_{\beta+j\alpha}$ 上有 $\dim \mathfrak{L}_{\beta+j\alpha}$ 个特征根 $\beta(x) + j\alpha(x)$. 因此

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{M}_0} \operatorname{ad} x = \sum_{j=-p}^{q} (\dim \mathfrak{L}_{\beta+j\alpha})(\beta(x) + j\alpha(x)) = 0.$$

这证明了

$$\beta(x) = m_{\alpha\beta}\alpha(x), \quad \forall\ \beta \in \Delta,$$

其中

$$m_{\alpha\beta} = -\frac{\sum\limits_{j=-p}^{q} j\dim \mathfrak{L}_{\beta+j\alpha}}{\sum\limits_{j=-p}^{q} \dim \mathfrak{L}_{\beta+j\alpha}}$$

与元素 x 的选取无关.

另一方面, 由于 $x \in [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$ 及 $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$ 上的 Killing 型恒为零, 所以

$$\begin{aligned} B(x, x) = \operatorname{tr} (\operatorname{ad} x)^2 &= \sum_{\beta\in\Delta} \beta(x)^2 \dim \mathfrak{L}_\beta \\ &= \alpha(x)^2 \sum_{\beta\in\Delta} m_{\alpha\beta}^2 \dim \mathfrak{L}_\beta = 0. \end{aligned}$$

今由 $\alpha, -\alpha \in \Delta$ 可知有根链

$$\alpha - p\alpha, \cdots, \alpha - 2\alpha, \alpha - \alpha, \alpha, \alpha + \alpha, \cdots, \alpha + q\alpha,$$

使得 $\alpha-(p+1)\alpha, \alpha+(q+1)\alpha \notin \Delta\cup\{0\}$, 其中 $p \geq 2$. 取 $\beta = (1-p)\alpha$, 则根链可改写为 $\beta, \beta + \alpha, \cdots, \beta + (p + q)\alpha$. 这证明了 $m_{\alpha\beta} < 0$. 所以 $\alpha(x) = 0$, 因此 $\beta(x) = 0$, $\forall\ \beta \in \Delta$. 于是 $\beta([\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_{-\alpha}]) = 0$, $\forall\ \alpha, -\alpha \in \Delta \cup \{0\}$, 即 $\beta(\mathfrak{H}) = 0$, 所以 $\beta = 0$, 即 $\Delta = \emptyset$. 至此证

明了复李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的根子空间分解为 $\mathfrak{L}=\mathfrak{H}$. 于是 $\mathfrak{L}$ 幂零, $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]\neq\mathfrak{L}$. 这与假设 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]=\mathfrak{L}$ 矛盾. 所以证明了假设 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 上的 Killing 型恒为零, 则 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]\neq\mathfrak{L}$. 于是用归纳法便证明了李代数 $\mathfrak{L}$ 可解. 定理证完.

推论 复李代数的 Killing 型的核为可解理想.

证 由于李代数的 Killing 型限制在理想上为理想的 Killing 型, 又由于 Killing 型的核的 Killing 型恒为零, 所以证明了核为可解理想. 证完.

定理 1.2.14 复李代数半单当且仅当它的 Killing 型非退化. 这时, Killing 型限制在任一 Cartan 子代数上也非退化.

证 由定理 1.2.13 的推论可知, 若复李代数半单, 则可解理想只有零, 所以复李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型非退化. 反之, 若复李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型非退化. 记 $\mathfrak{R}$ 为复李代数 $\mathfrak{L}$ 的根基, 若 $\mathfrak{R}\neq 0$, 于是在李代数 $\mathfrak{L}$ 中存在非零交换理想 $\mathfrak{S}$. 在 $\mathfrak{S}$ 中取基 $e_1,\cdots,e_r$, 于是李代数 $\mathfrak{S}$ 中存在基 $e_1,\cdots,e_r,\cdots,e_n$, 且有

$$[e_i,e_j]=0,\quad 1\leq i,j\leq r,$$

$$[e_i,e_j]=\sum_{k=1}^{r}C_{ij}^k e_k,\quad 1\leq i\leq r,\quad r+1\leq j\leq n.$$

任取 $1\leq i\leq r$, $1\leq p\leq n$, 则

$$(\operatorname{ad}e_p\operatorname{ad}e_i)e_j=0,\quad 1\leq j\leq r,$$

$$(\operatorname{ad}e_p\operatorname{ad}e_i)e_j=\sum_{k,l=1}^{r}C_{ij}^kC_{pk}^l e_l,\ r+1\leq j\leq n.$$

这证明了 $\operatorname{tr}\operatorname{ad}e_p\operatorname{ad}e_i=0$, 所以 Killing 型 $B(\mathfrak{L},\mathfrak{S})=0$. 这与假设复李代数 $\mathfrak{L}$ 上的 Killing 型非退化矛盾. 所以复李代数 $\mathfrak{L}$ 半单. 定理证完.

利用定理 1.2.14, 我们有

定理 1.2.15 复半单李代数的微分必为内微分.

证 任取复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的微分 D. 由引理 1.1.29, 内微分代数 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{L}$ 为微分代数 $\mathrm{Der}\,(\mathfrak{L})$ 的理想. 另一方面, 复半单李代数的中心为零, 所以伴随表示 $\mathfrak{L} \to \mathrm{ad}\,\mathfrak{L}$ 为复半单李代数的到上的同构. 这证明了线性李代数 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{L}$ 复半单.

记 B_0 为复李代数 $\mathrm{Der}\,(\mathfrak{L})$ 的 Killing 型. 于是, $\mathrm{Der}\,(\mathfrak{L})$ 的理想 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{L}$ 的正交补 $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{\perp}$ 仍为微分代数 $\mathrm{Der}\,(\mathfrak{L})$ 的理想. 由于 B_0 限制在理想 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{L}$ 上为内微分代数 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{L}$ 的 Killing 型, 而 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{L}$ 复半单, 由定理 1.2.14 可知 B_0 限制在 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{L}$ 上非退化, 这蕴含了 $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L}) \cap (\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{\perp} = 0$. 因此任取 $D \in (\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{\perp}$, 则 $[\mathrm{ad}\,x, D] = -\mathrm{ad}\,(Dx) \in (\mathrm{ad}\,\mathfrak{L}) \cap (\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{\perp} = 0$, 即 $\mathrm{ad}\,Dx = 0$. 所以证明了 $Dx = 0$, $\forall\ x \in \mathfrak{L}$, 即 $D = 0$. 这证明了 $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{\perp} = 0$. 由线性代数理论可知, 若 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{L} \neq \mathrm{Der}\,(\mathfrak{L})$, 则 $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{\perp} \neq 0$. 因此证明了 $\mathrm{Der}\,(\mathfrak{L}) = \mathrm{ad}\,\mathfrak{L}$. 定理证完.

为了进一步讨论复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数的性质, 我们引进 Jordan 分解如下:

定义 1.2.16 设 V 为域 F 上的线性空间. V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 称为 **幂零线性变换**, 如果存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得 $\mathcal{A}^m = 0$. 称为 **半单线性变换**, 如果它的方阵表示在域 F 的代数闭包上相似于对角形, 即初等因子都是一次多项式.

引理 1.2.17(Jordan 分解) 记 $\mathcal{A}$ 为复线性空间 V 上的线性变换, 则存在线性空间 V 上的半单线性变换 $\mathcal{S}$ 及幂零线性变换 $\mathcal{N}$, 使得

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} + \mathcal{N},$$

且在条件 $\mathcal{S}\mathcal{N} = \mathcal{N}\mathcal{S}$ 下分解唯一, 这时 $\mathcal{S}$ 及 $\mathcal{N}$ 都是线性变换 $\mathcal{A}$ 的常数项为零的多项式.

证明可见参考文献 [43], 393—396 页, 定理 13.3.12. 利用 Jordan 分解, 我们有

定理 1.2.18 设 V 为域 F 上的线性空间, $\mathrm{gl}\,(V)$ 为一般线性李代数. 任取 $\mathcal{A} \in \mathrm{gl}\,(V)$. 记 $\mathcal{A} = \mathcal{S} + \mathcal{N}$ 为线性变换 $\mathcal{A}$ 的 Jordan

分解，其中 $\mathcal{S}$ 半单， $\mathcal{N}$ 幂零，且 $\mathcal{S}\mathcal{N}=\mathcal{N}\mathcal{S}$, 则

$$\operatorname{ad}\mathcal{A}=\operatorname{ad}\mathcal{S}+\operatorname{ad}\mathcal{N}$$

为线性李代数 $\mathrm{gl}(V)$ 上的线性变换 $\operatorname{ad}\mathcal{A}$ 的 Jordan 分解，其中 $\operatorname{ad}\mathcal{S}$ 半单， $\operatorname{ad}\mathcal{N}$ 幂零.

证 今由 $\mathcal{A}=\mathcal{S}+\mathcal{N}$ 有 $\operatorname{ad}\mathcal{A}=\operatorname{ad}\mathcal{S}+\operatorname{ad}\mathcal{N}$, 又由

$$[\operatorname{ad}\mathcal{S},\operatorname{ad}\mathcal{N}]=\operatorname{ad}[\mathcal{S},\mathcal{N}]=0,$$

所以只要证明 $\operatorname{ad}\mathcal{S}$ 半单， $\operatorname{ad}\mathcal{N}$ 幂零便证明了引理.

先证 $\operatorname{ad}\mathcal{N}$ 幂零. 事实上，已知 $\mathcal{N}$ 为幂零线性变换，所以存在自然数 p, 使得 $(\mathcal{N})^p=0$. 今任取 $\mathcal{Z}\in\mathrm{gl}(V)$, 由归纳法可证

$$(\operatorname{ad}\mathcal{N})^k\mathcal{Z}=\sum_{i=1}^{k}(-1)^iC_k^i\mathcal{N}^{k-i}\mathcal{Z}\mathcal{N}^i.$$

取 $k=2p$, 所以有 $(\operatorname{ad}\mathcal{N})^{2p}\mathcal{Z}=0,\forall\ \mathcal{Z}\in\mathrm{gl}(V)$. 这证明了 $(\operatorname{ad}\mathcal{N})^{2p}=0$, 即 $\operatorname{ad}\mathcal{N}$ 幂零.

最后证 $\operatorname{ad}\mathcal{S}$ 半单. 为此考虑域 F 的代数闭包 K, 将线性空间 V 作 K 化 V^K. 由于 $\operatorname{ad}\mathcal{S}$ 为线性空间 V^K 上的线性变换，所以我们无妨设域 F 为代数闭域. 由于 $\mathcal{S}$ 半单，所以在线性空间 V 中存在一组基 $e_1,\cdots,e_n$, 使得

$$\mathcal{S}(e_i)=\lambda_ie_i,\quad 1\le i\le n,$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in F$. 另一方面，在线性空间 $\mathrm{gl}(V)$ 中取基 ε_{ij}, $1\le i,j\le n$, 它们定义为

$$\varepsilon_{ij}(e_k)=\delta_{jk}e_i,\quad 1\le i,j,k\le n.$$

为了证明 $\operatorname{ad}\mathcal{S}$ 半单，我们来证 ε_{ij}, $1\le i,j\le n$ 为 $\operatorname{ad}\mathcal{S}$ 的特征向量. 事实上，记 $\mathcal{S}=\sum x_{ij}\varepsilon_{ij}$, 则由 $\mathcal{S}(e_p)=\lambda_pe_p$ 有 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}x_{ij}\varepsilon_{ij}(e_p)=\lambda_pe_p$, 即 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ip}e_i=\lambda_pe_p$. 这证明了 $x_{ip}=\delta_{ip}\lambda_p$. 于是 $\mathcal{S}=\sum\lambda_p\varepsilon_{pp}$.

因此

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\,\mathcal{S})(\varepsilon_{ij}) &= \sum \lambda_p(\mathrm{ad}\,\varepsilon_{pp})(\varepsilon_{ij}) = \sum \lambda_p[\varepsilon_{pp}, \varepsilon_{ij}] \\ &= \sum \lambda_p(\varepsilon_{pp}\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{pp}) = (\lambda_i - \lambda_j)\varepsilon_{ij},\ 1 \le i, j \le n.\end{aligned}$$

这证明了 $\mathrm{ad}\,\mathcal{S}$ 半单. 引理证完.

定理 1.2.19 复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的子代数 $\mathfrak{H}$ 为 Cartan 子代数, 当且仅当 $\mathfrak{H}$ 为 **极大交换子代数**, 且 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 由李代数 $\mathfrak{L}$ 上的半单线性变换构成.

证 设 $\mathfrak{H}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数, 所以 $\mathfrak{H}$ 为极大幂零子代数, 且 $\mathfrak{H}$ 在 $\mathfrak{L}$ 的正规化子 $\mathrm{N}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$. 由定理 1.2.9, 李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 有根子空间分解

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{L}_\alpha,$$

且李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型 $B(x, y)$ 限制在 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 上也非退化. 由 $\mathfrak{H}$ 幂零, 所以 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 幂零, 由 Lie 定理可知, 在李代数 $\mathfrak{L}$ 中存在一组基, 使得 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 的元素可同时表示为上三角方阵, 因此 $\mathrm{ad}\,[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] = [\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}, \mathrm{ad}\,\mathfrak{H}]$ 的元素可同时表示为对角元素为零的上三角方阵. 于是 $B([\mathfrak{H}, \mathfrak{H}], \mathfrak{H}) = \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}\,[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]\mathrm{ad}\,\mathfrak{H} = 0$. 但是李代数 $\mathfrak{L}$ 上的 Killing 型在 $\mathfrak{H}$ 上非退化, 这推出 $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] = 0$. 所以 $\mathfrak{H}$ 为交换子代数. 再由 $\mathfrak{H}$ 为极大幂零子代数, 可知 $\mathfrak{H}$ 为极大交换子代数.

现在来证明 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 的元素都半单. 任取 $h \in \mathfrak{H}$, 考虑线性变换 $\mathrm{ad}\,h$. 今在 $\mathfrak{H}$ 中取基, 再任取 $\alpha \in \Delta$, 在 $\mathfrak{L}_\alpha$ 中取基, 可使 $\mathrm{ad}\,h$ 在 $\mathfrak{L}$ 上对应 Jordan 标准形, 在 $\mathfrak{L}_\alpha$ 上的对应 Jordan 块. 而 Jordan 分解的存在性证明, 就是用 Jordan 标准形的对角元素来决定半单线性变换 $\mathcal{S}$ 的, 所以对 $\mathrm{ad}\,h$ 的 Jordan 分解 $\mathrm{ad}\,h = \mathcal{S} + \mathcal{N}$, 其中 $\mathcal{S}$ 半单, $\mathcal{N}$ 幂零, 则有

$$\mathcal{S}(\mathfrak{H}) = 0, \quad \mathcal{S}(x_\alpha) = \alpha(h)x_\alpha, \quad \forall\ \alpha \in \Delta.$$

由直接计算可以验证 $\mathcal{S}([x, y]) = [\mathcal{S}(x), y] + [x, \mathcal{S}(y)]$, $\forall\ x, y \in \mathfrak{L}$, 所以 $\mathcal{S}$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的微分. 由定理 1.2.15, 存在 $x_0 \in \mathfrak{L}$, 使得 $\mathcal{S} =$

$\operatorname{ad} x_0$. 再由 $\mathcal{S}(\mathfrak{H})=0$, 有 $[x_0,\mathfrak{H}]=\{0\}\subset\mathfrak{H}$, 所以 $x_0\in \mathrm{N}(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$. 因此 $\mathcal{N}=\operatorname{ad}(h)-\mathcal{S}=\operatorname{ad}(h-x_0)\in\operatorname{ad}\mathfrak{H}$, 即 $\mathcal{N}$ 为 $\operatorname{ad}\mathfrak{H}$ 的幂零元素. 所以在 $\mathfrak{H}$ 中存在基, 使得 $\mathcal{N}$ 对应对角元素为零的上三角方阵. 于是 $B(h-x_0,\mathfrak{H})=\operatorname{tr}\operatorname{ad}(h-x_0)\operatorname{ad}\mathfrak{H}=0$. 由 Killing 型 B 在 $\mathfrak{H}$ 上非退化便证明了 $h-x_0=0$. 所以 $\mathcal{S}=\operatorname{ad}x_0=\operatorname{ad}h$, 即 $\operatorname{ad}\mathfrak{H}$ 的元素都是半单元素. 至此证明了充分性.

下面证必要性. 设 $\mathfrak{H}$ 为复半单李代数的极大交换子代数, 且 $\operatorname{ad}\mathfrak{H}$ 的元素都半单. 今由 $[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]=0$, 所以 $[\operatorname{ad}\mathfrak{H},\operatorname{ad}\mathfrak{H}]=0$, 即 $\operatorname{ad}\mathfrak{H}$ 由两两可交换的半单线性变换构成. 所以在李代数 $\mathfrak{L}$ 中存在一组基, 使得 $\operatorname{ad}\mathfrak{H}$ 的方阵表示都是对角方阵. 因此李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 $\operatorname{ad}\mathfrak{H}$ 有根子空间分解

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_0+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{L}_\alpha,$$

其中 Δ 为 $\mathfrak{H}$ 上的非零线性函数集. 又

$$\mathfrak{L}_\beta=\{x\in\mathfrak{L}\mid [h,x]=\beta(h)x,\ \forall h\in\mathfrak{H}\},\ \forall\beta\in\Delta\cup\{0\}.$$

特别地, $[\mathfrak{H},\mathfrak{L}_0]=0$, 由 $\mathfrak{H}$ 交换可知 $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{L}_0$. 我们来证 $\mathfrak{L}_0=\mathfrak{H}$. 事实上, 由 $\mathfrak{L}_0=\{x\in\mathfrak{L}\mid[h,x]=0,\ \forall\ h\in\mathfrak{H}\}=\mathrm{C}(\mathfrak{H})$, 若 $\mathfrak{L}_0\neq\mathfrak{H}$, 任取 $x\in\mathfrak{L}_0, x\notin\mathfrak{H}$, 则 $\mathfrak{H}$ 及 x_0 生成 $\dim\mathfrak{H}+1$ 维交换子代数. 这和 $\mathfrak{H}$ 的极大交换性矛盾. 所以证明了 $\mathfrak{L}_0=\mathfrak{H}$.

再证 $\mathfrak{H}$ 的正规化子 $\mathrm{N}(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$. 事实上, 任取 $x\in\mathrm{N}(\mathfrak{H})$, 则有 $[x,\mathfrak{H}]\subset\mathfrak{H}$. 令 $x=\sum\limits_{\beta\in\Delta\cup\{0\}}x_\beta$, 其中 $x_\beta\in\mathfrak{L}_\beta$. 于是 $[h,x]=\sum\limits_{\beta\in\Delta\cup\{0\}}\beta(h)x_\beta$, $\forall\ h\in\mathfrak{H}$. 由 $[h,x]\in\mathfrak{H}$ 便证明了 $\beta(h)x_\beta=0$, $\forall\ \beta\in\Delta$. 注意到 $\beta(h)$ 只与 $h\in\mathfrak{H}$ 有关, 与 x_β 无关. 今 $\beta\neq0$, 所以存在 $h\in\mathfrak{H}$, 使得 $\beta(h)\neq0$. 因此证明了 $x_\beta=0$, $\forall\ \beta\in\Delta$. 所以由 $x\in\mathrm{N}(\mathfrak{H})$ 推出 $x=x_0$. 这证明了 $\mathrm{N}(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$.

另一方面, 注意到 Cartan 子代数的定义中, 极大幂零条件蕴含在幂零性及正规化子的条件中, 而交换必幂零. 至此证明了子代数 $\mathfrak{H}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数. 定理证完.

现在在复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 中取定 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$. 由定理 1.2.9, 所以李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 有根子空间分解

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{L}_\alpha, \tag{1.2.1}$$

它有

$$[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] = 0, \quad [\mathfrak{H}, \mathfrak{L}_\alpha] \subset \mathfrak{L}_\alpha, \ \forall\ \alpha \in \Delta, \tag{1.2.2}$$

$$[\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_\beta] \subset \mathfrak{L}_{\alpha+\beta}, \ \forall\ \alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta, \tag{1.2.3}$$

$$[\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{H}, \ \text{当}\ \alpha,\ -\alpha \in \Delta, \tag{1.2.4}$$

$$[\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_\beta] = 0, \ \forall\ \alpha, \beta \in \Delta, \alpha+\beta \notin \Delta \cup \{0\}. \tag{1.2.5}$$

且对 Killing 型 $B(x,y)$, 有

$$B(\mathfrak{H}, \mathfrak{L}_\alpha) = 0, \quad \forall\ \alpha \in \Delta, \tag{1.2.6}$$

$$B(\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_\beta) = 0, \quad \forall\ \alpha, \beta \in \Delta, \quad \alpha+\beta \neq 0. \tag{1.2.7}$$

由定理 1.2.19 有

$$\mathfrak{L}_\alpha = \{x \in \mathfrak{L} | \ [h, x] = \alpha(h)x, \ \forall h \in \mathfrak{H}\} \ \alpha \in \Delta. \tag{1.2.8}$$

另一方面, 由于 Killing 型 $B(x,y)$ 不仅在复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 上非退化, 且限制在 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 上也非退化. 令 Δ 为 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 上的有限多个非零线性函数构成的集合. 任取 $\alpha \in \Delta$, 则唯一存在元素 $h_\alpha \in \mathfrak{H}$, 使得

$$B(h_\alpha, h) = \alpha(h), \quad \forall h \in \mathfrak{H}. \tag{1.2.9}$$

记 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的有限子集

$$h_\Delta = \{h_\alpha \mid \forall \alpha \in \Delta\}. \tag{1.2.10}$$

显然有 Δ 到 h_Δ 上的一一对应

$$\alpha \to h_\alpha, \quad \forall\ \alpha \in \Delta. \tag{1.2.11}$$

按照上面的符号, 我们有

引理 1.2.20

(1)
$$-\Delta = \Delta; \tag{1.2.12}$$

(2)
$$[x_\alpha, x_{-\alpha}] = B(x_\alpha, x_{-\alpha})h_\alpha, \forall\ x_{\pm\alpha} \in \mathfrak{L}_{\pm\alpha},\ \alpha \in \Delta; \tag{1.2.13}$$

(3) 任取 $0 \neq x_\alpha \in \mathfrak{L}_\alpha$, 存在 $x_{-\alpha} \in \mathfrak{L}_{-\alpha}$, 使得
$$B(x_\alpha, x_{-\alpha}) = 1, \quad \forall\ \alpha \in \Delta; \tag{1.2.14}$$

(4)
$$h_{-\alpha} = -h_\alpha, \quad \forall\ \alpha \in \Delta, \tag{1.2.15}$$
且集合 h_Δ 复线性生成 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$;

(5)
$$B(h_\alpha, h_\alpha) \neq 0, \quad \forall\ \alpha \in \Delta; \tag{1.2.16}$$

(6)
$$\dim \mathfrak{L}_\alpha = 1, \quad \forall\ \alpha \in \Delta; \tag{1.2.17}$$

(7) 设 k 为非零整数, 且 $\alpha, k\alpha \in \Delta$, 则有 $k = 1$ 或 $k = -1$.

证 下面我们依次来证明上面的性质.

(1) 任取 $\alpha \in \Delta, 0 \neq x_\alpha \in \mathfrak{L}_\alpha$. 任取 $y \in \mathfrak{L}$. 由式 (1.2.1) 有 $y = h + \sum\limits_{\beta\in\Delta} y_\beta$, 其中 $h \in \mathfrak{H}, y_\beta \in \mathfrak{L}_\beta, \forall\ \beta \in \Delta$. 由式 (1.2.6) 和 (1.2.7) 有 $B(x_\alpha, y) = 0$ 当 $-\alpha \notin \Delta$ 时成立. 这时, $x_\alpha \in \ker(B) = 0$. 所以导出矛盾, 因此证明了 $-\alpha \in \Delta$. 即式 (1.2.12) 成立.

(2) 任取 $\alpha \in \Delta$, $x_{\pm\alpha} \in \mathfrak{L}_{\pm\alpha}$. 于是 $[x_\alpha, x_{-\alpha}] \in [\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{H}$. 因此任取 $h \in \mathfrak{H}$, 由式 (1.2.8) 和 (1.2.9), 有
$$\begin{aligned} B(h, [x_\alpha, x_{-\alpha}]) &= B([h, x_\alpha], x_{-\alpha}) = \alpha(h)B(x_\alpha, x_{-\alpha}) \\ &= B(h, h_\alpha)B(x_\alpha, x_{-\alpha}) = B(h, B(x_\alpha, x_{-\alpha})h_\alpha). \end{aligned}$$

这证明了 $B(\mathfrak{H}, ([x_\alpha, x_{-\alpha}] - B(x_\alpha, x_{-\alpha})h_\alpha)) = 0$, 所以式 (1.2.13) 成立.

(3) 任意取定 $0 \neq x_\alpha \in \mathfrak{L}_\alpha$, 若 $B(x_\alpha, \mathfrak{L}_{-\alpha}) = 0$, 则由式 (1.2.6) 和 (1.2.7) 可知 $B(x_\alpha, \mathfrak{L}) = 0$, 因此 $x_\alpha \in \ker(B) = 0$. 这导出矛盾. 于是存在 $y_{-\alpha} \in \mathfrak{L}_{-\alpha}$, 使得 $B(x_\alpha, y_{-\alpha}) \neq 0$. 取 $x_{-\alpha} = B(x_\alpha, y_{-\alpha})^{-1} y_{-\alpha} \in \mathfrak{L}_{-\alpha}$, 则有 $B(x_\alpha, x_{-\alpha}) = 1$. 这证明了式 (1.2.14) 成立.

(4) 由 h_Δ 的定义可知

$$B(h_\alpha, h) = \alpha(h), \quad B(h_{-\alpha}, h) = -\alpha(h), \ \forall \ h \in \mathfrak{H},$$

这证明了 $B(h_\alpha + h_{-\alpha}, \mathfrak{H}) = 0$. 所以 $h_{-\alpha} = -h_\alpha$, 即式 (1.2.15) 成立. 余下证 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的有限子集 h_Δ 复线性生成 $\mathfrak{H}$. 事实上, 若复线性生成 $\mathfrak{H}' \subset \mathfrak{H}, \mathfrak{H}' \neq \mathfrak{H}$. 由于 Killing 型 B 在 $\mathfrak{H}$ 上非退化, 所以 $\mathfrak{H}'$ 在 $\mathfrak{H}$ 中的正交补 $(\mathfrak{H}')^\perp \neq 0$. 任取 $h_0 \in (\mathfrak{H}')^\perp$, 则有 $B(h_\alpha, h_0) = 0, \ \forall \ \alpha \in \Delta$. 因此 $\alpha(h_0) = 0, \ \forall \ \alpha \in \Delta$. 所以 $(\mathrm{ad}\, h_0)\mathfrak{L}_\alpha = 0, \ \forall \ \alpha \in \Delta$. 由 $(\mathrm{ad}\, h_0)\mathfrak{H} = 0$ 可知 $(\mathrm{ad}\, h_0)\mathfrak{L} = [h_0, \mathfrak{L}] = 0$, 即证明了复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的中心有非零元素. 但是 $\mathfrak{L}$ 的根基为零, 这导出矛盾. 所以证明了子集 h_Δ 复线性生成 $\mathfrak{H}$.

(5) 今任取 $\alpha, \beta \in \Delta$, 则在 $\Delta \cup \{0\}$ 中有 **根链**

$$\beta - p\alpha, \cdots, \beta - \alpha, \alpha, \beta + \alpha, \cdots, \beta + q\alpha, \tag{1.2.18}$$

其中 p, q 为非负整数, 又

$$\beta - (p+1)\alpha, \ \beta + (q+1)\alpha \notin \Delta \cup \{0\}.$$

和定理 1.2.13 一样证明, 我们有

$$\beta(x) = m_{\alpha\beta}\alpha(x), \quad \forall \ x \in [\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_{-\alpha}], \tag{1.2.19}$$

其中

$$m_{\alpha\beta} = -\frac{\sum\limits_{j=-p}^{q} j\dim \mathfrak{L}_{\beta+j\alpha}}{\sum\limits_{j=-p}^{q} \dim \mathfrak{L}_{\beta+j\alpha}}. \tag{1.2.20}$$

由性质 (3), 存在 $x_{\pm\alpha} \in \mathfrak{L}_{\pm\alpha}$, 使得 $B(x_\alpha, x_{-\alpha}) = 1$. 由性质 (2), 有 $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$. 因此取 $x = h_\alpha$, 则有

$$\beta(h_\alpha) = \beta([x_\alpha, x_{-\alpha}]) = m_{\alpha\beta}\alpha(h_\alpha) = m_{\alpha\beta}B(h_\alpha, h_\alpha).$$

设若 $B(h_\alpha, h_\alpha) = 0$, 则 $\beta(h_\alpha) = B(h_\alpha, h_\beta) = 0, \ \forall \ \beta \in \Delta$. 因此 $B(h_\alpha, h_\Delta) = 0$. 由性质 (4) 有 $B(h_\alpha, \mathfrak{H}) = 0$. 这和 Killing 型 B 在 $\mathfrak{H}$ 上非退化矛盾. 所以式 (1.2.16) 成立.

(6) 现在来证 $\dim \mathfrak{L}_\alpha = 1,\ \forall\ \alpha \in \Delta$.

由式 (1.2.13) 及式 (1.2.14), 存在 $e_{\pm\alpha} \in \mathfrak{L}_{\pm\alpha}$, 使得

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = B(e_\alpha, e_{-\alpha})h_\alpha = h_\alpha, \quad \forall\ \alpha \in \Delta. \tag{1.2.21}$$

构造复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的子空间

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{G}_{-\alpha} + \mathfrak{H} + \mathfrak{L}_\alpha + \mathfrak{L}_{2\alpha} + \cdots,$$

其中 $\mathfrak{G}_{-\alpha}$ 是由 $e_{-\alpha}$ 线性生成的一维子空间, 显然 $(\mathrm{ad}\, e_{-\alpha})\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$, $(\mathrm{ad}\, e_\alpha)\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$, 所以 $(\mathrm{ad}\, h_\alpha)\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$. 于是

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{M}} \mathrm{ad}\, h_\alpha = \mathrm{tr}_{\mathfrak{M}} \mathrm{ad}\, [e_\alpha, e_{-\alpha}] = \mathrm{tr}_{\mathfrak{M}} [\mathrm{ad}\, e_\alpha, \mathrm{ad}\, e_{-\alpha}] = 0.$$

由 $[h_\alpha, e_{-\alpha}] = -\alpha(h_\alpha)e_{-\alpha}$ 可知

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{M}} \mathrm{ad}\, h_\alpha = -\alpha(h_\alpha) + \alpha(h_\alpha)\dim \mathfrak{L}_\alpha + 2\alpha(h_\alpha)\dim \mathfrak{L}_{2\alpha} + \cdots.$$

由式 (1.2.16) 有 $\alpha(h_\alpha) = B(h_\alpha, h_\alpha) \neq 0$, 所以证明了

$$\sum_{j\geq 1} j\dim \mathfrak{L}_{j\alpha} = 1.$$

这证明了 $\dim \mathfrak{L}_\alpha = 1$, 又 $\dim \mathfrak{L}_{j\alpha} = 0, j > 1$, 即 $j\alpha \notin \Delta, j > 1$. 由 α 任取, 所以 $\dim \mathfrak{L}_\alpha = 1$, 又 $\dim \mathfrak{L}_{-j\alpha} = 0, j > 1$, 即 $-j\alpha \notin \Delta, j > 1$. 至此证明了式 (1.2.17) 成立, 且证明了 (7): $k\alpha \in \Delta, k \neq 0$, 则 $k = 1$ 或 $k = -1$. 引理证完.

本书作如下的符号约定: 有时元素 $h_\alpha \in \mathfrak{H}$ 记作 α. 所以有时 $\alpha \in \mathfrak{H}$, 有时 $\alpha \in \mathfrak{H}^*$. 这里, $\mathfrak{H}^*$ 是线性空间 $\mathfrak{H}$ 上的所有线性函数构成的线性空间, 称为线性空间 $\mathfrak{H}$ 的 **对偶空间**.

引理 1.2.21 符号同上. 任取 $\alpha \in \Delta, \beta \in \Delta \cup \{0\}$, 有 $\Delta \cup \{0\}$ 中的 **根链**

$$\beta - p_{\beta\alpha}\alpha, \cdots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \cdots, \beta + q_{\beta\alpha}\alpha, \tag{1.2.22}$$

其中 $p_{\beta\alpha}, q_{\beta\alpha}$ 为非负整数, $\beta - (p_{\beta\alpha}+1)\alpha, \beta + (q_{\beta\alpha}+1)\alpha \notin \Delta \cup \{0\}$, 则

$$\frac{2B(\beta,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)} = p_{\beta\alpha} - q_{\beta\alpha}, \tag{1.2.23}$$

且 $\beta+k\alpha\notin\Delta\cup\{0\}$, 其中 $k>q_{\beta\alpha}$ 或 $k<-p_{\beta\alpha}$.

证 记 $\mathfrak{L}_0=\mathfrak{H}$, 构造复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的子空间

$$\mathfrak{M}=\sum_{k=-p_{\beta\alpha}}^{q_{\beta\alpha}}\mathfrak{L}_{\beta+k\alpha}.$$

取 $\mathfrak{L}_{\pm\alpha}$ 的基元素 $e_{\pm\alpha}$, 使得

$$[e_\alpha,e_{-\alpha}]=B(e_\alpha,e_{-\alpha})\alpha=\alpha.$$

由式 (1.2.17)—(1.2.20) 有

$$\beta(\alpha)=-\frac{\sum\limits_{j=-p_{\beta\alpha}}^{q_{\beta\alpha}}j\dim\mathfrak{L}_{\beta+j\alpha}}{\sum\limits_{j=-p_{\beta\alpha}}^{q_{\beta\alpha}}\dim\mathfrak{L}_{\beta+j\alpha}}\alpha(\alpha),\quad\forall\,\beta\in\Delta.$$

若 $\beta+j\alpha\in\Delta$, $-p_{\beta\alpha}\le j\le q_{\beta\alpha}$, 则 $\dim\mathfrak{L}_{\beta+j\alpha}=1$. 于是 $\beta(\alpha)=\frac{1}{2}(p_{\beta\alpha}-q_{\beta\alpha})\alpha(\alpha)$, 即式 (1.2.23) 成立. 若存在

$$j\in\{-p_{\beta\alpha},\cdots,-1,0,1,\cdots,q_{\beta\alpha}\},$$

使得 $\beta+j\alpha=0$, 于是 $\beta=-j\alpha$. 由引理 1.2.20 的 (7) 可知 $j=1$ 或 $j=-1$. 所以当 $\beta=\alpha$ 时, 根链只有 $\alpha-2\alpha,\alpha-\alpha,\alpha$, 即 $q_{\alpha\alpha}=0$, $p_{\alpha\alpha}=2$. 而 $p_{\alpha\alpha}-q_{\alpha\alpha}=2$, 所以式 (1.2.23) 也成立. 当 $\beta=-\alpha$ 时, 根链只有 $-\alpha,-\alpha+\alpha,-\alpha+2\alpha$, 即 $p_{-\alpha,\alpha}=0$, $q_{-\alpha\alpha}=2$. 而 $p_{-\alpha,\alpha}-q_{-\alpha,\alpha}=-2$, $\dfrac{2B(\alpha,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)}=-2$. 所以式 (1.2.23) 也成立. 这证明了前一断言.

现在证后一断言. 令

$$\begin{aligned}&\beta+(q_{\beta\alpha}+1)\alpha,\cdots,\beta+(q_{\beta\alpha}+r)\alpha\notin\Delta\cup\{0\},\\&\beta+(q_{\beta\alpha}+r+1)\alpha,\cdots,\beta+(q_{\beta\alpha}+r+s)\alpha\in\Delta\cup\{0\},\end{aligned}$$

且 $\beta+(q_{\beta\alpha}+r+s+1)\alpha\notin\Delta\cup\{0\}$. 取 $\widetilde{\beta}=\beta+(q_{\beta\alpha}+r+1)\alpha$, 则有

$$2B(\widetilde{\beta},\alpha)=-(s-1)B(\alpha,\alpha).$$

代入有

$$\begin{aligned}2B(\beta,\alpha) &= -(s-1)B(\alpha,\alpha)-2(q_{\beta\alpha}+r+1)B(\alpha,\alpha)\\ &= -(2q_{\beta\alpha}+2r+s+1)B(\alpha,\alpha).\end{aligned}$$

这证明了 $p_{\beta\alpha}-q_{\beta\alpha}=-2q_{\beta\alpha}-2r-s-1$. 所以 $p_{\beta\alpha}+q_{\beta\alpha}+2r+s=1$. 因此 $r=0$, 即 $\beta+q_{\beta\alpha}\alpha\notin\Delta\cup\{0\}$. 这和 $q_{\beta\alpha}$ 的选取矛盾. 再 $\beta-(p_{\beta\alpha}+1)\alpha,\cdots,\beta-(p_{\beta\alpha}+r)\alpha\notin\Delta\cup\{0\}$, $\beta-(p_{\beta\alpha}+r+1)\alpha,\cdots,\beta-(p_{\beta\alpha}+r+s)\alpha\in\Delta\cup\{0\}$, $\beta-(p_{\beta\alpha}+r+s+1)\alpha\notin\Delta\cup\{0\}$. 取 $\widetilde{\beta}=\beta-(p_{\beta\alpha}+r+s)\alpha$, 则有 $2B(\widetilde{\beta},\alpha)=-(s-1)B(\alpha,\alpha)$. 由 $\widetilde{\beta}=\alpha-(p_{\beta\alpha}+r+s)\alpha$, 有

$$\begin{aligned}2B(\beta,\alpha) &= -(s-1)B(\alpha,\alpha)+2(p_{\beta\alpha}+r+s)B(\alpha,\alpha)\\ &= (2p_{\beta\alpha}+2r+s+1)B(\alpha,\alpha).\end{aligned}$$

这证明了 $p_{\beta\alpha}-q_{\beta\alpha}=2p_{\beta\alpha}+2r+s+1$, 所以 $p_{\beta\alpha}+q_{\beta\alpha}+2r+s+1=0$. 又推出矛盾. 至此完全证明了引理. 证完.

引理 1.2.22 符号同上. 我们有

(1) $$[\mathfrak{L}_\alpha,\mathfrak{L}_\beta]=\mathfrak{L}_{\alpha+\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta; \tag{1.2.24}$$

(2) $$B(\alpha,\alpha)=4\Big(\sum_{\beta\in\Delta}(p_{\beta\alpha}-q_{\beta\alpha})^2\Big)^{-1},\ \forall\ \alpha\in\Delta; \tag{1.2.25}$$

(3) $$[x_{-\alpha},[x_\alpha,x_\beta]]=\frac{1}{2}q_{\beta\alpha}(p_{\beta\alpha}+1)B(\alpha,\alpha)x_\beta, \tag{1.2.26}$$

其中 $x_{\pm\alpha}\in\mathfrak{L}_{\pm\alpha}, x_\beta\in\mathfrak{L}_\beta,\alpha,\beta\in\Delta$;

(4) 设 $\alpha\in\Delta$, 复数 $c\neq 0$, 若有 $c\alpha\in\Delta$, 则 $c=1$ 或 $c=-1$.

证 (1) 设 $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta$. 由于已知 $\dim\mathfrak{L}_\xi=1$, $\forall\ \xi\in\Delta$, 所以为了证 $[\mathfrak{L}_\alpha,\mathfrak{L}_\beta]=\mathfrak{L}_{\alpha+\beta}$, 只要证 $[\mathfrak{L}_\alpha,\mathfrak{L}_\beta]\neq 0$ 就够了. 设若不然, 即有 $[\mathfrak{L}_\alpha,\mathfrak{L}_\beta]=0$, 考虑根链

$$\beta-p\alpha,\cdots,\beta-\alpha,\beta,\beta+\alpha,\cdots,\beta+q\alpha,$$

其中 $\beta-(p+1)\alpha$, $\beta+(q+1)\alpha\notin\Delta\cup\{0\}$, 所以有 $2B(\beta,\alpha)=(p-q)B(\alpha,\alpha)$. 另一方面, 考虑复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的子空间 $\mathfrak{M}=\sum_{i\leq 0}\mathfrak{L}_{\beta+i\alpha}$. 由 $[\mathfrak{L}_\alpha,\mathfrak{L}_\beta]=0$ 可知 $\operatorname{ad}e_\alpha(\mathfrak{L}_\beta)=0$, $\forall\ e_\alpha\in\mathfrak{L}_\alpha$. 由

式 (1.2.13) 及 (1.2.14), 我们可取 $e_{\pm\alpha} \in \mathfrak{L}_{\pm\alpha}$, 使得 $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = B(e_\alpha, e_{-\alpha})\alpha = \alpha$. 于是有 $(\mathrm{ad}\, e_\alpha)\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$, $(\mathrm{ad}\, e_{-\alpha})\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$. 因此, $(\mathrm{ad}\,\alpha)\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$. 又 $\mathrm{tr}_{\mathfrak{M}}\mathrm{ad}\,\alpha = \mathrm{tr}_{\mathfrak{M}}\mathrm{ad}\,[e_\alpha, e_{-\alpha}] = 0$. 另一方面, $\mathrm{tr}_{\mathfrak{M}}\mathrm{ad}\,\alpha = \sum\limits_{i\le 0}(\beta(\alpha) + i\alpha(\alpha))\dim \mathfrak{L}_{\beta+i\alpha}$. 我们来证当 $i \le 0, \beta + i\alpha \in \Delta$ 时, $\dim \mathfrak{L}_{\beta+i\alpha} = 0$. 事实上, 若 $\beta + i\alpha = 0$, 则 $\beta = -i\alpha$, 所以只有 $i = -1$, 即 $\beta = \alpha$. 但是 $\alpha + \beta \in \Delta$, 这导出矛盾, 所以证明了 $\beta + i\alpha \in \Delta, i = 0, -1, \cdots, -p$. 而 $\sum\limits_{i=0}^{p}(B(\alpha,\beta) - iB(\alpha,\alpha)) = 0$, 即有 $2B(\alpha,\beta) - pB(\alpha,\alpha) = 0$. 但是 $2B(\alpha,\beta) = (p-q)B(\alpha,\alpha)$, 所以 $q = 0$. 这又和 $\beta + \alpha \in \Delta$ 矛盾. 至此证明了式 (1.2.24) 成立.

(2) 为了证式 (1.2.25) 成立, 直接计算

$$B(\alpha,\alpha) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,\alpha)^2 = \sum_{\beta\in\Delta}(\beta(\alpha))^2 = \sum_{\beta\in\Delta} B(\alpha,\beta)^2.$$

由式 (1.2.23), 所以有 $B(\alpha,\alpha) = \dfrac{1}{4}\sum\limits_{\beta\in\Delta}(p_{\beta\alpha} - q_{\beta\alpha})^2 B(\alpha,\alpha)^2$. 由式 (1.2.16), 所以式 (1.2.25) 成立.

(3) 为了证式 (1.2.26), 只要取 $x_{\pm\alpha} \in \mathfrak{L}_{\pm\alpha}$, 使得 $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = B(x_\alpha, x_{-\alpha})\alpha = \alpha$. 于是问题化为证明

$$[x_{-\alpha}, [x_\alpha, x_\beta]] = \frac{1}{2}q(p+1)B(\alpha,\alpha)x_\beta, \tag{1.2.27}$$

其中 $\beta - p\alpha, \cdots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \cdots, \beta + q\alpha \in \Delta \cup \{0\}$, 又有 $\beta - (p+1)\alpha, \beta + (q+1)\alpha \notin \Delta\cup\{0\}$. 于是有 $2B(\beta,\alpha) = (p-q)B(\alpha,\alpha)$.

当 $\beta = \alpha$ 时, 有 $q = 0$, 所以式 (1.2.27) 显然成立. 当 $\beta \ne \alpha$ 时, 在 $\mathfrak{L}_{\beta-p\alpha}$ 中取基 x_0, 作向量序列

$$x_k = (\mathrm{ad}\, x_\alpha)^k x_0 \in \mathfrak{L}_{\beta+(k-p)\alpha}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1.2.28}$$

因此当 $k > p + q$ 时有 $x_k = 0$. 由式 (1.2.24), 我们有 $x_k \ne 0, k = 0, 1, \cdots, p+q$. 下面用归纳法来证明

$$[x_{-\alpha},\ [x_\alpha, x_k]] = \frac{(1+k)(p+q-k)}{2}B(\alpha,\alpha)x_k. \tag{1.2.29}$$

事实上，由 $\beta-(p+1)\alpha \notin \Delta \cup \{0\}$, 所以 $[x_{-\alpha},\ x_0]=0$. 因此

$$\begin{aligned}[x_{-\alpha},\ [x_\alpha, x_0]] &= [[x_{-\alpha}, x_\alpha],\ x_0]+[x_\alpha,\ [x_{-\alpha}, x_0]]\\ &= -[\alpha, x_0] = -(\beta(\alpha)-p\alpha(\alpha))x_0\\ &= (pB(\alpha,\alpha)-B(\alpha,\beta))x_0 = \frac{p+q}{2}B(\alpha,\alpha)x_0.\end{aligned}$$

这证明了当 $k=0$ 时式 (1.2.29) 成立. 设 $k=m$ 时式 (1.2.29) 成立，下面来证 $k=m+1$ 时式 (1.2.29) 成立. 事实上

$$[x_{-\alpha},\ [x_\alpha, x_{m+1}]] = [[x_{-\alpha}, x_\alpha],\ x_{m+1}]+[x_\alpha,\ [x_{-\alpha}, x_{m+1}]].$$

由

$$[x_\alpha, x_{-\alpha}]=\alpha, \quad x_{m+1}\in \mathfrak{L}_{\beta+(m+1-p)\alpha},$$

所以

$$[[x_\alpha, x_{-\alpha}],\ x_{m+1}] = [\alpha, x_{m+1}] = (\beta(\alpha)+(m+1-p)\alpha(\alpha))x_{m+1}.$$

将 $2\beta(\alpha)=2B(\alpha,\beta)=(p-q)B(\alpha,\alpha)$ 代入，有

$$[[x_\alpha, x_{-\alpha}],\ x_{m+1}] = (m+1-\frac{p+q}{2})B(\alpha,\alpha)x_{m+1}.$$

又由式 (1.2.28) 及归纳法假设，有

$$\begin{aligned}[x_\alpha,\ [x_{-\alpha}, x_{m+1}]] &= [x_\alpha,\ [x_{-\alpha},\ [x_\alpha, x_m]]]\\ &= \frac{(m+1)(p+q-m)}{2}B(\alpha,\alpha)[x_\alpha, x_m].\end{aligned}$$

因此

$$[x_{-\alpha},\ [x_\alpha, x_{m+1}]] = \frac{(m+2)(p+q-m-1)}{2}B(\alpha,\alpha)x_{m+1}.$$

由归纳法便证明了式 (1.2.29) 成立.

特别地，取 $k=p$, 则 $x_p \in \mathfrak{L}_\beta$, 改记 x_p 为 x_β, 则有

$$[x_{-\alpha},\ [x_\alpha, x_\beta]] = \frac{(1+p)q}{2}B(\alpha,\alpha)x_\beta.$$

即式 (1.2.26) 成立.

(4) 设 $c \neq 0$ 为复数, 且 $\alpha, c\alpha \in \Delta$. 取 $\beta = c\alpha$, 作根链 $(c-p)\alpha, \cdots, (c-1)\alpha, \alpha, (c+1)\alpha, \cdots, (c+q)\alpha$, 其中 $(c-p-1)\alpha, (c+q+1)\alpha \notin \Delta \cup \{0\}$. 于是有 $2B(c\alpha, \alpha) = (p-q)B(\alpha, \alpha)$. 又 $B(\alpha, \alpha) \neq 0$. 因此证明了 $c = \dfrac{p-q}{2}$, 即 c 为整数或为半整数. 由引理 1.2.20 的 (7) 可知, 当 c 为整数时, 由 $c \neq 0$ 可知 $c = 1$ 或 $c = -1$; 当 c 为半整数时, 记作 $c = \dfrac{1}{2} + m$, 其中 m 为整数. 由 $c = \dfrac{p-q}{2}$ 可知根链可改写为

$$-\frac{p+q}{2}\alpha, \cdots, \frac{p+q}{2}\alpha,$$

而 $p+q$ 为奇数. 这说明了 $\dfrac{1}{2}\alpha \in \Delta$ 或 $-\dfrac{1}{2}\alpha \in \Delta$. 而 $2(\dfrac{1}{2}\alpha) = \alpha$. 由引理 1.2.20 的 (7) 又推出矛盾. 至此证明了 c 必须为 1 或 -1. 引理全部证完.

定理 1.2.23 记 $\mathfrak{H}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数, 且

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{L}_\alpha$$

为根子空间分解, 其中 Δ 为根系. 则 Δ 实线性生成复线性空间 $\mathfrak{H}$ 的实线性子空间 $\mathfrak{H}_R$. $\mathfrak{H}_R$ 有性质

(1) 复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型 $B(x,y)$ 限制在实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 上为内积;

(2) 根系 Δ 的元素 (为复线性空间 $\mathfrak{H}$ 上的线性函数) 限制在实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 上为实线性函数;

(3) 实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 的复化 $\mathfrak{H}_R^C = \mathfrak{H}$.

证 由式 (1.2.23) 和 (1.2.25) 可知, 任取 $\alpha, \beta \in \Delta$, 则 $B(\alpha, \beta)$ 为有理数, 这证明了复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型 $B(x,y)$ 限制在实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 上为实对称双线性函数. 我们来证它正定, 事实上, 任取实数 $\lambda_\alpha, \forall \alpha \in \Delta$, 使得 $h = \sum \lambda_\alpha \alpha \neq 0$. 由 $h \in \mathfrak{H}$, 有

$$B(h,h) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} h)^2 = \sum_{\beta \in \Delta} B(h,\beta)^2 = \sum_{\beta \in \Delta} (\sum_{\alpha \in \Delta} \lambda_\alpha B(\alpha, \beta))^2 \geq 0,$$

且 $B(h,h)=0$, 则 $\sum\limits_{\alpha\in\Delta}\lambda_\alpha B(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in\Delta$. 由引理 1.2.20 的 (4) 可知 $B(\sum\limits_{\alpha\in\Delta}\lambda_\alpha\alpha,\mathfrak{H})=0$. 但是 Killing 型在 $\mathfrak{H}$ 上非退化，所以 $h=\sum\limits_{\alpha\in\Delta}\lambda_\alpha\alpha=0$. 这证明了 $B(h,h)$ 在实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 上为内积. 所以 (1) 成立.

令 $h\in\mathfrak{H}_R$, 所以 $h=\sum\lambda_\beta\beta$, 其中 $\lambda_\beta\in\mathbb{R},\forall\beta\in\Delta$. 今任取 $\alpha\in\Delta$, 则 $\alpha(h)=\sum\lambda_\beta\alpha(\beta)=\sum\lambda_\beta B(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}$. 所以证明了 Δ 的元素限制在实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 上为实线性函数，即 (2) 成立.

最后证实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 的复化为 Cartan 子代数. 事实上，由于 Δ 为 $\mathfrak{H}_R$ 的实线性生成元素，由引理 1.2.20 的 (4) 可知 Δ 复线性生成 $\mathfrak{H}$. 这证明了 $\mathfrak{H}_R$ 复线性生成 $\mathfrak{H}$, 即有 $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_R+\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R\neq 0$. 今复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型 $B(x,y)$ 在 $\mathfrak{H}_R$ 上正定，所以在 $\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R$ 上负定. 因此在 $(\mathfrak{H}_R)\cap(\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R)$ 上既正定，也负定，所以等于零. 这证明了 $\mathfrak{H}_R\cap\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R=0$. 所以实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 的复化 $\mathfrak{H}_R^{\mathbb{C}}=\mathfrak{H}$. 定理证完.

现在在实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 中引进一种序如下：在 $\mathfrak{H}_R$ 中取定一组基 $e_1,\cdots,e_n$. $\mathfrak{H}_R$ 的元素 $h=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ie_i$, 其中 $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=0$, $\lambda_{r+1}>0$, 则称 h 为正元素，即 $h>0$. 显然，它有性质

(1) 任取两向量 $h,h'\in\mathfrak{H}_R$, 定义 $h>h'$ 为 $h-h'>0$. 于是 $\mathfrak{H}_R$ 中任两向量 $h,h'\in\mathfrak{H}_R$, 有 $h>h'$ 或 $h=h'$ 或 $h'>h$;

(2) 设 $h,h',h''\in\mathfrak{H}_R$, 且 $h>h',h'>h''$, 则有 $h>h''$;

(3) 设 $h,h',g,g'\in\mathfrak{H}_R$, 且 $h>h'$, $g>g'$, 则有 $h+g>h'+g'$;

(4) 设 $h,h'\in\mathfrak{H}_R$, $\lambda\in\mathbb{R}$ 且 $\lambda>0$, 则由 $h>h'$ 有 $\lambda h>\lambda h'$.

这样一来，我们在实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 中引进了一个序. 显然，这个序与基底的选取有关.

由于李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型 $B(x,y)$ 限制在实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 上为内积，于是可考虑 $\mathfrak{H}_R$ 的共轭空间 $\mathfrak{H}_R^*$. 利用 $\mathfrak{H}_R$ 上的内积 $B(x,y)$, 我们建立线性同构 $f\to h_f$ 使得 $f(h)=B(h,h_f)$, $\forall h\in\mathfrak{H}_R$. 因此对实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 的序，可以定义共轭空间 $\mathfrak{H}_R^*$ 的序，使得 $h_f>h_g$

当且仅当 $f > g$, $\forall f, g \in \mathfrak{H}^*$. 对 $\mathfrak{H}_R^*$ 的这种序，性质 (1)—(4) 仍成立. 利用这个序，在根系 Δ 中可以进行比较. 我们有

定义 1.2.24 假设和符号同上.

(1) 根系 Δ 的元素 α 称为 **正根**, 即 $\alpha > 0$, $(h_\alpha > 0)$. 根系 Δ 的元素 α 称为 **负根**, 即 $\alpha < 0$, $(h_\alpha < 0)$. 根系 Δ 的所有正根构成的子集 Δ^+ 称为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的 **正根系**. 根系 Δ 的所有负根构成的子集 Δ^- 称为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的 **负根系**.

(2) 正根系 Δ^+ 中取出正根 α. α 称为 **单根**, 如果 α 不能表示成两个正根的和. 正根系 Δ^+ 的所有单根构成的子集 Π 称为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的 **单根系**.

由正根系和负根系的定义可知有

$$\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-, \ \Delta^+ \cap \Delta^- = \emptyset, \ -\Delta^+ = \Delta^-. \tag{1.2.30}$$

显然, 正根的定义和次序有关, 从而单根的定义和次序有关, 因此和实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 的基底选取有关.

单根系的重要性在于它刻画了复半单李代数在同构下的全系不变量. 为了证明这一事实, 我们来讨论单根系的性质.

引理 1.2.25 符号同上, 复半单李代数 $\mathfrak{G}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的单根系 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 有性质

(1) 任取 $\alpha, \beta \in \Pi$, 则 $\alpha - \beta \notin \Delta$;

(2) 任取 $\alpha, \beta \in \Pi$, $\alpha \neq \beta$, 则 $\dfrac{2B(\alpha,\beta)}{B(\alpha,\alpha)}$ 为非正整数;

(3) 任取 $\Delta \in \Delta^+$, $\alpha \notin \Pi$, 则存在 $\alpha_i \in \Pi$, 使得 $\alpha - \alpha_i \in \Delta^+$;

(4) 任取 $\alpha \in \Delta^+$, 则存在正根序列

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \cdots + \alpha_{i_s} = \alpha; \tag{1.2.31}$$

特别地, 正根为单根的非负整数线性组合;

(5) 单根系 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 构成实线性空间 $\mathfrak{H}_R^*$ 的一组基, 因此 $\{h_{\alpha_1}, \cdots, h_{\alpha_l}\}$ 构成实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 的一组基.

证 (1) 任取 $\alpha,\beta\in\Pi$. 设若 $\alpha-\beta\in\Delta$, 则 $\beta-\alpha\in\Delta$. 所以我们无妨设 $\delta=\alpha-\beta\in\Delta^+$. 这证明了 $\alpha=\delta+\beta$, 即单根 α 为两个正根 β,δ 的和. 这和单根定义矛盾, 所以证明了 $\alpha-\beta\notin\Delta$, 即 (1) 成立.

(2) 任取 $\alpha,\beta\in\Pi,\alpha\neq\beta$. 由性质 (1) 有 $\beta-\alpha\notin\Delta\cup\{0\}$. 所以有根链 $\beta,\beta+\alpha,\cdots,\beta+q_{\beta\alpha}\alpha$, 而 $\beta-\alpha,\beta+(q_{\beta\alpha}+1)\alpha\notin\Delta\cup\{0\}$, 即 $p_{\beta\alpha}=0$. 由引理 1.2.21 可知

$$\frac{2B(\alpha,\beta)}{B(\alpha,\alpha)}=p_{\beta\alpha}-q_{\beta\alpha}=-q_{\beta\alpha},$$

即为非正整数. 这证明了性质 (2) 成立.

(3) 任取 $\alpha\in\Delta^+,\alpha\notin\Pi$. 我们来证存在 $i\in\{1,2,\cdots,l\}$, 使得 $\alpha-\alpha_i\in\Delta^+$. 设若不然, 则 $\alpha-\alpha_i\notin\Delta^+,1\leq i\leq l$. 于是 α 关于 α_i 的根链有 $p_{\alpha\alpha_i}=0$, 所以

$$2B(\alpha,\alpha_i)=-q_{\alpha\alpha_i}B(\alpha_i,\alpha_i)\leq 0.$$

由于正根系为有限集, 而 α 为正根, 所以 α 是单根 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 的非负整数线性组合 $\alpha=\sum m_i\alpha_i$. 于是有

$$2B(\alpha,\alpha)=2B(\alpha,\sum_{i=1}^{l}m_i\alpha_i)=2\sum_{i=1}^{l}m_iB(\alpha,\alpha_i)\leq 0.$$

由于 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型 B 限制在 $\mathfrak{H}_R$ 上正定. 这证明了 $\alpha=0$, 所以和 $\alpha\in\Delta^+$ 矛盾. 这证明了 (3) 成立.

(4) 由性质 (3), 任取 $\alpha\in\Delta^+$, 若 α 为单根, 记作 α_{i_1} 即有 $\alpha_{i_1}=\alpha$. 若 α 不是单根, 则存在 $i_s\in\{1,2,\cdots,l\}$, 使得 $\alpha,\alpha-\alpha_{i_s}\in\Delta^+$. 因此由归纳法便证明了性质 (4) 成立.

(5) 我们来证单根系 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 为实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 的一组基. 由性质 (4) 可知, 任取 $\alpha\in\Delta$, 则 $\alpha=\sum m_i\alpha_i$, 其中 $m_1,\cdots,m_l$ 同时为非正整数或同时为非负整数. $\mathfrak{H}_R$ 由 Δ 实线性生成. 这证明了 $\mathfrak{H}_R$ 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 实线性生成. 因此, 为了证

$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 为 $\mathfrak{H}_R$ 的一组基，只要证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 实线性无关即可.

设若不然，则存在不全为零的实数 $a_1,\cdots,a_l$ 使得 $\sum a_i\alpha_i=0$. 因为在下面证明中指标的次序并不重要，我们无妨设存在 $1\le r\le l$, 使得

$$a_1>0,\cdots,a_r>0,\quad a_{r+1}<0,\cdots,a_s<0,\quad a_{s+1}=\cdots=a_l=0.$$

所以 $\mathfrak{H}_R$ 中有元素

$$h=\sum_{i=1}^{r}a_i\alpha_i=\sum_{i=r+1}^{s}(-a_i)\alpha_i.$$

今复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型 $B(x,y)$ 有

$$\begin{aligned}0\le B(h,h)&=B(\sum_{i=1}^{r}a_i\alpha_i,\sum_{j=r+1}^{s}(-a_j)\alpha_j)\\&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{s}a_i(-a_j)B(\alpha_i,\alpha_j).\end{aligned}$$

今 $\alpha_i\ne\alpha_j$, 由性质 (2) 可知 $B(\alpha_i,\alpha_j)\le 0$. 这证明了 $B(h,h)=0$, 所以 $h=0$, 即 $h=\sum\limits_{i=1}^{r}a_i\alpha_i=0$. 但是 $\alpha_i\in\Delta^+$, 即 $\alpha_i>0, 1\le i\le r$. 由 $a_1,\cdots,a_r>0$ 可知 $\sum\limits_{i=1}^{r}a_i\alpha_i>0$. 这就导出矛盾. 所以证明了性质 (5). 引理证完.

由 Cartan 子代数的共轭性定理，我们可以引进一种不变量，即关于 Cartan 子代数的单根系的元素个数，称为此**复半单李代数的秩**.

定义 1.2.26 给定复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的单根系 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$, 则 $l\times l$ 实对称方阵

$$\begin{pmatrix}B(\alpha_1,\alpha_1)&\cdots&B(\alpha_1,\alpha_l)\\\vdots&&\vdots\\B(\alpha_l,\alpha_1)&\cdots&B(\alpha_l,\alpha_l)\end{pmatrix}\tag{1.2.32}$$

称为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **Cartan 矩阵**. 它是实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 中关于基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ 的 **Gram 矩阵**.

引理 1.2.27 Cartan 矩阵为实正定对称方阵.

证 由于复半单李代数的 Killing 型 $B(x, y)$ 限制在实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 上为内积, 而单根系的元素构成 $\mathfrak{H}_R$ 的一组基. 所以证明了 Cartan 矩阵正定. 引理证完.

为了证明 Cartan 矩阵为复半单李代数在同构下的全系不变量, 我们来详细讨论乘法表.

设 $\mathfrak{L}$ 为复半单李代数, 取定 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$, 则有根子空间分解

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{L}_\alpha. \tag{1.2.33}$$

由 $\dim \mathfrak{L}_\alpha = 1, \forall \alpha \in \Delta$. 在 $\mathfrak{L}_{\pm\alpha}$ 中取基 $e_{\pm\alpha}$, 使得

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = B(\alpha, -\alpha)c = \alpha. \tag{1.2.34}$$

另外, Cartan 子代数有基 $h_{\alpha_1}, \cdots, h_{\alpha_l}$, 所以有

$$[h_{\alpha_i}, h_{\alpha_j}] = 0, \quad [h_{\alpha_i}, e_\alpha] = \alpha(h_{\alpha_i})e_\alpha = B(\alpha_i, \alpha)e_\alpha, \tag{1.2.35}$$

$$[h_{\alpha_i}, e_{-\alpha}] = -\alpha(h_{\alpha_i})e_{-\alpha} = -B(\alpha_i, \alpha)e_\alpha. \tag{1.2.36}$$

再若 $\alpha, \beta \in \Delta, \alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}$, 则有

$$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta} = 0. \tag{1.2.37}$$

余下为

$$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}, \quad \forall \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta, \tag{1.2.38}$$

其中 $N_{\alpha\beta} \neq 0$. 我们有

引理 1.2.28 符号同上.

(1) $$N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha} = 0, \quad \forall \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta; \tag{1.2.39}$$

(2) $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha}$, $\forall \alpha. \beta, \gamma \in \Delta$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$; (1.2.40)

(3) $$N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta}+N_{\alpha\gamma}N_{\delta\beta}+N_{\alpha\delta}N_{\beta\gamma}=0; \tag{1.2.41}$$
$\forall\,\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Delta,\alpha+\beta+\gamma+\delta=0,\alpha+\beta,\alpha+\gamma,\alpha+\delta\in\Delta$,

(4) $$N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,-\beta}=-\frac{q_{\beta\alpha}(1+p_{\beta\alpha})}{2}B(\alpha,\alpha). \tag{1.2.42}$$

证 由 $[e_\alpha,e_\beta]=-[e_\beta,e_\alpha]$ 可知式 (1.2.39) 成立，再由 $\alpha+\beta+\gamma=0$ 及 Killing 型的不变性，有

$$B([e_\alpha,e_\beta],\ e_\gamma)+B(e_\beta,\ [e_\alpha,e_\gamma])=0.$$

所以 $N_{\alpha\beta}B(e_{-\gamma},e_\gamma)+N_{\alpha\gamma}B(e_\beta,e_{-\beta})=0$, 即有 $N_{\alpha\beta}+N_{\alpha\gamma}=0$. 由性质 (1.2.39) 有 $N_{\alpha\beta}=N_{\gamma\alpha}$, 同理 $N_{\gamma\alpha}=N_{\beta\gamma}$. 这证明了式 (1.2.40) 成立.

由 Jacobi 恒等式，注意到 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 中任三个相加不等于零，所以有

$$[([e_\alpha,e_\beta],\ e_\gamma]+[[e_\gamma,e_\alpha],\ e_\beta]+[[e_\beta,e_\gamma],\ e_\alpha]=0,$$

即有 $N_{\alpha\beta}N_{\alpha+\beta,\gamma}+N_{\gamma\alpha}N_{\alpha+\gamma,\beta}+N_{\beta\gamma}N_{\beta+\gamma,\alpha}=0$. 今记 $\xi=\alpha+\beta\in\Delta,\xi+\gamma+\delta=0$, 由式 (1.2.40), 有 $N_{\alpha+\beta,\gamma}=N_{\gamma\delta}$. 记 $\eta=\alpha+\gamma\in\Delta,\eta+\beta+\delta=0$, 同理 $N_{\alpha+\gamma,\beta}=N_{\beta\delta}$. 最后，记 $\zeta=\alpha+\delta\in\Delta,\zeta+\beta+\gamma=0$, 所以 $N_{\beta+\gamma,\alpha}=N_{-\zeta,\alpha}$. 而 $-\zeta+\alpha+\delta=0$, 所以有 $N_{-\zeta,\alpha}=N_{\alpha\delta}$. 至此证明了式 (1.2.41) 成立.

现在证式 (1.2.42) 成立. 事实上，由式 (1.2.26), 有

$$N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}e_\beta=\frac{1}{2}q_{\beta\alpha}(p_{\beta\alpha}+1)B(\alpha,\alpha)e_\beta.$$

记 $\gamma=\alpha+\beta$, 有 $(-\alpha)+\gamma+(-\beta)=0$. 由式 (1.2.40) 有 $N_{-\alpha,\gamma}=N_{-\beta,-\alpha}$. 因此式 (1.2.42) 成立. 引理证完.

设 $\mathfrak{L}_i$ 是秩为 l 的复半单李代数，$\mathfrak{H}_i$ 为 $\mathfrak{L}_i$ 的 Cartan 子代数. 记 Δ_i 为 $\mathfrak{L}_i$ 关于 $\mathfrak{H}_i$ 的根系，B_i 为 $\mathfrak{L}_i$ 的 Killing 型，$i=1,2$. 记 $\Pi_1=\{\alpha_1^{(1)},\cdots,\alpha_l^{(1)}\}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{H}_1$ 的单根系，$B_1(\alpha_j^{(1)},\alpha_k^{(1)})$ 为 $\mathfrak{H}_1$ 的 Cartan 矩阵. 若存在复半单李代数 $\mathfrak{L}_1$ 到 $\mathfrak{L}_2$ 上的同构 σ. 显然 $\sigma(\mathfrak{H}_1)$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}_2$ 的 Cartan 子代数. 由定理 1.2.12,

复半单李代数的 Cartan 子代数互相共轭，所以无妨设 $\sigma(\mathfrak{H}_1)=\mathfrak{H}_2$. 由根子空间的定义可知

$$\mathfrak{L}_\alpha^{(1)}=\{x\in\mathfrak{L}_1\mid[h^{(1)},x]=\alpha(h^{(1)})x,\ \forall h^{(1)}\in\mathfrak{H}_1\}.$$

于是 $\sigma([h^{(1)},x])=\alpha(h^{(1)})\sigma(x)$, 即有

$$[\sigma(h^{(1)}),\sigma(x)]=\alpha(h^{(1)})\sigma(x),\quad \forall\ h^{(1)}\in\mathfrak{H}_1.$$

今 $\sigma(\mathfrak{H}_1)=\mathfrak{H}_2$ 给出共轭空间 $\mathfrak{H}_1^*$ 到 $\mathfrak{H}_2^*$ 上的线性同构 σ^*, 它有

$$(\sigma^*f)(\sigma(h^{(1)}))=f(h^{(1)}),\quad \forall\in\mathfrak{H}_1^*,$$

所以

$$(\sigma^*\alpha)(\sigma(h^{(1)}))=\alpha(h^{(1)}).$$

即有

$$[\sigma(h^{(1)}),\sigma(x)]=(\sigma^*\alpha)(\sigma(h^{(1)}))\sigma(x),\quad \forall h^{(1)}\in\mathfrak{H}_1.$$

这证明了

$$\sigma(\mathfrak{L}_\alpha^{(1)})=\mathfrak{L}_{\sigma^*(\alpha)}^{(2)}.$$

于是证明了 $\sigma^*(\Delta_1)=\Delta_2$. 在 Δ_1 中取单根系 $\Pi_1=\{\alpha_1^{(1)},\cdots,\alpha_l^{(1)}\}$, 则 Π_1 的元素构成 $(\mathfrak{H}_1)_R$ 的一组基. 显然按这组基定义的正方向, 单根系仍为 Π_1. 另一方面, $\{\sigma(\alpha_1^{(1)}),\cdots,\sigma(\alpha_l^{(1)})\}$ 为 $(\mathfrak{H}_2)_R$ 的一组基, 按这组基在 $(\mathfrak{H}_2)_R$ 中引进了正方向, 于是证明了 $\Pi_2=\{\sigma(\alpha_1^{(1)}),\cdots,\sigma(\alpha_l^{(1)})\}$ 为单根系, 且有

$$\sigma(\alpha_i^{(1)})=\alpha_i^{(2)},\ B_1(h^{(1)},\alpha^{(1)})=B_2(\sigma(h^{(1)}),\sigma(\alpha^{(1)})),$$

而 $\sigma(\alpha^{(1)})=\alpha^{(2)},\forall\alpha\in\Delta_1$. 特别地, 有

$$B_1(\alpha_j^{(1)},\alpha_k^{(1)})=B_2(\alpha_j^{(2)},\alpha_k^{(2)}),\quad 1\le j,k\le l.$$

这证明了 Cartan 矩阵相等. 反之有

定理 1.2.29 设 $\mathfrak{L}_i$ 是秩为 l 的复半单李代数, $\mathfrak{H}_i$ 为 $\mathfrak{L}_i$ 的 Cartan 子代数. 记 Δ_i 为 $\mathfrak{L}_i$ 关于 $\mathfrak{H}_i$ 的根系, Π_i 为单根系. B_i 为 $\mathfrak{L}_i$ 的 Killing 型. 记单根系 $\Pi_i=\{\alpha_1^{(i)},\cdots,\alpha_l^{(i)}\}$, Cartan 矩阵

$$B_i(\alpha_j^{(i)},\alpha_k^{(i)}). \tag{1.2.43}$$

设 $i=1,2$. 如果复半单李代数 $\mathfrak{L}_1$ 及 $\mathfrak{L}_2$ 的 Cartan 矩阵相等, 则 $\mathfrak{L}_1$ 和 $\mathfrak{L}_2$ 同构.

证 若 Cartan 矩阵相等, 即有

$$B_1(\alpha_j^{(1)},\alpha_k^{(1)})=B_2(\alpha_j^{(2)},\alpha_k^{(2)}),1\le j,k\le l,$$

于是我们有一一对应关系 $\sigma:\ \alpha_j^{(1)}\to\alpha_j^{(2)},1\le j\le l$. 注意到 $\alpha_1^{(i)},\cdots,\alpha_l^{(i)}$ 是实线性空间 $(\mathfrak{H}_i)_R$ 的实基, 也是复线性空间 $\mathfrak{H}_i$ 的复基. 所以我们利用一一对应 σ 可自然地扩充为复线性空间 $\mathfrak{H}_1$ 到 $\mathfrak{H}_2$ 上的线性同构:

$$\sigma(\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\alpha_i^{(1)})=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\alpha_i^{(2)},\ \forall\,\lambda_1,\cdots,\lambda_l\in\mathbb{C}.$$

它诱导了 $(\mathfrak{H}_1)_R$ 的共轭空间 $(\mathfrak{H}_1)_R^*$ 到 $(\mathfrak{H}_2)_R$ 的共轭空间 $(\mathfrak{H}_2)_R^*$ 上的线性同构 σ^*.

我们先来证明 $\sigma^*(\Delta_1)=\Delta_2$. 事实上, 只要证明 $\sigma^*(\Delta_1)\subset\Delta_2$. 同理有 $(\sigma^{-1})^*\Delta_2\subset\Delta_1$. 由于 Δ_1 及 Δ_2 都是有限集, 便证明了 $\sigma^*(\Delta_1)=\Delta_2$. 另一方面, 已知 $\sigma(\alpha_i^{(1)})=\alpha_i^{(2)}$, 所以只要证明 $\sigma^*(\Delta_1^+)\subset\Delta_2^+$ 就够了. 令 Δ_1^+ 的元素可表示为 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{l}m_i\alpha_i$, 其中 $m_1,\cdots,m_l$ 是非负整数. 我们称 $\sum\limits_{i=1}^{l}m_i=|\alpha|$ 为 α 的长度, 因此可对长度作归纳法. 设长度为 $s-1$ 的元素 $\beta\in\Delta_1^+$, 有 $\sigma^*(\beta)\in\Delta_2^*$. 现在考虑长度为 $s(\ge 2)$ 的元素 $\alpha\in\Delta_1^*$. 由式 (1.2.31), 在根系 Δ_1 中存在单根, 为符号方便起见, 我们将此单根取作 α_1, 使得 $\alpha=\beta+\alpha_1,\beta\in$

Δ_1^+. 于是 $q_{\beta\alpha_1} \geq 1$. 而 $2B_1(\alpha_1, \beta) = (p_{\beta\alpha_1} - q_{\beta\alpha_1})B_1(\alpha_1, \alpha_1)$, 因此由 $\sigma^*(\beta), \sigma^*(\alpha_1) \in \Delta_2^+$, 有根链

$$\sigma^*(\beta) - p'_{\sigma^*(\beta),\sigma^*(\alpha_1)}\sigma^*(\alpha_1), \cdots, \sigma^*(\beta) - \sigma^*(\alpha_1), \sigma(\beta),$$
$$\sigma^*(\beta) + \sigma^*(\alpha_1), \cdots, \sigma^*(\beta) + q'_{\sigma^*(\beta),\sigma^*(\alpha_1)}\sigma^*(\alpha_1),$$

使得

$$\sigma^*(\beta) - (p'_{\sigma^*(\beta),\sigma^*(\alpha_1)} + 1)\sigma^*(\alpha_1) \notin \Delta_2 \cup \{0\},$$
$$\sigma^*(\beta) + (q'_{\sigma^*(\beta),\sigma^*(\alpha_1)} + 1)\sigma^*(\alpha_1) \notin \Delta_2 \cup \{0\}.$$

所以

$$\begin{aligned} &2B_2(\sigma^*(\beta), \sigma^*(\alpha_1)) \\ =& (p'_{\sigma^*(\beta),\sigma^*(\alpha_1)} - q'_{\sigma^*(\beta),\sigma^*(\alpha_1)})B_2(\sigma^*(\alpha_1), \sigma^*(\alpha_2)). \end{aligned}$$

这证明了

$$p'_{\sigma^*(\beta),\sigma^*(\alpha_1)} - q'_{\sigma^*(\beta),\sigma^*(\alpha_1)} = p_{\beta\alpha_1} - q_{\beta\alpha_1}.$$

我们来证 $\sigma^*(\alpha) = \sigma^*(\beta) + \sigma^*(\alpha_1) \in \Delta_2^+$. 设若不然, 则有 $q'_{\sigma^*(\beta),\sigma^*(\alpha_1)} = 0$, 于是

$$p_{\beta\alpha_1} = p'_{\sigma^*(\beta),\sigma^*(\alpha_1)} + q_{\beta\alpha_1}.$$

但是 $\beta + \alpha_1 = \alpha \in \Delta_1^+$, 即 $q_{\beta\alpha_1} \geq 1$. 因此有

$$p_{\beta\alpha_1} > p'_{\sigma^*(\beta),\sigma^*(\alpha_1)} \geq 0.$$

今 $\beta - \alpha_1, \beta - 2\alpha_1, \cdots, \beta - p_{\beta\alpha_1}\alpha_1 \in \Delta_1 \cup \{0\}$. 若 $\beta - j\alpha_1 = 0$, 则只有 $j = 1$, 所以 $\beta = \alpha_1$, 但是 $\beta + \alpha_1 = \alpha \in \Delta_1$, 即 $2\alpha_1 \in \Delta_1$. 这导出矛盾. 因此证明了 $\beta - \alpha_1, \cdots, \beta - p_{\beta\alpha_1}\alpha_1 \in \Delta_1$. 由于 $\beta \in \Delta_1^+$, 所以是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ 的非负整数线性组合. 这证明了 $\beta - j\alpha_1 \in \Delta^+, 1 \leq j \leq p_{\beta\alpha}$, 且长度都小于 s. 由归纳法假设可知 $\sigma^*(\beta - j\alpha_1) \in \Delta_1^+, 1 \leq j \leq p_{\beta\alpha_1}$, 这证明了 $p'_{\sigma^*(\beta),\sigma^*(\alpha_1)} \geq p_{\beta\alpha_1}$. 又导出矛盾. 至此证明了长度为 s 的正根 α 有 $\sigma^*(\alpha) \in \Delta_2^+$. 所以证明了 $\sigma^*(\Delta_1^{\pm}) = \Delta_2^{\pm}$.

最后，为了证明 σ 可开拓到整个复半单李代数 $\mathfrak{L}_1$ 上，使得 $\sigma(\mathfrak{L}_1)=\mathfrak{L}_2$ 为同构映射，我们在复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 中取适合条件 (1.2.33)—(1.2.38) 的基. 要证明在复半单李代数 $\mathfrak{L}_2$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_2$ 的根子空间分解 $\mathfrak{L}_2=\mathfrak{H}_2+\sum\limits_{\alpha\in\Delta_1}\mathfrak{L}^{(2)}_{\sigma^*(\alpha)}$ 的一维子空间 $\mathfrak{L}^{(2)}_{\sigma^*(\alpha)}$ 中存在基向量 $e'_{\sigma^*(\alpha)}$，使得对应

$$\sigma(e_\alpha)=e'_{\sigma^*(\alpha)}\in\mathfrak{L}^{(2)}_{\sigma^*(\alpha)}$$

可扩充为复半单李代数 $\mathfrak{L}_1$ 到 $\mathfrak{L}_2$ 上的同构.

今

$$[\alpha_i,\alpha_j]=0,\quad [\sigma(\alpha_i),\sigma(\alpha_j)]=0.$$

又

$$[h,e_\alpha]=\alpha(h)e_\alpha=B_1(\alpha_\alpha,h)e_\alpha,\quad \forall\alpha\in\Delta_1.$$

而

$$B_2(\sigma(h_\alpha),\sigma(h))=B_1(h_\alpha,h),\quad \forall h\in\mathfrak{H}_1,\ \alpha\in\Delta_1,$$

又 $\sigma(e_\alpha)=e'_{\sigma^*(\alpha)}\in\mathfrak{L}^{(2)}_{\sigma^*(\alpha)}$，所以有

$$\sigma([h,e_\alpha])=B_1(h_\alpha,h)\sigma(e_\alpha)=B_2(\sigma(h_\alpha),\sigma(h))\sigma(e_\alpha)=[\sigma(h),\sigma(e_\alpha)].$$

自然，由 $\sigma^*(\Delta_1)=\Delta_2$ 可知当 $\alpha,\beta\in\Delta_1,\alpha+\beta\notin\Delta_1\cup\{0\}$，则 $\sigma^*(\alpha),\sigma^*(\beta)\in\Delta_2,\sigma^*(\alpha)+\sigma^*(\beta)\notin\Delta_2\cup\{0\}$，即有

$$\sigma[e_\alpha,e_\beta]=[\sigma(e_\alpha),\sigma(e_\beta)]=0,\ \forall\alpha,\beta\in\Delta_1,\alpha+\beta\notin\Delta_1\cup\{0\}.$$

又由 $[e_\alpha,e_{-\alpha}]=B_1(\alpha,-\alpha)h_\alpha=h_\alpha$，同样，我们可取 $e'_{\sigma^*(\alpha)},e'_{\sigma^*(-\alpha)}$ 有 $B_2(e'_{\sigma^*(\alpha)},e'_{-\sigma^*(\alpha)})=1,\quad\forall\alpha\in\Delta_1$，因此有

$$[e'_{\alpha^*(\alpha)},e'_{\sigma^*(-\alpha)}]=h'_{\sigma^*(\alpha)}.$$

所以有

$$\sigma([e_\alpha,e_{-\alpha}])=[\sigma(e_\alpha),\sigma(e_{-\alpha})],\quad\forall\alpha\in\Delta_1.$$

余下要证

$$[\sigma(e_\alpha),\sigma(e_\beta)]=\sigma([e_\alpha,e_\beta])=N_{\alpha\beta}\sigma(e_{\alpha+\beta}),\ \forall\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta_1,$$

即证

$$[\sigma(e_\alpha),\sigma(e_\beta)]=N'_{\sigma^*(\alpha),\sigma^*(\beta)}\sigma(e_{\alpha+\beta}),$$

其中 $N'_{\sigma^*(\alpha),\sigma^*(\beta)}=N_{\alpha\beta}, \forall\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta_1$. 换句话说，我们要证明在 $\mathfrak{L}^{(2)}_{\sigma^*(\alpha)}$ 中存在基元素 $e'_{\sigma^*(\alpha)}$, 使得

$$[e'_{\sigma^*(\alpha)},e'_{\sigma^*(\beta)}]=N_{\alpha\beta}e'_{\sigma^*(\alpha)+\sigma^*(\beta)}, \forall\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta_1.$$

将 Δ_2^+ 的元素按大小顺序排好, 若对 $\xi,\alpha\in\Delta_2$, 当 $-\xi<\alpha<\xi$ 时, 存在 e'_α, 使得 $B_2(e'_\alpha,e'_{-\alpha})=1$, 又当 $-\xi<\alpha,\beta,\alpha+\beta<\xi,\alpha,\beta\in\Delta_2,\alpha+\beta\neq 0$ 时有

$$[e'_\alpha,e'_\beta]=N_{\sigma^{*-1}(\alpha),\sigma^{*-1}(\beta)}e'_{\alpha+\beta}.$$

我们来证明存在 $e'_\xi,e'_{-\xi}$ 使得 $B_2(e'_\xi,e'_{-\xi})=1$, 且当 $-\xi\le\alpha,\beta,\alpha+\beta\le\xi$, $\alpha,\beta\in\Delta_2,\alpha+\beta\neq 0$ 时有

$$[e'_\alpha,e'_\beta]=N_{\sigma^{*-1}(\alpha),\sigma^{*-1}(\beta)}e'_{\alpha+\beta}.$$

证明如下: 若不存在 $\eta,\zeta\in\Delta_2,-\xi<\eta,\zeta<\xi$, 使得 $\xi=\eta+\zeta$. 这时任取 $\mathfrak{L}^{(2)}_\xi,\mathfrak{L}^{(2)}_{-\xi}$ 中适合条件 $B_2(e'_\xi,e'_{-\xi})=1$ 的基元素 $e'_\xi,e'_{-\xi}$ 就行了. 若存在 $\eta,\zeta\in\Delta_2,-\xi<\eta,\zeta<\xi$, 使得 $\xi=\eta+\zeta$. 由归纳法假设, 我们已求得 e'_η,e'_ζ, 而 $[e'_\eta,e'_\zeta]\in\mathfrak{L}^{(2)}_\xi$. 由 $\xi\in\Delta_2$, 可知 $[e'_\eta,e'_\zeta]\neq 0$. 令

$$e'_\xi=N^{-1}_{\sigma^{*-1}(\eta),\sigma^{*-1}(\zeta)}[e'_\eta,e'_\zeta],$$

因此有

$$[e'_\eta,e'_\zeta]=N_{\sigma^{*-1}(eta),\sigma^{*-1}(\zeta)}e'_\xi.$$

再在 $\mathfrak{L}^{(2)}_{-\xi}$ 中取出 $e'_{-\xi}$ 使得 $B_2(e'_\xi,e'_{-\xi})=1$. 这样便取定了 $e'_{\pm\xi}$. 因此问题化为证明 $e'_{\pm\xi}$ 的选取与 ξ 的分解 $\xi=\eta+\zeta$ 的方式无关. 事实上, 这时若有 $\alpha,\beta\in\Delta_2,-\xi<\alpha,\beta<\xi$, 又 $\xi=\alpha+\beta$, 且此分解不是 $\xi=\eta+\zeta$. 我们来证明

$$N^{-1}_{\sigma^{*-1}(\eta),\sigma^{*-1}(\zeta)}[e'_\eta,e'_\zeta]=N^{-1}_{\sigma^{*-1}(\alpha),\sigma^{*-1}(\beta)}[e'_\alpha,e'_\beta].$$

首先，由 $\xi=\eta+\zeta=\alpha+\beta$, 所以有 $\alpha+\beta+(-\eta)+(-\zeta)=0$. 而 $\alpha+\beta=\xi\neq 0,(\alpha,\beta)\neq(\eta,\zeta),(\zeta,\eta)$. 所以 $\alpha+(-\eta)\neq 0,\alpha+(-\xi)\neq 0$. 由式 (1.2.41) 可知当 $\alpha+(-\eta),\alpha+(-\zeta)\in\Delta_2$ 时有

$$N_{\alpha'\beta'}N_{-\eta',-\zeta'}+N_{\alpha',-\eta'}N_{-\zeta',\beta'}+N_{\alpha',-\zeta'}N_{\beta',-\eta'}=0, \quad (1.2.44)$$

其中

$$\alpha'=\sigma^{*-1}(\alpha),\beta'=\sigma^{*-1}(\beta),\eta'=\sigma^{*-1}(\eta),\zeta'=\sigma^{*-1}(\zeta)\in\Delta_1.$$

由于 $\alpha+(-\eta)\neq 0,\alpha+(-\zeta)\neq 0$, 所以当 $\alpha+(-\eta)\notin\Delta_2$ 时 $\beta+(-\zeta)\notin\Delta_2$. 式 (1.2.42) 的左边为 $N_{\alpha',\beta'}N_{-\alpha',-\beta'}+N_{\alpha',-\beta'}N_{\beta',-\alpha'}$. 由式 (1.2.42) 可知

$$\begin{aligned}&N_{\alpha'\beta'}N_{-\alpha',-\beta'}+N_{\alpha',-\beta'}N_{\beta',-\alpha'}\\=&(-\frac{q_{\beta'\alpha'}(1+p_{\beta'\alpha'})}{2}+\frac{q_{-\beta',\alpha'}(1+p_{-\beta',\alpha'})}{2})B(\alpha_{\alpha'},\alpha_{\alpha'}).\end{aligned}$$

显然根链

$$\beta'-p_{\beta'\alpha'}\alpha',\cdots,\beta'-\alpha',\beta',\beta'+\alpha',\cdots,\beta'+q_{\beta'\alpha'}\alpha'$$

导出根链

$$-\beta'+p_{\beta'\alpha'}\alpha',\cdots,-\beta'+\alpha',-\beta',-\beta'-\alpha',\cdots,-\beta'-q_{\beta'\alpha'}\alpha'.$$

这证明了 $p_{\beta'\alpha'}=q_{-\beta',\alpha'},q_{\beta',\alpha'}=p_{-\beta',\alpha'}$, 所以 $p_{\beta,\alpha'}-q_{\beta'\alpha'}=-(p_{-\beta',\alpha'}-q_{-\beta',\alpha'})$. 这证明了式 (1.2.44) 仍成立. 同理，当 $\beta+(-\eta)\notin\Delta_2$ 时，式 (1.2.44) 也仍成立.

另一方面，$-\xi=-(\alpha+\beta)<\alpha,\beta<\alpha+\beta=\xi$, 所以 $\alpha,\beta\in\Delta_2^+$. 同理，$\eta>0,\zeta>0$. 因此

$$-\xi<\alpha-\eta,\alpha-\zeta,\beta-\eta,\beta-\zeta<\xi,\quad -\xi<0<\alpha,\beta,\eta,\zeta<\xi.$$

由归纳法假设，有

$$[e'_\sigma,e'_\tau]=N_{\sigma',\tau'}e'_{\sigma+\tau},\quad -\xi<\sigma,\tau,\sigma+\tau<\xi,\sigma+\tau\neq 0.$$

因此由归纳法假设，有

$$[e'_\alpha, e'_{-\eta}] = N_{\alpha', -\eta'} e'_{\alpha-\eta}, \quad [e'_\alpha, e'_{-\zeta}] = N_{\alpha', -\zeta'} e'_{\alpha-\zeta},$$
$$[e'_\beta, e'_{-\eta}] = N_{\beta', -\eta'} e'_{\beta-\eta}, \quad [e'_\beta, e'_{-\zeta}] = N_{\beta', -\zeta'} e'_{\beta-\zeta}.$$

又已知有

$$[e'_{-\eta}, e'_{-\zeta}] = N_{-\eta', -\zeta'} e'_{-\eta-\zeta}.$$

今记 $[e'_\sigma, e'_\tau] = N'_{\sigma\tau} e'_{\sigma+\tau}, \forall \sigma, \tau \in \Delta_2, \sigma+\tau \neq 0$. 上面证明了

$$N'_{\alpha,-\eta} = N_{\alpha',-\eta'}, \quad N'_{\alpha,-\zeta} = N_{\alpha',-\zeta'},$$
$$N'_{\beta,-\eta} = N_{\beta',-\eta'}, \quad N'_{\beta,-\zeta} = N_{\beta',-\zeta'},$$

又 $N'_{\eta\zeta} = N_{\eta',\zeta'}$. 然而对 $N'_{\sigma\tau}$, 仍有式 (1.2.41), 即有

$$N'_{\alpha\beta} N'_{-\eta,-\zeta} + N'_{\alpha,-\eta} N'_{-\zeta,\beta} + N'_{\alpha,-\zeta} N'_{\beta,-\eta} = 0.$$

这证明了 $N'_{\alpha\beta} = N_{\alpha'\beta'}$, 即有 $[e'_\alpha, e'_\beta] = [e'_{\eta'}, e'_{\zeta}]$. 所以 $e'_{\pm\xi}$ 的定义与 ξ 的分解方式无关.

最后，我们只要证明当 $-\xi \leq \alpha, \beta \leq \xi, \alpha+\beta = \xi$, 则有 $-\xi < \alpha, \beta < \xi$. 事实上, 由 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, 所以 $\alpha > 0, \beta > 0$. 因此 $\alpha, \beta < \xi$. 这推出 $\xi > 0$. 所以 $\alpha, \beta > 0 > -\xi$. 至此证明了断言. 定理证完.

因此，我们实际上证明了

定理 1.2.30 复半单李代数同构当且仅当它们的秩相等，且分别存在 Cartan 子代数及其决定的根系中的单根系，使得由单根系决定的 Cartan 矩阵相等.

现在来证明 Weyl 基的存在性，即有

定理 1.2.31 设 $\mathfrak{L}$ 为复半单李代数，$\mathfrak{H}$ 为 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数，Δ 为 $\mathfrak{L}$ 关于 $\operatorname{ad}\mathfrak{H}$ 的根子空间分解 $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} + \sum\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{L}_\alpha$ 的根系，则在 $\mathfrak{L}_\alpha$ 中存在基元素 $e_\alpha, \forall \alpha \in \Delta$, 适合

(1) $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] = 0$;

(2) $[h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha = B(\alpha, h) e_\alpha$, $\forall h \in \mathfrak{H}$, $\alpha \in \Delta$;

(3) $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = B(e_\alpha, e_{-\alpha})\alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in \Delta$;

(4) $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$, $\forall \alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha + \beta \neq 0$.

当 $\alpha + \beta \notin \Delta$ 时，$N_{\alpha\beta} = 0$; 当 $\alpha + \beta \in \Delta$ 时

$$N_{\alpha\beta}^2 = \frac{q_{\beta\alpha}(1 + p_{\beta\alpha})}{2} B(\alpha, \alpha) > 0, \tag{1.2.45}$$

或者等价地

$$N_{-\alpha,-\beta} = -N_{\alpha\beta}. \tag{1.2.46}$$

这组基称为 **Weyl 基**.

证　由引理 1.2.28 的式 (1.2.42) 可知式 (1.2.45) 和式 (1.2.46) 等价. 我们来证式 (1.2.46) 成立. 考虑根系 Δ 到自身上的一一对应 $\sigma : \alpha \to -\alpha$. 这时有 $B(\alpha, \beta) = B(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)), \forall \alpha, \beta \in \Delta$. 于是 σ 可扩充为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的自同构. 由定理 1.2.29 的必要性证明，有 $\sigma(e_\alpha) = -\lambda_\alpha e_{-\alpha}, \forall \alpha \in \Delta$, 这里 λ_α 为复数. 由 Killing 型有 $B(\sigma(e_\alpha), \sigma(e_{-\alpha})) = B(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$, 即有 $\lambda_\alpha \lambda_{-\alpha} = 1, \forall \in \Delta$. 又由 $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}, \forall \alpha, \beta \in \Delta, \alpha + \beta \neq 0$ 有 $[\sigma(e_\alpha), \sigma(e_\beta)] = N_{\alpha\beta} \sigma(e_{\alpha+\beta})$, 即有 $\lambda_\alpha \lambda_\beta N_{-\alpha,-\beta} = -\lambda_{\alpha+\beta} N_{\alpha\beta}, \forall \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$. 取 $\mu_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha}, \forall \alpha \in \Delta$, 使得 $\mu_\alpha \mu_{-\alpha} = 1$. 取 $f_\alpha = \mu_\alpha^{-1} e_\alpha$, 则有

$$\begin{aligned}
[f_\alpha, f_\beta] &= \mu_\alpha^{-1} \mu_\beta^{-1} [e_\alpha, e_\beta] \\
&= \mu_\alpha^{-1} \mu_\beta^{-1} N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta} \\
&= \frac{\mu_{\alpha+\beta}}{\mu_\alpha \mu_\beta} N_{\alpha\beta} f_{\alpha+\alpha}, \quad \forall \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta.
\end{aligned}$$

而 $\mu_\alpha^2 \mu_\beta^2 N_{-\alpha,-\beta} = -\mu_{\alpha+\beta}^2 N_{\alpha\beta}$, 记

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\mu_{\alpha+\beta}}{\mu_\alpha \mu_\beta} N_{\alpha\beta}, \quad \forall \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta_1,$$

于是

$$M_{-\alpha,-\beta}=\frac{\mu_{-(\alpha+\beta)}}{\mu_{-\alpha}\mu_{-\beta}}N_{-\alpha,-\beta}=\frac{\mu_\alpha\mu_\beta}{\mu_{\alpha+\beta}}N_{-\alpha,-\beta}$$
$$=-\frac{\mu_{\alpha+\beta}}{\mu_\alpha\mu_\beta}N_{\alpha\beta}=-M_{\alpha\beta}.$$

而

$$B(f_\alpha,f_{-\alpha})=(\mu_\alpha\mu_{-\alpha})^{-1}B(e_\alpha,e_{-\alpha})=B(e_\alpha,e_{-\alpha})=1,\forall\alpha\in\Delta.$$

至此证明了 $\{f_\alpha,\forall\alpha\in\Delta\}$ 构成 Weyl 基. 证完.

为了进一步作分类，我们给出

定理 1.2.32 设 $\mathfrak{L}$ 为复半单李代数，则 $\mathfrak{L}$ 为单理想直和，且不计次序分解唯一.

证 设 $\mathfrak{L}$ 为复单李代数，则不必证. 若 $\mathfrak{L}$ 不是复单李代数，则 $\mathfrak{L}$ 有非零真理想 $\mathfrak{M}$. 记 $B(x,y)$ 为复半单李代数的 Killing 型，则正交补

$$\mathfrak{M}^\perp=\{x\in\mathfrak{L}\mid B(x,\mathfrak{M})=0\}$$

仍为 $\mathfrak{L}$ 的理想. 且 $[\mathfrak{M},\mathfrak{M}^\perp]\subset\mathfrak{M}\cap\mathfrak{M}^\perp=0$. 因为 Killing 型非退化，所以有 $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}+\mathfrak{M}^\perp$ 为理想直和. 显然 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型 B 限制在 $\mathfrak{M}$ 及 $\mathfrak{M}^\perp$ 上分别为 $\mathfrak{M}$ 及 $\mathfrak{M}^\perp$ 的 Killing 型，且仍非退化，这证明了 $\mathfrak{M}$ 及 $\mathfrak{M}^\perp$ 都为复半单理想. 对 $\mathfrak{M}$ 及 $\mathfrak{M}^\perp$ 再继续分解，由 $\mathfrak{L}$ 为有限维李代数可知 $\mathfrak{L}$ 为单理想的直接和

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{M}_1+\cdots+\mathfrak{M}_s,\tag{1.2.47}$$

且 Killing 型 B 有 $B(\mathfrak{M}_i,\mathfrak{M}_j)=0,i\neq j$, 即关于 Killing 型两两正交.

现在证分解的唯一性. 这只要证明复半单李代数的单理想必为 $\mathfrak{M}_1,\cdots\mathfrak{M}_s$ 之一. 设 $\mathfrak{M}_0$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的单理想. 记 $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}_1+\cdots+\mathfrak{M}_s$ 到 $\mathfrak{M}_i$ 的投影映射为 p_i. 显然它为线性变换，且有

$$\sum_{i=1}^s p_i=\mathrm{id},\quad p_ip_j=p_jp_i=\delta_{ij}p_i,\quad 1\le i,j\le s.$$

令 $\mathfrak{M}_0 \neq 0$, 所以存在 $j \in \{1,2,\cdots,s\}$ 使得 $p_j(\mathfrak{M}_0) \neq 0$. 今 $p_j(\mathfrak{M}_0) \subset \mathfrak{M}_j$, 且 $[\mathfrak{M}_j, p_j(\mathfrak{M}_0)] = [\mathfrak{M}_j, \mathfrak{M}_0] \subset \mathfrak{M}_j \cap \mathfrak{M}_0 \subset p_j(\mathfrak{M}_0)$. 所以 $p_j(\mathfrak{M}_0)$ 为 $\mathfrak{M}_j$ 的理想. 由 $\mathfrak{M}_j$ 为单理想, 所以证明了 $p_j(\mathfrak{M}_0) = \mathfrak{M}_j$. 再由

$$\mathfrak{M}_j = [\mathfrak{M}_j, \mathfrak{M}_j] = [\mathfrak{M}_j, p_j(\mathfrak{M}_0)] = [\mathfrak{M}_j, \mathfrak{M}_0] \subset \mathfrak{M}_0$$

便证明了 $\mathfrak{M}_j \subset \mathfrak{M}_0$. 但是 $\mathfrak{M}_0$ 为单理想, 这证明了 $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_j$. 定理证完.

这个定理将复半单李代数的分类问题化为非交换单李代数的分类. 我们有

引理 1.2.33 维数大于 1 的复单李代数必半单.

证 设 $\mathfrak{L}$ 为复单李代数, 且 $\dim \mathfrak{L} > 1$. 若 $\mathfrak{L}$ 非半单, 则有根基 $\mathfrak{R} = \mathfrak{L}$, 即 $\mathfrak{L}$ 为可解李代数. 于是 $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \neq \mathfrak{L}$. 但是 $\mathfrak{L}$ 单, 这证明了 $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] = 0$, 即 $\mathfrak{L}$ 为交换李代数. 所以 $\mathfrak{L}$ 中任一一维子空间为理想. 由 $\mathfrak{L}$ 单便推出矛盾. 证完.

进一步刻画复半单李代数的单理想, 显然有

定理 1.2.34 设 $\mathfrak{H}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数, 记 Δ 为 $\mathfrak{L}$ 关于 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 的根系. 在根系 Δ 中取定单根系 Π. 设 $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \cdots + \mathfrak{L}_s$ 为单理想直接和, $p_j : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}_j$ 为投影变换, $1 \leq j \leq s$. 则 $p_j(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}_j$ 为复单理想 $\mathfrak{L}_j$ 的 Cartan 子代数, $p_j^*(\Delta) = \Delta_j$ 为 $\mathfrak{L}_j$ 关于 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_j$ 的根系, $p_j^*(\Pi) = \Pi_j$ 为 Δ_j 的单根系, 其中 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$, 且有

$$B(\Pi_i, \Pi_j) = 0, \quad i \neq j, \tag{1.2.48}$$

其中 B 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型, $B|_{\mathfrak{L}_i} = B_i$ 为复单理想 $\mathfrak{L}_i$ 的 Killing 型.

为了证明定理 1.2.34 的逆, 先引进一些符号.

设 $\mathfrak{L}$ 为复半单李代数, $\mathfrak{H}$ 为 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数. Δ 为 $\mathfrak{L}$ 关于 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 的根系, Π 为 Δ 的单根系. 记 $\Pi_0 = \{\beta_1, \cdots, \beta_r\}$ 为 Π

的子集. 记

$$< \Pi_0 > = \left\{ \sum_{i=1}^{r} m_i \beta_j \mid \forall m_1, \cdots, m_r \in \mathbb{Z} \right\} \cap \Delta \subset \Delta, \qquad (1.2.49)$$

$$[\Pi_0] = \left\{ \sum_{i=1}^{r} c_i \beta_i \mid \forall c_1, \cdots, c_r \in \mathbb{C} \right\} \cap \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}. \qquad (1.2.50)$$

我们有

定理 1.2.35 设 $\mathfrak{H}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数, Δ 为 $\mathfrak{L}$ 关于 ad$\mathfrak{H}$ 的根系, Π 为 Δ 的单根系, 若 Π 能分解为两个不相交的子集 $\Pi_1 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$, $\Pi_2 = \{\alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_l\}$ 的并, 且有 $B(\alpha_i, \alpha_j) = 0, 1 \le i \le s < s+1 \le j \le l$, 其中 B 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型, 则 $\mathfrak{L}$ 有理想

$$\mathfrak{L}_i = [\Pi_i] + \sum_{\alpha \in < \Pi_i >} \mathfrak{L}_\alpha, \quad i = 1, 2, \qquad (1.2.51)$$

且

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 \qquad (1.2.52)$$

为复半单理想的直接和.

证 我们先来证明

$$\Delta = < \Pi_1 > \cup < \Pi_2 >, \quad < \Pi_1 > \cap < \Pi_2 > = \emptyset.$$

事实上, 显然 $< \Pi_1 > \cap < \Pi_2 > = \emptyset$. 任取 $\xi \in \Delta^+$, 其中 $\xi \notin < \Pi_1 > \cup < \Pi_2 >$, 则存在正根序列

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \cdots + \alpha_{i_s} = \xi.$$

为讨论方便起见, 无妨设 $\alpha_{i_1} \in \Pi_1$. 由于 $\xi \notin < \Pi_1 >$, 所以存在指标 $s < i_p \le l$, 使得 $\beta = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_{p-1}} \in < \Pi_1 >$, $\beta + \alpha_{i_p} \notin < \Pi_1 >$. 考虑 β 关于 α_{i_p} 的根链, 因此有 $2B(\beta, \alpha_{i_p}) = (p_{\beta, \alpha_{i_p}} - q_{\beta, \alpha_{i_p}}) B(\alpha_{i_p}, \alpha_{i_p})$. 今由 $B([\Pi_1], [\Pi_2]) = 0$, 所以由 $B(\alpha_{i_p}, \alpha_{i_p}) > 0$ 可知 $p_{\beta, \alpha_{i_p}} = q_{\beta, \alpha_{i_p}}$. 今 $\beta + \alpha_{i_p} \in \Delta$, 所以 $q_{\beta, \alpha_{i_p}} > 0$, 即 $p_{\beta, \alpha_{i_p}} > 0$. 这证明了 $\beta - \alpha_{i_p} \in \Delta$.

但是 $\beta \in < \Pi_1 >, \alpha_{i_p} \in < \Pi_2 >$. 这和 Δ 的元素关于单根的线性组合全由非正整数或非负整数构成矛盾. 因此证明了 $\Delta = < \Pi_1 > \cup < \Pi_2 >$, $\mathfrak{H} = [\Pi_1]+[\Pi_2]$, $[\Pi_1]\cap[\Pi_2] = \emptyset$. 这证明了 $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2$ 为空间直接和. 又任取 $\alpha \in < \Pi_1 >, \beta \in < \Pi_1 >$, 则 $\alpha + \beta \notin \Delta$. 这证明了 $[\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2] = 0$. 因此 $\mathfrak{L}_1$ 和 $\mathfrak{L}_2$ 为 $\mathfrak{L}$ 的理想. 由于复半单李代数的理想复半单, 所以 $\mathfrak{L}_1$ 和 $\mathfrak{L}_2$ 都复半单. 定理证完.

由此我们有

定理 1.2.36 复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 为单李代数, 当且仅当它的单根系对应的 $\mathfrak{H}_\Pi$ 不能分解为两个关于 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型两两正交的真子集的并.

现在进一步研究 Cartan 矩阵.

引理 1.2.37 记 $\mathfrak{H}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数, Δ 为 $\mathfrak{L}$ 关于 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 的根系, Π 为单根系, $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$. 则当 $i \neq j$ 时, α_i 和 α_j 的夹角只有 $\pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6$ 之一.

证 取 $i \neq j, 1 \leq i, j \leq l$. 于是对单根 α_i, α_j, 有 $\pm(\alpha_i - \alpha_j) \notin \Delta \cup \{0\}$. 因此 $p_{\alpha_i,\alpha_j} = p_{\alpha_j,\alpha_i} = 0$. 于是有

$$2B(\alpha_i, \alpha_j) = -q_{\alpha_i,\alpha_j} B(\alpha_j, \alpha_j) = -q_{\alpha_j,\alpha_i} B(\alpha_i, \alpha_i) \leq 0.$$

即 α_i 和 α_j 的夹角 $< \alpha_i, \alpha_j >$ 有

$$\cos < \alpha_i, \alpha_j > = \frac{B(\alpha_i, \alpha_j)}{\sqrt{B(\alpha_i, \alpha_i) B(\alpha_j, \alpha_j)}} = -\frac{1}{2}\sqrt{q_{\alpha_i\alpha_j} q_{\alpha_j\alpha_i}} \leq 0,$$

且

$$4\cos^2 < \alpha_i, \alpha_j > = q_{\alpha_i\alpha_j} q_{\alpha_j\alpha_i}$$

为非负整数. 这证明了

$$\cos < \alpha_i, \alpha_j > \in \{\, 0, -1/2, -1/\sqrt{2}, -\sqrt{3}/2, -1 \,\}.$$

但是 $0 \leq < \alpha_i, \alpha_j > < \pi$, 这证明了 $\cos < \alpha_i, \alpha_j >$ 不能取值 -1. 至此证明了引理. 证完.

因此我们证明了

(1) α_i,α_j 的夹角为 $\pi/2$, 由此我们有 $B(\alpha_i,\alpha_j)=0$;

(2) α_i,α_j 的夹角为 $2\pi/3$, 由此我们有 $B(\alpha_i,\alpha_i)=B(\alpha_j,\alpha_j)$;

(3) α_i,α_j 的夹角为 $3\pi/4$, 由此我们有 $B(\alpha_i,\alpha_i)=2B(\alpha_j,\alpha_j)$ 或 $B(\alpha_j,\alpha_j)=2B(\alpha_i,\alpha_i)$;

(4) α_i,α_j 的夹角为 $5\pi/6$, 由此我们有 $B(\alpha_i,\alpha_i)=3B(\alpha_j,\alpha_j)$ 或 $B(\alpha_j,\alpha_j)=3B(\alpha_i,\alpha_i)$.

定义 1.2.38 设 $\mathfrak{H}$ 为复半单李代数的 Cartan 子代数, Δ 为关于 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 的根系. 在根系 Δ 中给定单根系 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$. 任取 α_i, 在平面上取一点, 记作 i. 对于两个不同的单根 α_i 及 α_j, 当 α_i 和 α_j 的夹角分别为 $\pi/2,2\pi/3,3\pi/4,5\pi/6$ 时, 点 i 到点 j 分别联 $0,1,2,3$ 条线. 在夹角大于 $\pi/2$ 时, 相应 $B(\alpha_i,\alpha_i)=kB(\alpha_j,\alpha_j)$, 其中 $k=1,2,3$, 相应将所有联线都取作从点 i 到点 j 的向量, 这样得到的图称为 **Dynkin 图**, 记作 $S(\Pi)$.

引理 1.2.39 设 $\mathfrak{H}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数. 记 Δ 为 $\mathfrak{L}$ 关于 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 的根系, Π 为 Δ 的单根系. $S(\Pi)$ 为 Dynkin 图. 则 $\mathfrak{L}$ 为单李代数当且仅当 Dynkin 图 $S(\Pi)$ 连通.

证 若 Dynkin 图 $S(\Pi)$ 不连通, 则 Π 可分为两个不相交的真子集的并, 无妨记作 $\Pi_1=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\},\Pi_2=\{\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_l\}$, 且有 $B(\alpha_i,\alpha_j)=0, 1\le i\le r,\ r+1<j\le l$. 由定理 1.2.35 可知李代数 $\mathfrak{L}$ 不是单李代数. 证完.

因此, 证明了 Dynkin 图 $S(\Pi)$ 分为有限多个互不相联的连通子图的并, 相应复半单李代数分解为单理想直和. 所以为了进一步考虑分类, 我们只需考虑连通 Dynkin 图, 即维数大于 1 的复单李代数的情形. 我们有

定理 1.2.40 设 $\mathfrak{L}$ 为单李代数, 则 $\mathfrak{L}$ 的 Dynkin 图只能是下面九种之一, 它们是

(1) A_n: ∘——→∘——→∘——→∘ ····∘——→∘

(2) B_n : 1 1 1 1 1 1 2

(3) C_n : 1 2 2 2 2

(4) D_n :

(5) G_2 : 1 3

(6) F_4 : 1 1 2 2

(7) E_6 :

(8) E_7 :

(9) E_8 :

证 已知 Cartan 矩阵 $(B(\alpha_i,\alpha_j))$ 正定，于是

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{l}(x_iB(\alpha_i,\alpha_i)^{-1/2})B(\alpha_i,\alpha_j)(x_jB(\alpha_j,\alpha_j)^{-1/2})\\=&\sum_{i,j=1}^{l}x_ix_j\cos<\alpha_i,\alpha_j>>0.\end{aligned}$$

这里 $x=(x_1,\cdots,x_l)\in\mathbb{R}^l\neq 0$, $\cos<\alpha_i,\alpha_i>=\cos 0=1$. 我们分四步来证明定理.

(Ⅰ) 当 $<\alpha_1,\alpha_2>=5\pi/6$ 时， $\cos<\alpha_1,\alpha_2>=-\sqrt{3}/2$. 设 $l\geq 3$. 由 Dynkin 图连通，所以存在 $i\in\{3,\cdots,l\}$, 使得 $\cos<\alpha_1,\alpha_i>\neq 0$ 或 $\cos<\alpha_2,\alpha_i>\neq 0$. 为方便起见，无妨设 $i=3$, 则由 Cartan 矩阵正定，它前三行、列构成的主子式大于零，即有

$$\frac{1}{4}>\cos^2<\alpha_1,\alpha_3>+\cos^2<\alpha_2,\alpha_3> \\ +\sqrt{3}\cos<\alpha_1,\alpha_3>\cos<\alpha_2,\alpha_3>.$$

然而 $\cos<\alpha_1,\alpha_3>,\cos<\alpha_2,\alpha_3>\in\{0,-1/2,-1/\sqrt{2},-\sqrt{3}/2\}$, 所以上面不等式的右边 $\geq 1/4$. 这就导出矛盾. 因此证明了 $l=2$, 此即情形 (5).

(Ⅱ) 下面在情形 $\cos<\alpha_i,\alpha_j>\in\{0,-1/2,-1/\sqrt{2}\}, i\neq j$ 时讨论. 我们先来证无闭图. 设若不然，无妨设 $\cos<\alpha_i,\alpha_{i+1}>\neq 0,\ i=1,\cdots,s-1,\quad \cos<\alpha_s,\alpha_1>\neq 0$. 取 $x_{s+1}=\cdots=x_l=0, x_1=\cdots=x_s=1$, 则有

$$0<s+2\sum_{1\leq i<j\leq s}\cos<\alpha_i,\alpha_j>\leq\ s+2\sum_{i=1}^{s}\cos<\alpha_i,\alpha_{i+1}>.$$

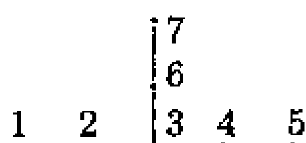
其中 α_{s+1} 应改为 α_1. 这证明了 $0<s-s=0$. 所以导出矛盾.

我们再来证明 Dynkin 图中任取一点，则此点不可能和另四点同时相联. 为方便起见，即若 $\cos<\alpha_1,\alpha_i>\neq 0, 2\leq i\leq 5$, 所以 $\cos<\alpha_1,\alpha_i>\in\{-1/2,-1/\sqrt{2}\}, 2\leq i\leq 5$. 由于这五点不产生闭回路，所以 $\cos<\alpha_i,\alpha_j>=0, 2\leq i<j\leq 5$. 因此 Cartan 矩阵的前 5 行、列构成的主子矩阵的行列式为 $1-\sum\limits_{j=2}^{5}\cos^2<\alpha_1,\alpha_j>>0$. 这证明了

$$1>\sum_{j=2}\cos^2<\alpha_1,\alpha_j>\geq\frac{4}{4}=1.$$

这又推出矛盾，所以证明了断言.

我们来证明若一点与三点相联，则无如下的子图:

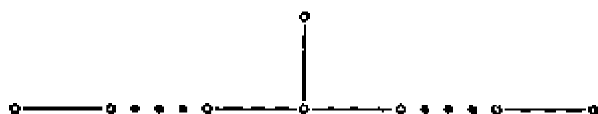


事实上，这时 Catran 矩阵的前七行、列构成的主子矩阵正定. 取 $x=(x_1,\cdots,x_7,0,\cdots,0)\neq 0$, 则有

$$
\begin{aligned}
0 &< \sum_{j=1}^{7} x_j^2 + 2\sum_{i=1,3,5}(x_1x_{i+1}\cos<\alpha_1,\alpha_{i+1}> \\
&\quad + x_{i+1}x_{i+2}\cos<\alpha_{i+1},\alpha_{i+2}>) \\
&\leq \sum_{j=1}^{7} x_j^2 - \sum_{i=1,3,5}(x_1,x_{i+1}+x_{i+1}x_{i+2}) \\
&= (x_1,\cdots,x_7)H_1(x_1,\cdots,x_7)'.
\end{aligned}
$$

而 $\det H_1=0$. 这和 $H_1>0$ 矛盾. 所以证明了断言. 至此证明了 Dynkin 图只能是下面两种样子.





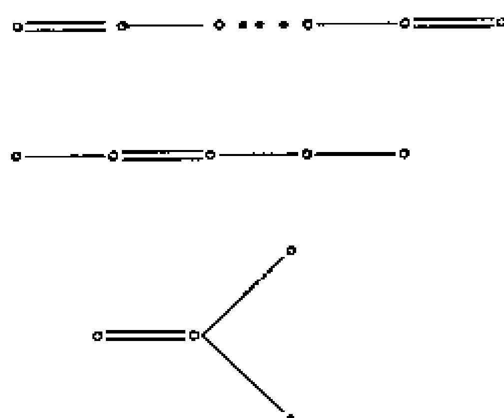
(Ⅲ) 若出现形如 ○⟹○ 的子图，则只有出现下面两种情形





前一图形给出情形 (2), (3), 后一图形给出情形 (6).

事实上，我们在 (Ⅱ) 的前一图形的情形，只需证明不出现形如



的子图就够了.

(1) 第一个子图对应正定二次型

$$0<\sum_{i=1}^{l}x_i^2+2\sum_{i=1}^{l-1}x_ix_{i+1}\cos<\alpha_i,\alpha_{i+1}>$$
$$=\sum_{i=1}^{l}x_i^2-\sqrt{2}(x_1x_2+x_{l-1}x_l)-\sum_{i=2}^{l-2}x_ix_{i+1}.$$

取 $x_1=x_l=1/\sqrt{2},x_2=\cdots=x_{l-1}=1$ 便推出矛盾.

(2) 第二个子图对应正定二次型

$$0<\sum_{i=1}^{4}x_i^2-x_1[(1/\sqrt{2})x_2+x_3+x_4]=xH_1x',$$

而 $\det H_1=0$. 这导出矛盾.

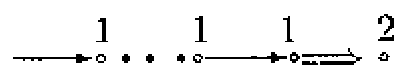
(3) 第三个子图对应正定二次型

$$0<\sum_{i=1}^{5}x_i^2-x_1x_2-\sqrt{2}x_2x_3-x_3x_4-x_4x_5=xH_1x',$$

而 $\det H_1=0$. 这又导出矛盾.

因此余下要讨论图形：在 (II) 的前一情形只可能为





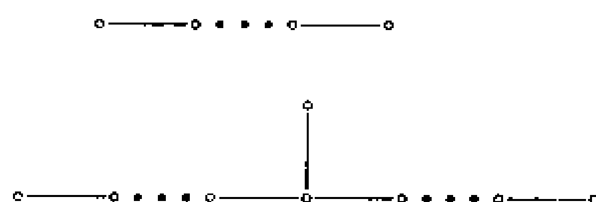
事实上，前一情形对应的二次型分别为

$$\sum_{i=1}^{l} x_i^2 - x_1x_2 - \sqrt{2}\sum_{i=2}^{l-1} x_ix_{i+1},$$

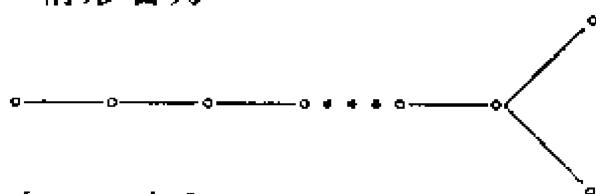
$$\sum_{i=1}^{l} x_i^2 - \sqrt{2}x_1x_2 - \sum_{i=2}^{l-1} x_ix_{i+1}.$$

易证它们正定．这给出了 (2) 和 (3)．在后一情形时对应的二次型为 $\sum\limits_{i=1}^{4} x_i^2 - x_1x_2 - \sqrt{2}x_2x_3 - x_3x_4$．它显然正定，这给出了 (6)．

(Ⅳ) 余下讨论形如

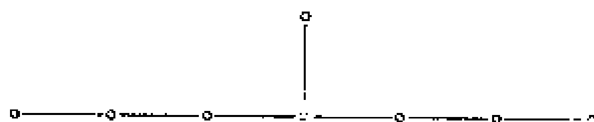


的图．前一情形决定的二次型为 $\sum\limits_{i=1}^{l} x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} x_ix_{i+1}$．显然它正定，它给出了 (1)．后一情形若为



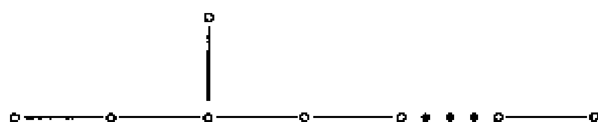
相应的二次型为 $\sum\limits_{i=1}^{l} x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{l-2} x_ix_{i+1} - x_{l-2}x_l$．不难证明它正定．这给出了 (4)．

后一情形，我们先来证明若有形如

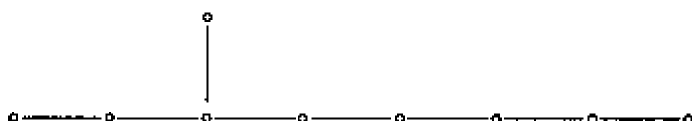


的子图，则这种 Dynkin 图不存在．事实上，这时子图决定的二次

型为 $\sum_{i=1}^{8} x_i^2 - \sum_{i=1}^{6} x_i x_{i+1} - x_4 x_8$, 由直接计算可知它决定的 8×8 对称方阵的行列式为零. 所以证明了断言. 因此图形必形如



若 $l \geq 9$, 即有子图



它对应的二次型为 $\sum_{i=1}^{9} x_i^2 - \sum_{i=1}^{7} x_i x_{i+1} - x_3 x_9$. 易证它不正定, 所以 $6 \leq l \leq 8$. 由直接计算可知在 $l = 6,7,8$ 时二次型 $\sum_{i=1}^{l} x_i^2 - \sum_{i=1}^{l-1} x_i x_{i+1} - x_3 x_l$ 正定. 这就给出 (7), (8), (9). 至此证明了定理. 证完.

上面证明了 Dynkin 图只可能如定理 1.2.40 所给出的九种类型. 为了解决实现问题, 我们需要具体构造九种复单李代数, 使得它们的 Dynkin 图分别为定理 1.2.40 给出的九种. 下面我们叙述结果如下:

记 $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ 为复一般矩阵李代数. 记 E_{ij} 为 $n\times n$ 矩阵, 除第 i 行, 第 j 列交叉元素为 1 外, 其余元素为零. 于是 $E_{ij}, 1 \leq i,j \leq n$ 构成李代数 $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ 的一组基. 乘法表为

$$[E_{ij}, E_{pq}] = \delta_{jp} E_{iq} - \delta_{iq} E_{pj},\ 1 \leq i,j,p,q \leq n,$$

其中 δ_{uv} 为 Kronecker 符号. 下面定义几种 $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ 的子代数:

(1) $\mathrm{A}_l = \mathrm{sl}(l+1,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{gl}(l+1,\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}, l = 1,2,\cdots$. 它有 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$, 基为 $E_{ii} - E_{l+1,l+1}$, $1 \leq i \leq l$. A_l 关于 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 的根子空间分解为

$$\mathrm{sl}(l+1,\mathbb{C}) = \mathfrak{H} + \sum_{1\leq i\neq j\leq l+1} \mathfrak{L}_{ij},$$

其中 Weyl 基为 $E_{ij} \in \mathfrak{L}_{ij}$, $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq l+1$. 记

$$e_i = \frac{1}{2(l+1)} E_{ii},\ 1 \leq i \leq l+1,$$

则根系

$$\Delta = \{e_i - e_j,\ i \neq j,\ 1 \leq i,j \leq l+1\},$$

单根系

$$\Pi = \{e_i - e_{i+1},\ 1 \leq i \leq l\},$$

所以 $\dim \mathrm{A}_l = l(l+2)$, $\operatorname{rank} \mathrm{A}_l = l$, $l \geq 1$.

(2) $\mathrm{B}_l = \mathrm{so}(2l+1,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{gl}(2l+1,\mathbb{C}) \mid AT + TA' = 0\}$, $l = 2,3,\cdots$, 其中

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I^{(l)} \\ 0 & 1 & 0 \\ I^{(l)} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$I^{(l)}$ 为 $l \times l$ 单位方阵. 我们约定矩阵行列的编号按

$$-1,\cdots,-l,0,1,\cdots,l$$

来记. 于是以 $E_{ii} - E_{-i,-i}$, $1 \leq i \leq l$ 为基的子空间 $\mathfrak{H}$ 为 B_l 的 Cartan 子代数, 则有 B_l 关于 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 的根子空间分解

$$\begin{aligned}\mathrm{so}(2l+1,\mathbb{C}) = \mathfrak{H} &+ \sum_{1\leq i\neq j\leq l} \mathfrak{L}_{ij} + \sum_{1\leq i<j\leq l} \mathfrak{L}_{i,-j} \\ &+ \sum_{1\leq i<j\leq l} \mathfrak{L}_{-i,j} + \sum_{1\leq i\leq l} \mathfrak{L}_{0,i} + \sum_{1\leq i\leq l} \mathfrak{L}_{0,-i},\end{aligned}$$

其中 Weyl 基为

$$\begin{aligned}&E_{ij} - E_{-j,-i},\ E_{ji} - E_{-i,-j},\ E_{-i,j} - E_{-j,i}, E_{i,-j}, E_{j,-i},\\ &E_{0i} - E_{-i,0},\ E_{0,-i} - E_{i0}, 1 \leq i \leq j \leq l.\end{aligned}$$

记

$$e_i = \frac{1}{4l-2}(E_{-i,-i} - E_{ii}),\ 1 \leq i \leq l,$$

则根系

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \le i < j \le l,\ \pm e_i,\ 1 \le i \le l\},$$

单根系

$$\Pi = \{e_i - e_{i+1},\ 1 \le i \le l-1,\ e_l\}.$$

所以 $\dim \mathrm{B}_l = l(2l+1)$, $\operatorname{rank} \mathrm{B}_l = l$, $l \ge 2$.

(3) $\mathrm{C}_l = \mathrm{sp}\,(l) = \{A \in \mathrm{gl}\,(2l, \mathbb{C}) \mid AJ + JA' = 0\}$, $l = 3, 4, \cdots$, 其中

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I^{(l)} \\ -I^{(l)} & 0 \end{pmatrix},$$

而 $I^{(l)}$ 为 $l \times l$ 单位方阵. 我们约定 $2l \times 2l$ 矩阵行列的编号按 $-1, \cdots, -l, 1, \cdots, l$ 来记. 于是以 $E_{ii} - E_{-i,-i}$, $1 \le i \le l$ 为基的子空间 $\mathfrak{H}$ 为 C_l 的 Cartan 子代数, 则有 C_l 关于 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 的根子空间分解为

$$\begin{aligned} \mathrm{sp}\,(l) = \mathfrak{H} &+ \sum_{1 \le i \ne j \le l} \mathfrak{L}_{ij} + \sum_{1 \le i < j \le l} \mathfrak{L}_{i,-j} \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le l} \mathfrak{L}_{-i,j} + \sum_{1 \le i \le l} \mathfrak{L}_{i,-i} + \sum_{1 \le i \le l} \mathfrak{L}_{-i,i}, \end{aligned}$$

其中 Weyl 基为

$$\begin{aligned} &E_{ij} - E_{-j,-i},\ E_{ji} - E_{-i,-j},\ E_{-i,j} + E_{-j,i}, E_{i,-j} + E_{j,-i}, \\ &E_{i,-i},\ E_{-i,i},\ 1 \le i < j \le l. \end{aligned}$$

记

$$e_i = \frac{1}{4l+4}(E_{-i,-i} - E_{ii}), \quad 1 \le i \le l,$$

则根系

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \le i < j \le l,\ \pm 2e_i,\ 1 \le i \le l\},$$

单根系

$$\Pi = \{e_i - e_{i+1},\ 1 \le i \le l-1,\ 2e_l\}.$$

所以 $\dim \mathrm{C}_l = l(2l+1)$, $\operatorname{rank} \mathrm{C}_l = l$, $l \geq 3$.

(4) $\mathrm{D}_l = \mathrm{so}(2l, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{gl}(2l, \mathbb{C}) \mid AT_0 + T_0 A' = 0\}$, $l = 4, 5, \cdots$. 其中

$$T_0 = \begin{pmatrix} 0 & I^{(l)} \\ I^{(l)} & 0 \end{pmatrix},$$

而 $I^{(l)}$ 为 $l \times l$ 单位方阵. 我们约定 $2l \times 2l$ 矩阵行列的编号按 $-1, \cdots, -l, 1, \cdots, l$ 来记. 于是以 $E_{ii} - E_{-i,-i}$, $1 \leq i \leq l$ 为基的子空间 $\mathfrak{H}$ 为 D_l 的 Cartan 子代数, 则有 D_l 关于 $\operatorname{ad} \mathfrak{H}$ 的根子空间分解为

$$\mathrm{so}(2l, \mathbb{C}) = \mathfrak{H} + \sum_{1 \leq i \neq j \leq l} \mathfrak{L}_{ij} + \sum_{1 \leq i < j \leq l} \mathfrak{L}_{i,-j} + \sum_{1 \leq i < j \leq l} \mathfrak{L}_{-i,j},$$

Weyl 基为

$$E_{ij} - E_{-j,-i},\ E_{ji} - E_{-i,-j}, E_{-i,j} - E_{-j,i},\ E_{i,-j} - E_{j,-i},$$

其中 $1 \leq i < j \leq l$, 记

$$e_i = \frac{1}{4l-4}(E_{-i,-i} - E_{ii}),\ 1 \leq i \leq l,$$

则根系

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq l\},$$

单根系

$$\Pi = \{e_i - e_{i+1},\quad 1 \leq i \leq l-1,\ e_{l-1} + e_l\},$$

所以 $\dim D_l = l(2l-1)$, $\operatorname{rank} \mathrm{D}_l = l$, $l \geq 4$.

上面四类李代数称为四大类典型复单李代数. 余下五个特殊的复单李代数, 它们是 $\mathrm{G}_2, \mathrm{F}_4, \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8$. 它们的实现问题也已解决, 但是描述起来比较复杂.

我们给出它们的根系和单根系. 为此, 记 $e_1, \cdots, e_m \in \mathbb{R}^m$ 为关于标准 Euclid 内积的标准正交基, 记 $e^{(i)} = e_1 + e_2 + \cdots + e_i$, $1 \leq i \leq m$. 于是对 $\mathrm{G}_2, \mathrm{F}_4, \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8$ 分别取 $m = 3, 4, 6, 7, 8$, 有

(5) $\dim \mathrm{G}_2 = 14$, $\operatorname{rank} \mathrm{G}_2 = 2$, 根系

$$\Delta = \{\pm(e_1 - e_2),\ \pm(e_1 - e_3),\ \pm(e_2 - e_3), \pm(e^{(3)} - 3e_i),\ i = 1, 2, 3\ \},$$

单根系

$$\Pi = \{e_1 - e_2,\ -e^{(3)} + 3e_2\}.$$

(6) $\dim \mathrm{F}_4 = 52$, $\operatorname{rank} \mathrm{F}_4 = 4$, 根系

$$\Delta = \{\ \pm e_i,\ i = 1, 2, 3, 4,\ \pm(e_i \pm e_j),\ 1 \le i < j \le 4,\ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e^{(4)})\ \},$$

单根系

$$\Pi = \{e_1 - e_2,\ e_2 - e_3,\ e_3,\ -\frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4)\ \}.$$

(7) $\dim \mathrm{E}_6 = 78$, $\operatorname{rank} \mathrm{E}_6 = 6$, 根系

$$\Delta = \{\ \pm (e_i - e_j),\ 1 \le i < j \le 6,\ \pm\sqrt{2}e_7,\ \pm (\frac{1}{\sqrt{2}}e_7 + \frac{1}{2}e^{(6)} - e_i - e_j - e_k),\ 1 \le i < j < k \le 6\ \},$$

单根系

$$\Pi = \{e_i - e_{i+1}, 1 \le i \le 5,\ \frac{1}{\sqrt{2}}e_7 + \frac{1}{2}e^{(6)} - e_1 - e_2 - e_3\ \}.$$

(8) $\dim \mathrm{E}_7 = 133$, $\operatorname{rank} \mathrm{E}_7 = 7$, 根系

$$\Delta = \{\ \pm (e_i - e_j),\ 1 \le i < j \le 8,\ \pm (\frac{1}{2}e^{(8)} - e_i - e_j - e_k - e_l),\ 1 \le i < j < k < l \le 8\ \},$$

单根系

$$\Pi = \{e_i - e_{i+1}, 1 \le i \le 7,\ \frac{1}{2}e^{(8)} - e_1 - c_2 - e_3 - e_4\ \}.$$

(9) $\dim \mathrm{E}_8 = 248$, $\operatorname{rank} \mathrm{E}_8 = 8$, 根系

$$\Delta = \{ \pm e_i \pm e_j,\ 1 \le i < j \le 8,\ \pm(\frac{1}{2}e^{(8)} - e_i),\ 1 \le i \le 8,$$
$$\pm(\frac{1}{2}e^{(8)} - e_i - e_j - e_k),\ 1 \le i < j < k \le 8 \},$$

单根系

$$\Pi = \{e_i - e_{i+1}, 1 \le i \le 7,\ e_6 + e_7,\ -\frac{1}{2}e^{(8)} + e_8 \}.$$

§ 1.3 复半单李代数的表示

在这一节中，我们引进李代数的表示概念，并且给出复半单李代数的表示的分类.

取定域 F 及 F 上的线性空间 V. 记 $\mathrm{gl}(n,F)$ 为 n 阶一般矩阵李代数， $\mathrm{gl}(V)$ 为 n 阶一般线性李代数. 我们有

定义 1.3.1 域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 到一般线性李代数 $\mathrm{gl}(V)$ 内的同态映射 ρ 称为 **表示**, 确切地说，是李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **线性表示**, 这时， V 称为 **表示空间**, 所以可确切地写成 (ρ, V).

域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 到一般矩阵李代数 $\mathrm{gl}(n,F)$ 内的同态映射 ρ 称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **矩阵表示**.

显然，在表示空间 V 中取定基后，李代数的线性表示变成矩阵表示. 另一方面，由 Ado 定理可知，特征零的域上的李代数必有一个一一的表示.

由于伴随表示 $x \to \mathrm{ad}\, x, \forall x \in \mathfrak{L}$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的一种特殊的表示，而 1.2 节展开的复半单李代数的构造理论实际上是 **伴随表示论**. 这从这一节的内容可知.

注意到给定域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$, 若 $\mathfrak{L}$ 有表示 (ρ, V), 则 $\rho(\mathfrak{L}) \subset \mathrm{gl}(V)$, 且

$$\rho([x,y]) = [\rho(x), \rho(y)] = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x), \forall x, y \in \mathfrak{L},$$

这里用到了线性变换的乘积. 实际上, 熟知所有域 F 上的 $n\times n$ 矩阵, 在矩阵的加法、纯量积及乘法下构成一个单结合代数. 因此 $\mathrm{gl}(V)$ 为单结合代数, 又在

$$[\mathcal{A},\mathcal{B}]=\mathcal{A}\mathcal{B}-\mathcal{B}\mathcal{A},\quad \forall \mathcal{A},\mathcal{B}\in \mathrm{gl}(V)$$

下构成李代数.

作为李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示 (ρ,V), 则 $\rho(V)$ 为 $\mathrm{gl}(V)$ 的线性变换集, 它生成 $\mathrm{gl}(V)$ 的结合子代数 $\mathfrak{M}$. 自然地, 在李代数 $\mathfrak{L}$ 中取基 $e_1,\cdots,e_n$, 则 $\rho(e_1),\cdots,\rho(e_n)$ 生成的结合子代数为 $\mathfrak{M}$; 生成的李代数为 $\rho(\mathfrak{L})$. 从与李代数表示相关联的结合代数出发, 我们希望严格地构造一个结合代数. 为此引进

定义 1.3.2 设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的李代数. $\mathfrak{U}$ 为域 F 上的含幺元的 **结合代数**, 它按 $[a,b]=ab-ba$ 构成李代数. 若存在李代数 $\mathfrak{L}$ 到李代数 $\mathfrak{U}$ 内的李代数同态 ρ, 使得幺元及元素集 $\rho(\mathfrak{L})$ 生成结合代数 $\mathfrak{U}$, 则结合代数 $\mathfrak{U}$ 称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **包络代数**.

现在从域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 出发, 构造一个结合代数如下: 记 $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ 为线性空间 $\mathfrak{L}$ 的 **张量代数**, 即记域 F 的幺元为 1, 记 $\Lambda^0=\{\lambda|\forall\lambda\in F\}$, $\Lambda^1=\mathfrak{L}$, Λ^k 为由 $\{x_1\otimes\cdots\otimes x_k|\forall x_i\in\mathfrak{L},1\le i\le k\}$ 线性生成的域 F 上的线性空间. 构作形式和

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{L})=\sum_{k=0}^{\infty}\Lambda^k,$$

其中元素理解为有限多个 Λ^k 中元素的和. 显然, $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ 为域 F 上的线性空间. 在 $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ 中引进乘法

$$(\sum a_k)\otimes(\sum b_l)=\sum a_k\otimes b_l,$$

其中 $a_k\otimes b_l\in\Lambda^{k+l}$, $\forall a_k\in\Lambda^k$, $b_l\in\Lambda^l$,

$$\lambda\otimes x=x\otimes\lambda=\lambda x,\quad \forall\lambda\in F,\ x\in\mathfrak{U}(\mathfrak{L}).$$

不难证明, 这时 $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ 为无限维含幺元结合代数, 其中域 F 的幺元为 $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ 的幺元. 显然它不适合乘法交换律. 又张量代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$

中有基元素

$$1, \quad e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_k}, \quad 1\le i_1,\cdots,i_k\le n, \quad k=1,2,\cdots,$$

其中 $e_1,\cdots,e_n$ 为线性空间 $\mathfrak{L}$ 的基.

定义 1.3.3 记张量代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ 的元素集

$$\{\, x\otimes y-y\otimes x-[x,y]\mid \forall x,y\in\mathfrak{L}\,\}$$

生成 $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ 的双边理想为 $J(\mathfrak{L})$, 则商代数

$$U(\mathfrak{L})=\mathfrak{U}(\mathfrak{L})/J(\mathfrak{L})$$

称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **特殊包络代数**.

引理 1.3.4 李代数 $\mathfrak{L}$ 的特殊包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的包络代数.

证 在特殊包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 中，记

$$1=1+J(\mathfrak{L}),\ f_i=e_i+J(\mathfrak{L}),\ 1\le i\le n.$$

由于张量代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ 有基 $1, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_k}, 1\le i_1,\cdots,i_k\le n, k=1,2,\cdots$, 所以特殊包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 有线性生成元素

$$1,\ f_{i_1}f_{i_2}\cdots f_{i_k},\ 1\le i_1,\cdots,i_i\le n,\ k=1,2,\cdots.$$

一方面，由于张量代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ 有生成元素 $1,e_1,\cdots,e_n$, 所以特殊包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 有生成元素 $1,f_1,\cdots,f_n$. 另一方面，由于 $\mathfrak{L}$ 为李代数，它有乘法表

$$[e_i,e_j]=\sum_k C_{ij}^k e_k,\ 1\le i,j\le n.$$

由张量代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ 的双边理想 $J(\mathfrak{L})$ 的定义，可知特殊包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 中有

$$(x\otimes y+J(\mathfrak{L}))-(y\otimes x+J(\mathfrak{L}))=[x,y]+J(\mathfrak{L}),\ \forall x,y\in\mathfrak{L}.$$

所以由

$$e_i\otimes e_j-e_j\otimes e_i\equiv[e_i,e_j]=\sum_k C_{ij}^k e_k,\ (\mathrm{mod}\, J(\mathfrak{L})),$$

便证明了在特殊包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 中有

$$f_i f_j - f_j f_i = \sum_k C_{ij}^k f_k.$$

在特殊包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 中引进换位运算 $[x,y] = xy - yx, \forall x, y \in U(\mathfrak{L})$, 所以证明了 $\rho : \sum \lambda_i e_i \to \sum \lambda_i f_i, \forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in F$ 给出李代数 $\mathfrak{L}$ 到特殊包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 作为李代数的到内的同构, 且 $1, f_1, \cdots, f_n$ 生成特殊包络代数. 由定义可知特殊包络代数为包络代数. 证完.

引理 1.3.5 设 (σ, V) 为域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示, $U(\sigma)$ 为表示 (σ, V) 的包络代数, 则存在结合代数同态 $\xi : U(\mathfrak{L}) \to U(\sigma)$, 有 $\xi(1) = 1$, 且 $\xi \circ \rho = \sigma$ 在李代数 $\mathfrak{L}$ 上成立, 其中 ρ 由引理 1.3.4 定义, 即有 $\rho(\sum \lambda_i e_i) = \sum \lambda_i f_i$.

证 我们只要证

$$\xi(1) = 1, \quad \xi(f_i) = \sigma(e_i), \quad 1 \leq i \leq n,$$

可开拓到特殊包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 上, 使得它为结合代数同态, 即证明

$$\xi(\sum \lambda_{i_1 i_2 \cdots i_k} f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_k}) = \sum \lambda_{i_1 i_2 \cdots i_k} \sigma(e_{i_1}) \sigma(e_{i_2}) \cdots \sigma(e_{i_k})$$

有意义. 事实上, 若

$$\sum \lambda_{i_1 \cdots i_k} f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_k} = \sum \mu_{j_1 j_2 \cdots j_t} f_{j_1} f_{j_2} \cdots f_{j_t},$$

即

$$\sum \lambda_{i_1 \cdots i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \equiv \sum \mu_{j_1 \cdots j_t} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_t}, (\mathrm{mod}\, J(\mathfrak{L})),$$

利用关系

$$e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i \equiv [e_i, e_j], (\mathrm{mod}\, J(\mathfrak{L}))$$

经有限步, 可将 $\sum \lambda_{i_1 \cdots i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$ 变为 $\sum \mu_{j_1 \cdots j_t} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_t}$. 由于

$$\sigma(e_i)\sigma(e_j) - \sigma(e_j)\sigma(e_i) = [\sigma(e_i), \sigma(e_j)] = \sigma([e_i, e_j]),$$

所以利用此关系也可将

$$\sum \lambda_{i_1\cdots i_k}\sigma(e_{i_1})\cdots\sigma(e_{i_k})$$

同步地变为

$$\sum \mu_{j_1\cdots j_t}\sigma(e_{j_1})\cdots\sigma(e_{j_t}).$$

这证明了断言，即 ξ 的定义有意义. 显然，ξ 为结合代数同态. 证完.

由此，我们引进

定义 1.3.6 设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的李代数，$\mathfrak{L}$ 的由同态 ρ 决定的包络代数 $\widetilde{U}(\mathfrak{L})$ 称为 **通用包络代数**, 如果记李代数 $\mathfrak{L}$ 的任一表示 (σ_1, V) 决定的包络代数为 $U(\sigma)$, 则存在结合代数 $\widetilde{U}(\mathfrak{L})$ 到 $U(\sigma)$ 上的同态 ξ, 使得 $\xi(1)=1, \xi\circ\rho=\sigma$.

由定义及引理 1.3.4 和引理 1.3.5 可得

定理 1.3.7 域 F 上的特殊包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 为通用包络代数.

下面给出通用包络代数在结合代数同构下的唯一性定理.

定理 1.3.8 设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的李代数，若 $\mathfrak{L}$ 有通用包络代数 $U_1(\mathfrak{L}), U_2(\mathfrak{L})$, 则存在结合代数 $U_1(\mathfrak{L})$ 到 $U_2(\mathfrak{L})$ 上的同构 τ, 使得在李代数 $\mathfrak{L}$ 上有

$$\tau\circ\rho_1=\rho_2,$$

其中 ρ_i 为决定包络代数 $U_i(\mathfrak{L})$ 的李代数 $\mathfrak{L}$ 的同态 ,$i=1,2$.

证 任取李代数 $\mathfrak{L}$ 的基 $e_1,\cdots,e_n$. 由定义，设结合代数 $U_i(\mathfrak{L})$ 由 $1,\rho_i(e_1),\cdots,\rho_i(e_n)$ 生成，$i=1,2$. 由通用包络代数的定义，可知存在包络代数 $U_1(\mathfrak{L})$ 到 $U_2(\mathfrak{L})$ 内的结合代数同态 τ, 使得在 $\mathfrak{L}$ 上有 $\tau\circ\rho_1=\rho_2$. 同理，存在包络代数 $U_2(\mathfrak{L})$ 到 $U_1(\mathfrak{L})$ 内的同态 τ', 使得 $\tau'\circ\rho_2=\rho_1$. 于是，在李代数 $\mathfrak{L}$ 上有 $\tau\circ\tau'\circ\rho_2=\tau\circ\rho_1=\rho_2$，$\tau'\circ\tau\circ\rho_1=\tau'\circ\rho_2=\rho_1$. 又有 $\tau(1)=1,\tau'(1)=1$. 因此在李代数 $\mathfrak{L}$ 上有 $(\tau\circ\tau')\circ\rho_2=\rho_2$，$(\tau'\circ\tau)\circ\rho_1=\rho_1$. 令 $\tau\circ\tau'$ 为 $U_2(\mathfrak{L})$ 到 $U_2(\mathfrak{L})$ 的结合代数自同态，$\tau'\circ\tau$ 为结合代数 $U_1(\mathfrak{L})$ 到 $U_1(\mathfrak{L})$ 的自同态，而 1 及 $\rho_1(e_j)$, $1\le j\le n$ 生成 $U_1(\mathfrak{L})$. 这证

明了 $\tau'\circ\tau=\mathrm{id}$. 同理 $\tau\circ\tau'=\mathrm{id}$. 因此, τ 为结合代数 $U_1(\mathfrak{L})$ 到 $U_2(\mathfrak{L})$ 上的同构. 证完.

由上面的唯一性定理可知我们构造的特殊的通用包络代数的重要性. 下面我们来给出通用包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 的 PBW 基. 为此, 我们来构作 n 维李代数 $\mathfrak{L}$ 的一个特殊的表示.

引理 1.3.9 记 $F[x]=F[x_1,\cdots,x_n]$ 为域 F 上的 n 元多项式环, $F_p[x]$ 为 $F[x]$ 中次数不超过 p 的多项式全体构成的子空间, 则唯一存在域 F 上的 n 维李代数 $\mathfrak{L}$ 到 $\mathrm{gl}(F[x])$ 内的表示 ρ, 它有

$$\rho(e_i)1=x_i,\ 1\le i\le n, \tag{1.3.1}$$

$$\rho(e_i)x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_p}=x_ix_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_p}, \tag{1.3.2}$$

其中

$$1\le i\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_p\le n,\quad p=1,2,\cdots,$$

$$\rho(e_i)x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_p}\equiv x_ix_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_p},(\mathrm{mod}\,F_p[x]), \tag{1.3.3}$$

其中

$$i_1<i,\quad 1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_p\le n,\quad p=1,2,\cdots.$$

证 今显然线性空间 $F[x]$ 有基 1 及

$$x_{i_1i_2\cdots i_p}=x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_p},\ 1\le i_1\le\cdots\le i_p\le n,\ p=1,2,\cdots. \tag{1.3.4}$$

为了使得 ρ 为表示, 我们希望有

$$\begin{aligned}\rho([e_i,e_j])=\sum_k C_{ij}^k\rho(e_k)&\equiv[\rho(e_i),\rho(e_j)]\\&=\rho(e_i)\rho(e_j)-\rho(e_j)\rho(e_i).\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

另一方面, 为了明显起见, 我们改记

$$\rho(e_i)\cdot1=e_i\otimes1,\quad \rho(e_i)x_{i_1i_2\cdots i_p}=e_i\otimes x_{i_1i_2\cdots i_p}, \tag{1.3.6}$$

即考虑张量积 $\mathfrak{L}\otimes F[x]$. 由于 $F[x]$ 为表示空间, 所以这给出映射 $\sigma:\mathfrak{L}\otimes F[x]\to F[x]$. 希望映射 σ 适合条件

$$\sigma(e_i\otimes1)=x_i,\quad 1\le i\le n, \tag{1.3.7}$$

$$\sigma(e_i \otimes x_{i_1 \cdots i_p}) = x_{i i_1 \cdots i_p}, \tag{1.3.8}$$

其中

$$1 \le i \le i_1 \le \cdots \le i_p \le n, \quad p = 1, 2, \cdots.$$

$$\sigma(e_i \otimes x_{i_1 \cdots i_p}) \equiv x_i x_{i_1 i_2 \cdots i_p}, \tag{1.3.9}$$

其中

$$i_1 < i, \quad 1 \le i_1 \le \cdots \le i_p \le n, \quad p = 1, 2, \cdots.$$

$$\begin{aligned} &\sigma(e_i \otimes \sigma(e_j \otimes x_{i_1 i_2 \cdots i_p})) - \sigma(e_j \otimes \sigma(e_i \otimes x_{i_1 i_2 \cdots i_p})) \\ = &\sigma([e_i, e_j] \otimes x_{i_1 i_2 \cdots i_p}), \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

其中

$$1 \le i < j \le n, \quad 1 \le i_1 \le \cdots \le i_p \le n, \quad p = 1, 2, \cdots.$$

$$\sigma(e_i \otimes \sigma(e_j \otimes 1)) - \sigma(e_j \otimes \sigma(e_i \otimes 1)) = \sigma([e_i, e_j] \otimes 1), \tag{1.3.11}$$

其中 $1 \le i < j \le n$.

显然，条件 (1.3.11) 和条件 (1.3.10) 等价于条件 (1.3.5). 事实上，有

$$\sigma(e_i \otimes x_{i_1 i_2 \cdots i_p}) = \rho(e_i) x_{i_1 i_2 \cdots i_p}.$$

下面来证明映射 σ 的唯一存在性. 为此, 对 $p = 0, 1, 2, \cdots$ 作归纳法. 取 $p = 0$, 由式 (1.3.7) 及 (1.3.11), 有 $\sigma(e_i \otimes x_j) - \sigma(e_j \otimes x_i) = \sum_k C_{ij}^k x_k$, 这里， $i < j$. 由式 (1.3.8), 有 $\sigma(e_i \otimes x_j) = x_i x_j$, 即有

$$\sigma(e_j \otimes x_i) = x_i x_j - \sum_k C_{ij}^k x_k. \tag{1.3.12}$$

这证明了当 $i < j$ 时有 $\sigma(e_j \otimes x_i) \equiv x_i x_j \pmod{F_2[x]}$, 即条件 (1.3.7) 成立. 至此证明了当 $p = 0$ 时存在映射 σ. 由条件 (1.3.12) 可知 σ 唯一.

设在 p 时适合条件 (1.3.8),(1.3.9),(1.3.10) 的映射 σ 唯一存在. 现在考虑情形 $p + 1$. 为此，我们首先定义

$$\sigma(e_i \otimes x_{i_1 i_2 \cdots i_p}) = x_{i i_1 i_2 \cdots i_{p+1}}, \; 1 \le i \le i_1 \le \cdots \le i_{p+1} \le n.$$

因此问题化为如何来确切地定义 $\sigma(e_j\otimes x_{i_1i_2\cdots i_{p+1}})$，其中

$$1\leq i_1\leq\cdots\leq i_k<j\leq i_{k+1}\leq\cdots\leq i_{p+1}\leq n,$$

使得

$$\sigma(e_j\otimes x_{i_1i_2\cdots i_{p+1}})\equiv x_jx_{i_1i_2\cdots i_{p+1}},\ (\mathrm{mod}\ F_{p+1}[x]),$$

且有

$$\begin{aligned}&\sigma(e_i\otimes\sigma(e_j\otimes x_{i_1i_2\cdots i_{p+1}}))-\sigma(e_j\otimes\sigma(e_i\otimes x_{i_1i_2\cdots i_{p+1}}))\\=&\sum_k C_{ij}^k\sigma(e_k\otimes x_{i_1i_2\cdots i_{p+1}}),\end{aligned}$$

其中 $i<j$, $1\leq i_1\leq\cdots\leq i_{p+1}\leq n$.

下面分情形讨论：

(1) 设 $i\leq i_1$, $i<j$, $1\leq i_1\leq\cdots\leq i_p\leq n$.

由归纳法假设，这时 $\sigma(e_j\otimes x_{i_1i_2\cdots i_p})=x_jx_{i_1i_2\cdots i_p}+a_j$，其中 $a_j\in F_p[x]$ 是确切定义好的，且当 $j\leq i_1$ 时有 $a_j=0$. 于是

$$\begin{aligned}\sigma(e_i\otimes\sigma(e_j\otimes x_{i_1i_2\cdots i_p}))&=\sigma(e_i\otimes(x_jx_{i_1\cdots i_p}+a_j))\\&=x_ix_jx_{i_1i_2\cdots i_p}+\sigma(e_i\otimes a_j).\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\sigma(e_j\otimes\sigma(e_i\otimes x_{i_1i_2\cdots i_p}))&=\sigma(e_j\otimes x_{ii_1i_2\cdots i_p}),\\\sigma([e_i,e_j]\otimes x_{i_1i_2\cdots i_p})&=\sum_k C_{ij}^k\sigma(e_k\otimes x_{i_1i_2\cdots i_p})\\&=\sum_k C_{ij}^k(x_kx_{i_1i_2\cdots i_p}+a_k).\end{aligned}$$

这时，式 (1.3.10) 要求

$$\begin{aligned}&x_ix_jx_{i_1i_2\cdots i_p}+\sigma(e_i\otimes a_j)-\sigma(e_j\otimes x_{ii_1i_2\cdots i_p})\\=&\sum_k C_{ij}^k(x_kx_{i_1i_2\cdots i_p}+a_k).\end{aligned}$$

这证明了

$$\begin{aligned}&\sigma(e_j\otimes x_{ii_1i_2\cdots i_p})\\=&\sigma(e_i\otimes a_j)+x_ix_jx_{i_1i_2\cdots i_p}-\sum_k C_{ij}^k(x_kx_{i_1i_2\cdots i_p}+a_k).\end{aligned}$$

注意到 $\sigma(e_i\otimes a_j)$ 是已确定的 $F_{p+1}[x]$ 的元素， a_k 是已确定的 $F_p[x]$ 的元素，这证明了 $\sigma(e_j\otimes x_{i_1i_2\cdots i_{p+1}})$ 为已确定的元素，其中 $i_1<j, 1\leq i_1\leq\cdots\leq i_{p+1}\leq n$，且有

$$\sigma(e_j\otimes x_{i_1i_2\cdots i_{p+1}})\equiv x_jx_{i_1i_2\cdots i_{p+1}},\ (\operatorname{mod} F_{p+1}[x]).$$

至此证明了当 $i<j, i\leq i_1, 1\leq i_1\leq\cdots\leq i_p\leq n$ 时断言成立.

(2) 设 $1\leq i_1\leq\cdots\leq i_k<i\leq i_{k+1}\leq\cdots\leq i_l<j\leq i_{l+1}\leq\cdots\leq i_p\leq n$. 由归纳法假设有

$$\begin{aligned}&\sigma(e_i\otimes\sigma(e_j\otimes x_{i_1i_2\cdots i_p}))-\sigma(e_j\otimes\sigma(e_i\otimes x_{i_1i_2\cdots i_p}))\\=&\sigma([e_i,e_j]\otimes x_{i_1i_2\cdots i_p})=\sum_k C_{ij}^k\sigma(e_k\otimes x_{i_1i_2\cdots i_p}).\end{aligned}$$

由归纳法假设，我们已定义好 $\sigma(e_k\otimes x_{i_1i_2\cdots i_p})\in F_{p+1}[x]$，因此，只要给出 $\sigma(e_i\otimes\sigma(e_j\otimes x_{i_1i_2\cdots i_p}))$ 及 $\sigma(e_j\otimes\sigma(e_i\otimes x_{i_1i_2\cdots i_p}))$ 的明确定义就够了. 今由归纳法假设，有

$$\begin{aligned}&\sigma(e_i\otimes\sigma(e_j\otimes x_{i_2\cdots i_p}))=\sigma(e_i\otimes\sigma(e_j\otimes\sigma(e_{i_1}\otimes x_{i_2\cdots i_p})))\\=&\sigma(e_i\otimes\sigma(e_{i_1}\otimes\sigma(e_j\otimes x_{i_2\cdots i_p})))+\sigma(e_i\otimes\sigma([e_j,e_{i_1}]\otimes x_{i_2\cdots i_p})\\=&\sigma(e_{i_1}\otimes\sigma(e_i\otimes\sigma(e_j\otimes x_{i_2\cdots i_p})))+\sigma([e_i,e_{i_1}]\otimes\sigma(e_j\otimes x_{i_2\cdots i_p}))\\&+\sigma([e_j,e_{i_1}]\otimes\sigma(e_i\otimes x_{i_2\cdots i_p}))+\sigma([e_i,[e_j,e_{i_1}]]\otimes x_{i_2\cdots i_p}).\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}&\sigma(e_j\otimes\sigma(e_i\otimes x_{i_1i_2\cdots i_p}))\\=&\sigma(e_{i_1}\otimes\sigma(e_j\otimes\sigma(e_i\otimes x_{i_2\cdots i_p})))+\sigma([e_j,e_{i_1}]\otimes\sigma(e_i\otimes x_{i_2\cdots i_p}))\\&+\sigma([e_i,e_{i_1}]\otimes\sigma(e_j\otimes x_{i_2\cdots i_p}))+\sigma([e_j,[e_i,e_{i_1}]]\otimes x_{i_2\cdots i_p}).\end{aligned}$$

今

$$\begin{aligned}&\sigma([e_i,[e_j,e_{i_1}]]\otimes x_{i_2\cdots i_p}),\\&\sigma([e_j,e_{i_1}]\otimes\sigma(e_i\otimes x_{i_2\cdots i_p})),\\&\sigma([e_i,e_{i_1}]\otimes\sigma(e_j\otimes x_{i_2\cdots i_p}))\end{aligned}$$

都由归纳法假设已经定义好了. 而对 $\sigma(e_{i_1}\otimes\sigma(e_i\otimes\sigma(e_j\otimes x_{i_2\cdots i_p})))$，已知 $\sigma(e_i\otimes\sigma(e_j\otimes x_{i_2\cdots i_p}))\in F_{p+1}[x]$ 是已经定义好的元素，记

作 $x_ix_jx_{i_2\cdots i_p}+a_{ij}$, 其中 $a_{ij}\in F_p[x]$. 令 $i_1<i,j,i_2,\cdots,i_p$, 由式(1.3.9) 可知 $\sigma(e_i\otimes x_ix_jx_{i_2\cdots i_p})$ 也已定义好. 而 $\sigma(e_{i_1}\otimes a_{ij})$ 也已定义好. 总之, 我们定义了 $\sigma(e_i\otimes\sigma(e_j\otimes x_{i_1\cdots i_p}))$. 同理, 定义了 $\sigma(e_j\otimes\sigma(e_i\otimes x_{i_1\cdots i_p}))$, 且这时有

$$\begin{aligned}&\sigma(e_i\otimes\sigma(e_j\otimes x_{i_1\cdots i_p}))-\sigma(e_j\otimes\sigma(e_i\otimes x_{i_1\cdots i_p}))\\=&\sigma(e_{i_1}\otimes\sigma([e_i,e_j]\otimes x_{i_2\cdots i_p}))\\&+\sigma(([e_i,[e_j,e_{i_1}]]-[e_j,[e_i,e_{i_1}]])\otimes x_{i_2\cdots i_p})\\=&\sigma(e_{i_1}\otimes\sigma([e_i,e_j]\otimes x_{i_2\cdots i_p}))+\sigma([[e_i,e_j],e_{i_1}]\otimes x_{i_2\cdots i_p})\\=&\sigma([e_i,e_j]\otimes x_{i_1i_2\cdots i_p}).\end{aligned}$$

所以实际上我们定义了 $\sigma(e_i\otimes x_{j_1\cdots j_{p+1}}),1\le i\le n,1\le j_1\le\cdots\le j_{p+1}\le n$. 由归纳法便证明了表示 ρ 的唯一存在性. 引理证完.

现在证明

定理 1.3.10(Poincaré-Birkhoff-Witt 定理) 设 $e_1,\cdots,e_n$ 为域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的一组基, 则通用包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 有基

$$f_1^{i_1}f_2^{i_2}\cdots f_n^{i_n},\ i_1,i_2,\cdots,i_n=0,1,2,\cdots,$$

称为 **PBW 基**.

证 已知通用包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 有线性生成元素 $1,f_{i_1}f_{i_2}\cdots f_{i_p}$, $1\le i_1,\cdots,i_p\le n$, $p=1,2,\cdots$. 然而 $f_if_j-f_jf_i=\sum\limits_k C_{ij}^kf_k$, 所以当 $i>j$ 时有

$$f_if_j=f_jf_i+\sum_k C_{ij}^kf_k.$$

而若 $f_{i_1}f_{i_2}\cdots f_{i_p}$ 中有 $i_l>i_{l+1}$, 则

$$f_{i_1}f_{i_2}\cdots f_{i_p}=f_{i_1}\cdots f_{i_{l-1}}([f_{i_l},f_{i_{l+1}}]+f_{i_{l+1}}f_{i_l})f_{i_{l+2}}\cdots f_{i_p}.$$

由此立即可证

$$f_{i_1}f_{i_2}\cdots f_{i_p}=\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_n\le p\\ j_1\ge0,\cdots,j_n\ge0}}\lambda_{j_1j_2\cdots j_n}f_1^{j_1}f_2^{j_2}\cdots f_n^{j_n},$$

其中 $\lambda_{j_1j_2\cdots j_n}\in F$. 所以证明了通用包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 有线性生成元素 $f_1^{i_1}f_2^{i_2}\cdots f_n^{i_n}$, $i_1,\cdots,i_n=0,1,\cdots$. 为了证明它们构成通用包络代数的基，只要证

$$\sum a_{i_1i_2\cdots i_n}f_1^{i_1}f_2^{i_2}\cdots f_n^{i_n}=0$$

蕴含 $a_{i_1i_2\cdots i_n}=0,\ \forall i_j$.

今由引理 1.3.9, 我们有表示 $(\rho,F[x])$, 使得 $\rho(\mathfrak{L})$ 及么元 1 生成包络代数 $U(\rho)$. 由引理 1.3.5 可知存在结合代数同态 $\xi:U(\mathfrak{L})\to U(\rho)$, 有 $\xi(1)=1$, 且 $\xi\circ\widetilde{\rho}=\rho$, 其中

$$\widetilde{\rho}(\sum\lambda_ie_i)=\sum\lambda_if_i,\quad \xi(f_{i_1}\cdots f_{i_p})=\rho(e_{i_1})\rho(e_{i_2})\cdots\rho(e_{i_p}),$$

$1\le i_1,\cdots i_p\le n$, $p=1,2,\cdots$.

由 $\sum a_{i_1i_2\cdots i_n}f_1^{i_1}f_2^{i_2}\cdots f_n^{i_n}=0$ 推出

$$\sum a_{i_1i_2\cdots i_n}\rho(e_1)^{i_1}\rho(e_2)^{i_2}\cdots\rho(e_n)^{i_n}=0.$$

作用在 1 上，有

$$\begin{aligned}0=0(1)&=\sum a_{i_1i_2\cdots i_n}\rho(e_1)^{i_1}\rho(e_2)^{i_2}\cdots\rho(e_n)^{i_n}1\\&=\sum a_{i_1i_2\cdots i_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}.\end{aligned}$$

这里用到表示 ρ 的定义关系 (1.3.1) 和 (1.3.2), 但是

$$\sum a_{i_1i_2\cdots i_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$$

为多元多项式环 $F[x]$ 的元素. 由于 $x_1,\cdots,x_n$ 为独立未定元素，所以证明了 $a_{i_1i_2\cdots i_n}=0$. 至此证明了定理. 证完.

推论 设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的 n 维李代数，$U(\mathfrak{L})$ 为 $\mathfrak{L}$ 上的通用包络代数，则李代数 $\mathfrak{L}$ 到 $U(\mathfrak{L})$ 内的同态 σ 为同构.

证 今 $\sigma(\mathfrak{L})$ 为 $U(\mathfrak{L})$ 的生成元素. 对李代数 $\mathfrak{L}$ 的基 $e_1,\cdots,e_n$, 我们已知 $f_1=\sigma(e_1),\cdots,f_n=\sigma(e_n)$ 线性无关，这证明了 σ 为李代数同构. 证完.

由通用包络代数的性质可知，任取李代数的表示 (ρ, V)，则存在通用包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 到结合代数 $U(\rho)$ 上的同态 ξ，同态核为 $\xi^{-1}(0) = \ker(\xi)$，则 $\ker(\xi)$ 为通用包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 的双边理想，而 $U(\rho)$ 和 $U(\mathfrak{L})/\ker(\xi)$ 同构．因此，从包络代数的观点来看，李代数表示论就是求通用包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 的双边理想．

定义 1.3.11 设 (ρ_i, V_i) 为域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的两个表示．它们称为 **等价的**，如果存在表示空间 V_1 到 V_2 上的线性同构 σ，使得

$$\rho_2(x) \circ \sigma = \sigma \circ \rho_1(x), \quad \forall x \in \mathfrak{L}.$$

显然，表示的等价为等价关系．给定李代数 $\mathfrak{L}$ 的所有表示，则它在表示等价下的分类就是李代数的表示论．李代数表示论是李代数的重要组成部分，它有大量的应用．

为了展示李代数的表示论，我们需要引进一系列概念如下：

定义 1.3.12 设 (ρ, V) 为域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示．表示空间 V 的子空间 V_0 称为 **不变子空间**，如果 $\rho(x)(V_0) \subset V_0$，$\forall x \in \mathfrak{L}$．这时李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示 (ρ, V) 限制在不变子空间 V_0 上，记作 $\rho(x)|_{V_0} = \rho_0(x)$，$\forall x \in \mathfrak{L}$，它仍为李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示，记作 (ρ_0, V_0)，称为表示 (ρ, V) 的 **子表示**．

定义 1.3.13 设 (ρ, V) 为域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示．表示 (ρ, V) 称为 **可约的**，如果表示空间 V 中有非零真不变子空间，否则称为 **不可约的**．

定义 1.3.14 设 (ρ, V) 为域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的可约表示，V_0 为表示空间 V 中非零的真不变子空间．则对 **商空间**V/V_0，可以定义线性变换

$$\widetilde{\rho_0}(x)(v + V_0) = \rho(x)v + V_0, \quad \forall x \in \mathfrak{L}.$$

显然，此定义和代表元素 v 的选取无关，只和等价类有关．而 $x \to \widetilde{\rho_0}(x)$，$\forall x \in \mathfrak{L}$ 给出李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示 $(\widetilde{\rho_0}, V/V_0)$，称为李代数表示 (ρ, V) 的 **商表示**．

下面给出域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的子表示和商表示的矩阵表达式，即考虑矩阵表示的子表示及商表示.

设 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的李代数，(ρ,V) 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示. 设 V_0 为表示空间 V 的不变子空间. 在 V_0 中取基 $v_1,\cdots,v_r$, 再在表示空间 V 中拼出基 $v_1,\cdots,v_r,v_{r+1},\cdots,v_m$. 于是任取 $x\in\mathfrak{L}$, 有

$$\rho(x)v_i=\sum_{j=1}^{r}a_{ji}v_j,\ 1\le i\le r,$$

$$\rho(x)v_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}v_j,\ r+1\le i\le m.$$

线性变换 $\rho(x)$ 在基 $v_1,\cdots,v_m$ 下对应 $m\times m$ 方阵

$$\begin{pmatrix} A(x)^{(r)} & B(x)^{(r,n-r)} \\ 0 & C(x)^{(n-r)} \end{pmatrix},\quad \forall x\in\mathfrak{L},$$

其中 $x\to A(x),\forall x\in\mathfrak{L}$ 给出子表示 (ρ_0,V_0) 的矩阵表示，$x\to C(x),\forall x\in\mathfrak{L}$ 为商表示 $(\tilde{\rho_0},V/V_0)$ 的矩阵表示.

由此可见，所谓矩阵表示不可约，是指不存在域 F 上的常数非异方阵，使得矩阵表示中所有矩阵同时相似于同型上三角方阵，否则称为可约的. 这时，上三角方阵的对角块同时给出子表示和商表示的矩阵表示.

定义 1.3.15 设 (ρ,V) 为域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示. 如果表示空间 V 能分解为不变子空间 $V_1,\cdots,V_s$ 的直接和

$$V=V_1+\cdots+V_s,$$

使得表示 (ρ,V) 的子表示 (ρ_i,V_i) 都不可约，则表示 (ρ,V) 称为**完全可约**. 这时，我们记

$$\rho=\rho_1+\cdots+\rho_s.$$

由可约、不可约及完全可约的定义，立即有

引理 1.3.16 设 (ρ,V) 为域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示. 表示 (ρ,V) 的子表示 (ρ_0,V_0) 不可约当且仅当表示空间 V 的子空间 V_0

为极小不变子空间. 因此, 表示 (ρ, V) 完全可约当且仅当表示空间 V 能分解为极小不变子空间的直接和, 当且仅当在表示空间 V 中存在一组基, 在这组基下表示 (ρ, V) 诱导的矩阵表示中元素同时表示为同类型准对角方阵, 且相应对角块给出不可约矩阵表示.

一般来说, 李代数的表示不一定完全可约, 只有在复半单李代数的情形, H.Weyl 证明了

定理 1.3.17 复半单李代数的表示必完全可约.

由这个定理可知, 复半单李代数的表示分类化为不可约表示的分类. 这个定理, 我们将在第四章中给出证明. 现在我们承认此定理成立即可.

现在回到一般情形. 虽然对任意李代数的任意表示不一定完全可约, 但也有部分表示完全可约. 为了进一步讨论, 先给出重要的

引理 1.3.18(Schur 引理) 设 (ρ_i, V_i) 为域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的不可约表示, $i = 1, 2$. 设 σ 为表示空间 V_1 到 V_2 内的线性映射, 它适合

$$\rho_2(x) \circ \sigma = \sigma \circ \rho_1(x),\ \forall x \in \mathfrak{L},$$

则 $\sigma = 0$, 或者 σ 为表示空间 V_1 到 V_2 上的线性同构. 因此, 表示 (ρ_1, V_1) 和 (ρ_2, V_2) 互相等价.

证 若 $\sigma = 0$, 则不必再讨论. 设 $\sigma \neq 0$, 则 σ 的核 $\ker(\sigma) \neq V_1$. 任取 $v \in \ker(\sigma)$, 有 $\sigma(v) = 0$. 于是 $\sigma(\rho_1(x)v) = \rho_2(x)(\sigma(v)) = 0$. 这证明了 $\rho_1(x)v \in \ker(\sigma)$, $\forall v \in \ker(\sigma)$, $x \in \mathfrak{L}$, 即 $\ker(\sigma)$ 为表示 (ρ_1, V_1) 的不变子空间. 由表示不可约及 $\ker(\sigma) \neq V$, 可知 $\ker(\sigma) = 0$, 即 σ 为线性同构.

再任取 $v \in V_1$, 则 $\rho_2(x)(\sigma(v)) = \sigma(\rho_1(x)v) \in \sigma(V_1)$. 这证明了表示空间 V_2 的子空间 $\sigma(V_1)$ 为不变子空间. 由表示不可约及 $\sigma \neq 0$ 可知 $\sigma(V_1) = V_2$. 这证明了 σ 为表示空间 V_1 到 V_2 上的线性同构. 证完.

推论 设 (ρ, V) 为代数闭域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示. 表示

空间 V 上的线性映射 σ 若有

$$\rho(x) \circ \sigma = \sigma \circ \rho(x),\ \forall\, x \in \mathfrak{L},$$

则存在 $\lambda_0 \in F$, 使得 $\sigma = \lambda_0(\mathrm{id})$.

证　若 $\sigma = 0$, 则不必再讨论. 设 $\sigma \neq 0$, 记 λ_0 为 σ 的特征值. 对不可约表示 (ρ_0, V_0) 和 (ρ, V_{ij}), 由 Schur 引理可知 $\tau = \sigma - \lambda_0(\mathrm{id})$ 为表示空间 V 上的线性自同构或为零. 但是 $\det \tau = 0$, 这证明了 $\tau = 0$, 即 $\sigma = \lambda_0(\mathrm{id})$. 证完.

设李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示 $(\rho,\ V)$ 完全可约, 我们来证明下面的唯一性定理, 即证明

定理 1.3.19　设 $(\rho,\ V)$ 为域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的完全可约表示, 即 ρ 能分解为不可约表示 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_s$ 的和

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_s,$$

则在表示等价的意义下, 上述分解不计次序唯一.

证　设表示空间 V 有极小不变子空间分解

$$V = (V_{11} + \cdots + V_{1s_1}) + \cdots + (V_{r1} + \cdots + V_{rs_r}),$$

相应地表示分解为

$$\rho = (\rho_{11} + \cdots + \rho_{1s_1}) + \cdots + (\rho_{r1} + \cdots + \rho_{rs_r}),$$

其中 $\rho_{i1}, \cdots, \rho_{is_i}$ 互相等价, $\rho_{11}, \cdots, \rho_{r1}$ 互相不等价.

设 V_0 为 V 的极小不变子空间. 我们来证存在 i, 使得 $V_0 \subset V_{i1} + \cdots + V_{is_i}$. 为此, 考虑投影映射 $p_{ij} : V \to V_{ij}$. 今任取 $v \in V$, 有 $v = \sum v_{uv}$, 其中 $v_{uv} \in V_{uv}$, 于是

$$p_{ij}\rho(x)v = p_{ij}\rho(x)\sum v_{uv} = \rho(x)v_{ij},$$
$$\rho(x)p_{ij}v = \rho(x)p_{ij}\sum v_{uv} = \rho(x)v_{ij}.$$

因此 $p_{ij}\rho(x) = \rho(x)p_{ij}$, $\forall\, x \in \mathfrak{L}$. 今 $V_0 \neq 0$, 所以存在指标 i, j, 使得 $p_{ij}(V_0) \neq 0$. 设 ρ_0 为极小不变子空间 V_0 定义的不可约表示.

由 $\rho(x)p_{ij}(V)\subset V_{ij}$, 所以考虑 $p_{ij}:V_0\to V_{ij}$, 则在极小不变子空间 V_0 上有 $p_{ij}\rho_0(x)=\rho(x)p_{ij}$, $\forall\, x\in\mathfrak{L}$, 其中 $\rho_0=\rho|_{V_0}$. 由 Schur 引理, 今 $p_{ij}(V_0)\neq 0$, 所以 p_{ij} 可逆. 这证明了 $p_{ij}(V_0)=V_{ij}$, 且 ρ_0 和 ρ_{ij} 等价. 因此 ρ_0 和 ρ_{kj} 不等价, $k\neq i$. 于是 $p_{kj}(V_0)=0$. 注意到 $\sum\limits_{u,v}p_{uv}=\mathrm{id}$, 所以证明了 $V_0\subset V_{i1}+\cdots+V_{is_i}$.

设表示 (ρ,V) 另有分解

$$V=(V'_{11}+\cdots+V'_{1t_1})+\cdots+(V'_{q1}+\cdots+V'_{qt_q}),$$

相应地子表示分解为

$$\rho=(\rho'_{11}+\cdots+\rho'_{1t_1})+\cdots+(\rho'_{q1}+\cdots+\rho'_{qt_q}),$$

其中 $\rho'_{i1},\cdots,\rho'_{it_i}$ 互相等价, $\rho'_{11},\cdots,\rho'_{q1}$ 互相不等价. 用上面关于不可约子表示 (ρ_0,V_0) 的讨论来考虑 ρ_{ij}, 所以证明了 $q=s$, 且重新编排次序, 无妨设 ρ_{i1} 和 ρ'_{i1} 互相等价. 因此还有

$$V_{i1}+\cdots+V_{is_i}=V'_{i1}+\cdots+V'_{it_i},\quad 1\leq i\leq s.$$

这样一来, 问题化为证明如下情形, 即

$$\begin{aligned}V&=V_1+\cdots+V_s=V'_1+\cdots+V'_t,\\ \rho&=\rho_1+\cdots+\rho_s=\rho'_1+\cdots+\rho'_t,\end{aligned}$$

其中 $\rho_1,\cdots,\rho_s,\rho'_1,\cdots,\rho'_t$ 都互相等价. 这时由表示等价的定义可知 $\dim V_i=\dim V'_j$, 因此 $t=s$, 且 $\dim V_i=\dim V'_i=\dfrac{1}{s}\dim V$. 至此证明了在表示等价意义下分解不计次序唯一. 证完.

现在开始考虑复半单李代数的表示, 我们有

引理 1.3.20 设 (ρ,V) 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示, 则 $\mathfrak{L}$ 上的对称双线性函数

$$B_\rho(x,y)=\mathrm{tr}\,\rho(x)\rho(y),\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{L}$$

为**不变双线性函数**, 且表示 (ρ,V) 一一当且仅当 B_ρ 非退化, B_ρ 称为**表示(ρ,V) 的 Killing 型**.

证 由

$$\begin{aligned}
&B_\rho([x,y],z)+B_\rho(y,[x,z])=\operatorname{tr}\big(\rho([x,y])\rho(z)+\rho(y)\rho([x,z])\big)\\
=&\operatorname{tr}\Big(\big(\rho(x)\rho(y)-\rho(y)\rho(x)\big)\rho(z)+\rho(y)\big(\rho(x)\rho(z)-\rho(z)\rho(x)\big)\Big)\\
=&0
\end{aligned}$$

便证明了不变性.

今若不变双线性函数 B_ρ 非退化，我们来证 ρ 为同构. 设若不然，则 ρ 的同态核 $\ker(\rho)\neq 0$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的非零理想. 取 $x\in\ker(\rho)$, 则 $\rho(x)=0$. 于是 $B_\rho(x,y)=\operatorname{tr}\rho(x)\rho(y)=0$, $\forall\, y\in\mathfrak{L}$. 由 B_ρ 非退化可知 $x=0$. 这导出矛盾. 因此 ρ 为同构. 反之，若 ρ 为同构，而不变对称双线性函数 $B_\rho(x,y)$ 退化，即 B_ρ 的核 $\ker(B_\rho)=\{x\in\mathfrak{L}|B_\rho(x,\mathfrak{L})=0\}\neq 0$. 由不变性易证 B_ρ 的核 $\ker(B_\rho)$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的非零理想. 显然，ρ 限制在非零理想 $\ker(B_\rho)$ 上仍为一一表示，表示空间仍为 V, 则在 $\ker(B_\rho)$ 上 $B_\rho(x,y)=0$.

下面来证明若 $\mathfrak{L}$ 为域 F 上的李代数，(ρ,V) 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的一一表示，设 $B_\rho(x,y)=0,\forall x,y\in\mathfrak{L}$, 则 $\mathfrak{L}$ 为可解李代数. 如果这点能证，则我们证明了复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的一一表示 (ρ,V) 的不变对称双线性函数 $B_\rho(x,y)$ 的核 $\ker(B_\rho)$ 为 $\mathfrak{L}$ 的可解理想，所以必须等于零. 这推出矛盾，从而可以证明引理.

为了证在条件 $B_\rho(x,y)=0,\forall x,y\in\mathfrak{L}$ 下可推出 $\mathfrak{L}$ 可解，这只要证 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 幂零就行了. 为此，引进一般线性李代数 $\mathrm{gl}(V)$ 的子空间

$$\rho(\mathfrak{L})\subset M=\{\mathcal{A}\in\mathrm{gl}(V)\mid[\mathcal{A},\rho(\mathfrak{L})]\subset\rho([\mathfrak{L},\mathfrak{L}])\}.$$

我们来证 $\operatorname{tr}\mathcal{A}X=0,\forall\mathcal{A}\in M,X\in\rho([\mathfrak{L},\mathfrak{L}])$. 事实上，无妨取 $X=[\rho(x),\rho(y)]$, 其中 $x,y\in\mathfrak{L}$. 今

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\mathcal{A}X&=\operatorname{tr}\mathcal{A}[\rho(x),\rho(y)]\\
&=\operatorname{tr}(\mathcal{A}\rho(x)\rho(y)-\mathcal{A}\rho(y)\rho(x))\\
&=\operatorname{tr}\rho(x)[\rho(y),\mathcal{A}].
\end{aligned}$$

令 $[\mathcal{A},\rho(y)]\in\rho([\mathfrak{L},\mathfrak{L}])$, 这证明了 $\operatorname{tr}\mathcal{A}X=0$.

注意到 ρ 为一一表示，所以 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 幂零等价于 $\rho([\mathfrak{L},\mathfrak{L}])$ 幂零. 利用 Engel 定理，问题化为证明任取 $X\in\rho([\mathfrak{L},\mathfrak{L}])$, 则 X 为幂零线性变换. 换句话说，我们只要证明任取 $X\in\rho([\mathfrak{L},\mathfrak{L}])$, 则由 $\operatorname{tr}\mathcal{A}X=0,\forall\mathcal{A}\in M$ 可推出 X 幂零.

设 $\dim V=m$. 由定理 1.2.17, 线性变换 $X=S+N$, 其中 S 半单， N 幂零. 设 X 不幂零，即 $S\neq 0$. 下面我们构造一个元素 $\mathcal{A}\in M$. 首先，将域 F 扩充到代数闭包 $\hat{F}$. 记 S 的 m 个特征根为 $a_1,\cdots,a_m$, 它自然地生成有理数域 Q 上的 k 维线性空间 Q'. 考虑线性空间 Q' 上的任意线性函数 $f(x)$. 今在代数封闭域 $\hat{F}$ 上的线性空间 V 中取基 $e_1,\cdots,e_m$, 使得 $S(e_i)=a_ie_i,1\leq i\leq m$. 作线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$, 使得 $\mathcal{A}(e_i)=f(a_i)e_i,1\leq i\leq m$. 在 $\mathrm{gl}(V)$ 中取基 e_{ij}, 使得 $e_{ij}(e_k)=\delta_{jk}e_i,1\leq i,j,k\leq m$. 因此有

$$\mathcal{A}=\sum f(a_i)e_{ii},\quad S=\sum a_ie_{ii},$$

所以

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad}S)(e_{ij})&=[S,e_{ij}]=Se_{ij}-e_{ij}S=(a_i-a_j)e_{ij},\\(\operatorname{ad}\mathcal{A})(e_{ij})&=[\mathcal{A},e_{ij}]=\mathcal{A}e_{ij}-e_{ij}\mathcal{A}=(f(a_i)-f(a_j))e_{ij}.\end{aligned}$$

用 Lagrange 插值公式，存在多项式 g, 使得 $g(a_i-a_j)=f(a_i)-f(a_j),1\leq i,j\leq m$. 因此我们证明了 $g(\operatorname{ad}S)=\operatorname{ad}\mathcal{A}$. 这里， $g(0)=g(a_i-a_i)=f(a_i)-f(a_i)=0$, 所以 g 无常数项. 由定理 1.2.18, $\operatorname{ad}S$ 是 $\operatorname{ad}X$ 的多项式, 且常数项为零. 所以 $\operatorname{ad}\mathcal{A}$ 是 $\operatorname{ad}X$ 的多项式, 且常数项为零. 由于 $X\in\rho([\mathfrak{L},\mathfrak{L}])$, 因此 $[X,\rho(\mathfrak{L})]\subset\rho([\mathfrak{L},\mathfrak{L}])$. 今 $\operatorname{ad}X$ 的常数项为零的多项式作用在 $\rho(\mathfrak{L})$ 上仍在 $\rho([\mathfrak{L},\mathfrak{L}])$ 中，这证明了 $(\operatorname{ad}\mathcal{A})\rho(\mathfrak{L})\subset\rho([\mathfrak{L},\mathfrak{L}])$, 因此证明了 $\mathcal{A}\in M$. 所以 $\operatorname{tr}\mathcal{A}X=0$, 即 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_if(a_i)=0$. 这证明了 $0=f(0)=f(\sum\limits_{i=1}^{m}a_if(a_i))=\sum\limits_{i=1}^{m}(f(a_i))^2$. 注意到 f 是有理数域上的线性空间上的线性函数，因此 $f(a_i)$ 为有理数. 这证明了 $f(a_i)=0,1\leq i\leq m$. 由 f 任取便导出矛盾，所

以证明了 $S=0$. 即任取 $X\in\rho([\mathfrak{L},\mathfrak{L}])$, 则 X 为幂零线性变换, 所以 $\rho([\mathfrak{L},\mathfrak{L}])$ 幂零, 即 $\mathfrak{L}$ 可解. 引理证完.

注意, 引理的证明不需要假设基域 F 为代数闭域, 而且实际上, 证明了域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的一一表示 ρ, 若不变对称双线性函数 $B_\rho(x,y)=\operatorname{tr}\rho(x)\rho(y)=0, \forall x,y\in\mathfrak{L}$, 则李代数 $\mathfrak{L}$ 可解. 所以若李代数 $\mathfrak{L}$ 半单, 则 B_ρ 非退化. 这推广了 Cartan 判别条件.

另一方面, 设 $\mathfrak{L}$ 为复半单李代数, (ρ,V) 为 $\mathfrak{L}$ 的不可约表示, $\rho(\mathfrak{L})$ 及幺元生成包络代数 $U(\rho)$. 由 Schur 引理可知, $U(\rho)$ 的中心 $\mathrm{C}(U(\rho))$ 很重要. 事实上, 任取 $\mathcal{A}\in \mathrm{C}(U(\rho))$, 则有 $\mathcal{A}\rho(x)=\rho(x)\mathcal{A}, \forall x\in\mathfrak{L}$. 今表示不可约, 所以 $\mathcal{A}$ 为 **纯量变换**. 我们有

引理 1.3.21 设 (ρ,V) 为 n 维复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的一一表示. 在 $\mathfrak{L}$ 中任取基 $e_1,\cdots,e_n$, 则唯一存在一组基 $f_1,\cdots,f_n$, 使得 $B_\rho(e_i,f_j)=\operatorname{tr}\rho(e_i)\rho(f_j)=\delta_{ij}, 1\le i,j\le n$. 这时任取 $x\in\mathfrak{L}$, 则有

$$[x,e_i]=\sum_{j=1}^n a_{ji}e_j,\ [x,f_i]=-\sum_{j=1}^n a_{ij}f_j,\ 1\le i\le n.$$

证 今由表示一一可知不变对称双线性函数 $B_\rho(x,y)$ 非退化. 记 $f_1^*,\cdots,f_n^*$ 为 $e_1,\cdots,e_n$ 的对偶基, 则唯一存在 $f_1,\cdots,f_n\in\mathfrak{L}$, 使得 $f_i^*(x)=B_\rho(x,f_i), 1\le i\le n$. 我们来证 $f_1,\cdots,f_n$ 线性无关. 事实上, 若 $\sum\lambda_i f_i=0$, 则 $\sum\lambda_i f_i^*(x)=B_\rho(x,\sum\lambda_i f_i)=0$, 即 $\sum\lambda_i f_i^*=0$. 但是 $f_1^*,\cdots,f_n^*$ 为对偶基, 这证明了 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. 所以证明了在 $\mathfrak{L}$ 中唯一存在基 $f_1,\cdots,f_n$, 使得 $B_\rho(e_i,f_j)=\delta_{ij}$.

今设 $[x,e_i]=\sum\limits_{j=1}^n a_{ji}e_j,\ 1\le i\le n,\ [x,f_i]=\sum\limits_{j=1}^n b_{ji}f_j$. 于是 $B_\rho([x,e_i],f_j)+B_\rho(e_i,[x,f_j])=0$, 即 $a_{ji}+b_{ij}=0$. 证完.

定理 1.3.22 设 (ρ,V) 为 n 维复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的一一表示, 则包络代数 $U(\rho)$ 的元素

$$\mathcal{A}=\sum_{i=1}^n\rho(e_i)\rho(f_i)\in \mathrm{C}(U(\rho)).$$

证 今任取 $x \in \mathfrak{L}$, 则由引理 1.3.21, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\rho(x) - \rho(x)\mathcal{A} &= \sum_{i=1}^{n} \big(\rho(e_i)\rho(f_i)\rho(x) - \rho(x)\rho(e_i)\rho(f_i)\big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \rho(e_i)\rho([f_i, x]) + \sum_{i=1}^{n} \rho([e_i, x])\rho(f_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\rho(e_i)\rho(f_j) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}\rho(e_j)\rho(f_i) = 0.\end{aligned}$$

证完.

定义 1.3.23 设 (ρ, V) 为 n 维复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的一一表示. 则包络代数 $U(\rho)$ 的中心 $C(U(\rho))$ 的元素 $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} \rho(e_i)\rho(f_i)$ 称为 **Casimir 算子**.

实际上, 若复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 为单理想直接和

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \cdots + \mathfrak{L}_s.$$

设 (ρ, V) 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的一一表示, 于是 (ρ, V) 也是单李代数 $\mathfrak{L}_1$ 的一一表示. 由于 $[\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_j] = 0, i \neq j$, 所以有 $\rho(\mathfrak{L}_i)\rho(\mathfrak{L}_j) = \rho(\mathfrak{L}_j)\rho(\mathfrak{L}_i)$, $i \neq j$. 今由引理 1.3.21 可知在 $\mathfrak{L}_i$ 中任取基 $e_{i1}, \cdots, e_{is_i}$, 则唯一存在基 $f_{i1}, \cdots, f_{is_i}$ 使得 $B_\rho(e_{ij}, f_{ik}) = \delta_{jk}, 1 \leq j, k \leq s_i$, 于是可证 $\sum_{j=1}^{s_i} \rho(e_{ij})\rho(f_{ij}) = \mathcal{A}_i$ 属于包络代数 $U(\rho)$ 的中心. 所以

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathcal{A}_i = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \sum_{j=1}^{s_i} \rho(e_{ij})\rho(f_{ij}) \in C(U(\rho)),$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in \mathbb{C}$. 在进一步讨论以前, 给出

引理 1.3.24 设 $\mathfrak{L}$ 为复半单线性李代数. 任取 $x \in \mathfrak{L}$, 记 $x = x_s + x_n$ 为 x 的 Jordan 分解, 其中 x_s, x_n 分别为半单部分和幂零部分, 则 $x_s, x_n \in \mathfrak{L}$, 且 $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 上的线性变换 $\operatorname{ad} x$ 的 Jordan 分解, 其中 $\operatorname{ad} x_s, \operatorname{ad} x_n$ 分别为半单部分和幂零部分.

证 设 $\mathfrak{L}\subset \mathrm{gl}(V)$. 任取 $x\in\mathfrak{L}$. 记 $x=x_s+x_n$ 为线性变换 x 的 Jordan 分解，其中 x_s 及 x_n 分别为 x 的半单部分及幂零部分. 由定理 1.2.18, 于是 $\mathrm{ad}\,x=\mathrm{ad}\,x_s+\mathrm{ad}\,x_n$ 为 $\mathrm{ad}\,x$ 的 Jordan 分解，其中 $\mathrm{ad}\,x_s$ 及 $\mathrm{ad}\,x_n$ 分别为 $\mathrm{ad}\,x$ 的半单部分及幂零部分. 因此问题化为证明 $x_s,x_n\in\mathfrak{L}$ 就够了.

令 $\mathfrak{L}\subset \mathrm{gl}(V)$, 所以复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 有一一表示 (id,V). 由 Weyl 的表示的完全可约定理，表示空间 V 分解为极小不变子空间直接和:

$$V=V_1+\cdots+V_t.$$

因此 $x(V_i)\subset V_i, 1\le i\le t$. 今 x_s 及 x_n 都是 x 的常数项为零的多项式，所以 $x_s(V_i)\subset V_i, x_n(V_i)\subset V_i, 1\le i\le t$. 因此问题化为在每个极小不变子空间上讨论. 所以无妨设表示 (id,V) 不可约. 这时当 x 遍历 $\mathfrak{L}$ 时，所有 x_s 及 x_n 生成 $\mathrm{gl}(V)$ 的李代数 $\mathfrak{L}_0\supset\mathfrak{L}$. 我们来证 $\mathfrak{L}$ 为 $\mathfrak{L}_0$ 的理想. 事实上，已知 $(\mathrm{ad}\,x)\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L}$, 而 $\mathrm{ad}\,x=\mathrm{ad}\,x_s+\mathrm{ad}\,x_n$ 为 $\mathrm{ad}\,x$ 的 Jordan 分解，所以 $\mathrm{ad}\,x_s$ 及 $\mathrm{ad}\,x_n$ 都是 $\mathrm{ad}\,x$ 的多项式. 因此 $(\mathrm{ad}\,x_s)\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L},(\mathrm{ad}\,x_n)\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L}$. 这证明了断言. 今复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 为表示 $(\mathrm{ad},\mathfrak{L}_0)$ 的不变子空间，所以表示空间 $\mathfrak{L}_0$ 有不变子空间的直接和分解

$$\mathfrak{L}_0=\mathfrak{L}+\mathfrak{M},$$

因此有

$$[\mathfrak{L},\mathfrak{M}]=(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{M})\subset\mathfrak{M}\cap[\mathfrak{L},\mathfrak{L}_0]\subset\mathfrak{M}\cap\mathfrak{L}=0,$$

所以 $\mathfrak{L}$ 的元素和 $\mathfrak{M}$ 的元素可交换. 由表示 (id,V) 不可约及 Schur 引理可知 $\mathfrak{M}$ 的元素由纯量线性变换构成. 另一方面，任取线性空间 V 上的线性变换 $x\in\mathfrak{L}$. 由 $\mathfrak{L}$ 复半单，所以 $\mathfrak{L}=[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$. 因此 $\mathrm{tr}\,x=0$. 注意到 Jordan 分解由 Jordan 标准形导出，所以 $\mathrm{tr}\,x=0$ 蕴含 $\mathrm{tr}\,x_s=0,\mathrm{tr}\,x_n=0$. 因此由所有 x_s 及 x_n 生成的李代数 $\mathfrak{L}_0$ 中元素的迹也都等于零. 然而 $\mathfrak{M}$ 为纯量线性变换，这证明了 $\mathfrak{M}=0$. 所以证明了 $\mathfrak{L}_0=\mathfrak{L}$, 即 x_s 及 x_n 都在 $\mathfrak{L}$ 中. 证完.

现在取定复半单李代数 $\mathfrak{L}$, 由 1.2 节可知, 在 $\mathfrak{L}$ 中取定 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$, 则有根子空间分解

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{L}_{\alpha},$$

且有 Weyl 基 $\{e_\alpha \mid \forall \alpha \in \Delta\}$. 记 $B(x, y)$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型. 取定复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示 (ρ, V), 于是 $\rho(\mathfrak{L}) \subset \mathrm{gl}(V)$ 为线性半单李代数. 由引理 1.3.24, 记 $x \in \mathfrak{L}$, 则 $\rho(x) = x_s + x_n$ 为 Jordan 分解, 其中 x_s 及 x_n 分别为线性变换 $\rho(x)$ 的半单部分及幂零部分. 今

$$\rho(\mathfrak{L}) = \rho(\mathfrak{H}) + \sum_{\alpha \in \Delta} \rho(\mathfrak{L}_\alpha).$$

显然 $\mathrm{ad}\, \rho(\mathfrak{H})$ 由半单元素构成. 由引理 1.3.24, 所以 $\rho(\mathfrak{H})$ 也由半单元素构成. 今 $[\rho(\mathfrak{H}), \rho(\mathfrak{H})] = \rho([\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]) = 0$, 所以 $\rho(\mathfrak{H})$ 由一批两两可交换的半单线性变换构成. 因此, 表示空间关于 $\rho(\mathfrak{H})$ 可分解为特征向量构成的子空间的直接和

$$V = \sum_{\lambda \in \Phi} V_\lambda,$$

其中 Φ 为 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 上的有限多个线性函数构成的集合, 称为表示 (ρ, V) 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的 **权系**, 其中元素称为 **权**. 子空间 V_λ 称为属于权 λ 的 **权子空间**, 它定义为

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \rho(h)v = \lambda(h)v, \ \forall\, h \in \mathfrak{H}\}.$$

权空间 V_λ 的维数称为权 λ 的 **重数**. 另一方面, 由于李代数 $\mathfrak{L}$ 半单, 且 Killing 型非退化, 又限制在 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 上也非退化, 所以任取 $\lambda \in \Phi$, 唯一存在 $h_\lambda \in \mathfrak{H}$, 使得

$$\lambda(h) = B(h_\lambda, h), \quad \forall\, h \in \mathfrak{H}.$$

和复半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的根系 Δ 的元素 α 和对应的

$$h_\alpha \in \mathfrak{H}, B(h, h_\alpha) = \alpha(h), \forall\ h \in \mathfrak{H}$$

一样, 用 α 来记 h_α, 现在我们也用 λ 来记 h_λ. 关于权空间, 有下面的性质:

引理 1.3.25 约定 $V_\lambda = 0$, $\forall \lambda \notin \Phi$. 则有

(1) 任取 $\alpha \in \Delta$, $\lambda \in \Phi$, 则有

$$\rho(e_\alpha)V_\lambda \subset V_{\alpha+\lambda},$$

特别地, 当 $V_{\alpha+\lambda} \neq 0$, 时, 有 $\alpha + \lambda \in \Phi$;

(2) 任取 $\alpha \in \Delta$, $\lambda \in \Phi$, 记权 λ 关于根 α 的 **权链** 为

$$\lambda - p\alpha, \cdots, \lambda - \alpha, \lambda, \lambda + \alpha, \cdots, \lambda + q\lambda,$$

使得 $\lambda - (p+1)\alpha, \lambda + (q+1)\lambda \notin \Phi$, 则有

$$\frac{2B(\lambda, \alpha)}{B(\alpha, \alpha)} = p - q,$$

且有

$$w_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2B(\lambda, \alpha)}{B(\alpha, \alpha)}\alpha \in \Phi.$$

证 (1) 任取 $h \in \mathfrak{H}, \alpha \in \Delta$, 则有 $[h, e_\alpha] = B(\alpha, h)e_\alpha$. 于是有

$$[\rho(h), \rho(e_\alpha)] = B(\alpha, h)\rho(e_\alpha).$$

任取 $\lambda \in \Phi, v_\lambda \in V_\lambda$, 则

$$\begin{aligned}\rho(h)(\rho(e_\alpha)v_\lambda) &= \rho([h, e_\alpha])v_\lambda + \rho(e_\alpha)\rho(h)v_\lambda \\ &= \alpha(h)\rho(e_\alpha)v_\lambda + \lambda(h)\rho(e_\alpha)v_\lambda = (\alpha + \lambda)(h)\rho(e_\alpha)v_\lambda,\end{aligned}$$

$\forall h \in \mathfrak{H}$. 这证明了 (1) 成立.

(2) 任取 $\lambda \in \Phi, 0 \neq v_\lambda \in V_\lambda$. 若权链有 $q = 0$, 在 V 中有序列 $y_k = \rho(e_{-\alpha})^k v_\lambda = v_{\lambda - k\alpha}, k = 0, 1, \cdots$. 由 $\lambda - (p+1)\alpha \notin \Phi$ 可知 $y_{p+1} = 0$. 于是存在正整数 r, 使得 $y_0, y_1, \cdots, y_r \neq 0, y_{r+1} = y_{r+2} = \cdots = 0$.

由归纳法可证

$$\rho(e_\alpha)y_{k+1} = (k+1)B(\lambda - \frac{k}{2}\alpha, \alpha)y_k,\ k = 0, 1, \cdots.$$

事实上

$$\begin{aligned}\rho(e_\alpha)y_1 &= \rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha})v_\lambda = \rho([e_\alpha, e_{-\alpha}])v_\lambda + \rho(e_{-\alpha})\rho(e_\alpha)v_\lambda \\ &= \rho(\alpha)v_\lambda = B(\lambda,\alpha)y_0.\end{aligned}$$

设 k 时公式成立. 今

$$\begin{aligned}\rho(e_\alpha)y_{k+2} &= \rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha})y_{k+1} = \rho(\alpha)y_{k+1} + \rho(e_{-\alpha})\rho(e_\alpha)y_{k+1} \\ &= (\lambda-(k+1)\alpha)(\alpha)y_{k+1} + (k+1)B(\lambda-\frac{k}{2}\alpha,\alpha)y_{k+1} \\ &= (k+2)B(\lambda-\frac{k+1}{2}\alpha,\alpha)y_k.\end{aligned}$$

由归纳法便证明了断言.

取 $k=r$, 由 $y_{r+1}=0$ 可知 $r=\dfrac{2B(\lambda,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)}$.

若权链有 $p=0$, 作 V 中序列 $z_k=\rho(e_\alpha)^k v_\lambda \in V_{\lambda+k\alpha}, k=0,1,\cdots$. 由 $\lambda+(q+1)\alpha\notin\Phi$, 所以 $z_{q+1}=0$. 因此存在 $1\le s\le q$, 且 $z_s\neq 0, z_{s+1}=0$. 由归纳法可证

$$\rho(e_{-\alpha})z_{k+1} = -(k+1)B(\lambda+\frac{k}{2}\alpha,\alpha)z_k,\ k=0,1,2,\cdots.$$

取 $k=s$, 便证明了 $-s=\dfrac{2B(\lambda,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)}$.

在一般情形, 取 $\beta=\lambda+q\alpha$, 则 β 关于 α 的权链为

$$\beta-(p+q)\alpha,\cdots,\beta-\alpha,\beta,$$

于是有 $\dfrac{2B(\beta,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)}\le p+q$. 即有

$$\frac{2B(\lambda,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)}+2q\le p+q.$$

再取 $\beta=\lambda-p\alpha$, 则 β 关于 α 的权链为 $\beta,\beta+\alpha,\cdots,\beta+(p+q)\alpha$. 于是有 $-\dfrac{2B(\beta,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)}\le p+q$, 即有

$$-\frac{2B(\lambda,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)}+2p\le p+q.$$

至此证明了 $\dfrac{2B(\lambda,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)}=p-q.$

由于 $\lambda-(p-q)\alpha=\lambda+(q-p)\alpha\in\Phi$, 这证明了 $w_\alpha(\lambda)\in\Phi$. 引理证完.

推论　集合 $\{h_\lambda\mid\forall\lambda\in\Phi\}\subset\mathfrak{H}_R$.

证　由 1.2 节可知 $\mathfrak{H}_R$ 是由 $\{h_\alpha|\forall\alpha\in\Delta\}$ 实线性生成的线性空间, 且有 $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_R+\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R,\mathfrak{H}_R\cap\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R=0$. 今任取 $\lambda\in\Phi$, 记 $h_\lambda=a+\sqrt{-1}b,a,b\in\mathfrak{H}_R$. 则由 $2B(\lambda,\alpha)=(p-q)B(\alpha,\alpha)\in\mathbb{R}$ 可知 $B(b,\alpha)=0,\forall\alpha\in 0$. 即 $B(b,\mathfrak{H}_R)=0$. 但是 $b\in\mathfrak{H}_R$, 且李代数 $\mathfrak{L}$ 上的 Killing 型 B 限制在 $\mathfrak{H}_R$ 上为内积. 这证明了 $b=0$, 所以 $\lambda=h_\lambda\in\mathfrak{H}_R,\forall\lambda\in\Phi$. 证完.

今在实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 中引进序, 则有单根系 Π. 由于证明了 $\lambda=h_\lambda\in\mathfrak{H}_R,\forall\lambda\in\Phi$, 所以集合 $h_\Phi=\{h_\lambda\mid\forall\lambda\in\Phi\}$ 的元素也可比较大. 由于 Φ 为有限集, 所以在 $\mathfrak{H}_R$ 的有限子集 h_Φ 中存在最大元素和最小元素, 相应 $\mathfrak{H}_R^*$ 的有限子集 Φ 中存在最大元素和最小元素, 分别称为最高权和最低权. 由此可知, 若 λ 为最高权, 则 $\lambda+\alpha_i\notin\Phi$, $1\le i\le l$, 因此任取正根 α, 则 $\lambda+\alpha\notin\Phi$. 若 λ 为最低权, 则 $\lambda-\alpha_i\notin\Phi,1\le i\le l$ 因此任取正根 α, 则 $\lambda-\alpha\notin\Phi$. 实际上, 我们可以给出

定义 1.3.26　设 Π 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的根系 Δ 的单根系. Φ 为 $\mathfrak{L}$ 的表示 (ρ,V) 的权系. 权 $\lambda\in\Phi$ 称为 **最高权**, 如果 $\lambda+\alpha\notin\Phi,\forall\alpha\in\Delta^+$; 权 $\lambda\in\Phi$ 称为 **最低权**, 如果 $\lambda-\alpha\notin\Phi,\forall\alpha\in\Delta^+$.

引理 1.3.27　设 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的根系 Δ 的单根系. 则李代数 $\mathfrak{L}$ 的通用包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 由 $h_j=\alpha_j,e_j=e_{\alpha_j},e_{-j}=e_{-\alpha_j},1\le j\le l$ 生成. 特别记 $e_1,\cdots,e_l$ 生成结合代数 $U(\mathfrak{L})^+$, $e_{-1},\cdots,e_{-l}$ 生成结合代数 $U(\mathfrak{L})^-$, $h_1,\cdots,h_l$ 生成结合代数 $U(\mathfrak{L})^\circ$, 则

$$U(\mathfrak{L})=U(\mathfrak{L})^-U(\mathfrak{L})^\circ U(\mathfrak{L})^+,$$

即 $U(\mathfrak{L})$ 理解为由结合代数 $U(\mathfrak{L})^-$, $U(\mathfrak{L})^\circ$, $U(\mathfrak{L})^+$ 的乘积线性生

成的线性空间.

设 (ρ,V) 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示. 记 $\rho(e_1),\cdots,\rho(e_l)$ 生成的结合代数为 $U(\rho)^+$,$\rho(e_{-1}),\cdots,\rho(e_{-l})$ 生成的结合代数为 $U(\rho)^-$,$\rho(h_1),\cdots,\rho(h_l)$ 生成的结合代数为 $U(\rho)^\circ$, 则表示 (ρ,V) 的包络代数 $U(\rho)$ 有

$$U(\rho)=U(\rho)^-U(\rho)^\circ U(\rho)^+,$$

且 $\rho(U(\mathfrak{L})^\pm)=U(\rho)^\pm$, $\rho(U(\mathfrak{L})^0)=U(\rho)^0$.

证 任取正根 α, 存在正根序列 α_{i_1}, $\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_s}=\alpha$. 因此李代数 $\mathfrak{L}$ 中有非零元素序列.

$$e_{i_1},[e_{i_1},e_{i_2}],\cdots,[\cdots[[e_{i_1},e_{i_2}],e_{i_3}],\cdots,e_{i_s}]=e_{i_1i_2\cdots i_s},$$
$$e_{-i_1},[e_{-i_1},e_{-i_2}],\cdots,[\cdots[[e_{-i_1},e_{-i_2}],e_{-i_3}],\cdots,e_{-i_s}]=e'_{i_1i_2\cdots i_s},$$

而 $e_{i_1\cdots i_s}\in\mathfrak{L}_{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_s}}=\mathfrak{L}_\alpha$, $e'_{i_1\cdots i_s}\in\mathfrak{L}_{-\alpha_{i_1}-\cdots-\alpha_{i_s}}=\mathfrak{L}_{-\alpha}$. 由 $\dim\mathfrak{L}_\alpha=\dim\mathfrak{L}_{-\alpha}=1$ 可知 $e_{i_1\cdots i_s}$ 及 $e'_{i_1\cdots i_s}$ 分别为 $\mathfrak{L}_\alpha$ 及 $\mathfrak{L}_{-\alpha}$ 的基元素. 这证明了 $\sum\limits_{\alpha\in\Delta^+}\mathfrak{L}_\alpha$ 生成通用包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 的结合子代数 $U(\mathfrak{L})^+$, $\sum\limits_{\alpha\in\Delta^-}\mathfrak{L}_\alpha$ 生成通用包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 的结合子代数 $U(\mathfrak{L})^-$,$\mathfrak{H}$ 生成通用包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 的结合子代数 $U(\mathfrak{L})^\circ$.

因此, 三个结合子代数 $U(\mathfrak{L})^-$, $U(\mathfrak{L})^\circ$, $U(\mathfrak{L})^+$ 的乘积线性生成通用包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 的结合子代数 $U(\mathfrak{L})_\circ$. 我们来证明 $U(\mathfrak{L})_\circ=U(\mathfrak{L})$. 事实上, 取 Weyl 基 $\{h_i,1\le i\le l,\ e_\alpha,\ \forall\alpha\in\Delta\}$, 则有乘法表

$$[h_i,h_j]=0,\ [h_i,e_\alpha]=\alpha(h_i)e_\alpha,\ \forall\alpha\in\Delta,$$
$$[e_\alpha,e_{-\alpha}]=h_\alpha,\ [e_\alpha,e_\beta]=N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}.$$

所以在通用包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 中有

$$h_ih_j=h_jh_i,\ h_ie_\alpha-e_\alpha h_i=\alpha(h_i)e_\alpha,$$
$$e_\alpha e_{-\alpha}-e_{-\alpha}e_\alpha=h_\alpha,\ e_\alpha e_\beta-e_\beta e_\alpha=N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}.$$

特别由 $\alpha_j,\alpha_k\in\Pi$, $\alpha_j-\alpha_k\notin\Delta$, 所以有

$$h_jh_k=h_kh_j,\quad h_je_k=e_kh_h+\alpha_k(h_j)e_k,\ \forall j,k,$$
$$e_je_{-j}=e_{-j}e_j+h_j,\ \forall j,\quad e_je_{-k}=e_{-k}e_j,\ \forall j\ne k.$$

所以 $h_1,\cdots,h_l$, $e_1,\cdots,e_l$, $e_{-1},\cdots,e_{-l}$ 生成通用包络代数 $U(\mathfrak{L})$. 且任取 h_i,e_i,e_{-i}, $1\leq i\leq l$ 的 m 次单项式. 利用乘法关系, 可写成如此的 m 次单项式加上低次项, 使得 m 次单项式中出现 $e_{-1},\cdots,e_{-l}$ 的部分在最前面, 出现 $h_1,\cdots,h_l$ 的部分放在中间, 出现 $e_1,\cdots,e_l$ 的部分在最后面. 因此由归纳法便证明了三个结合子代数 $U(\mathfrak{L})^-$, $U(\mathfrak{L})^\circ$, $U(\mathfrak{L})^+$ 的乘积线性生成通用包络代数 $U(\mathfrak{L})$. 特别通用包络代数 $U(\mathfrak{L})$ 由 h_i,e_i,e_{-i}, $1\leq i\leq l$ 生成.

对复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示 (ρ,V), 可以和通用包络代数一样得到所要的结论. 实际上, 我们有

$$\rho(U(\mathfrak{L})^{\pm})=U(\rho)^{\pm},\ \rho(U(\mathfrak{L})^{\circ})=U(\rho)^{\circ}.$$

证完.

显然, 在实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 中取定方向后, 表示 (ρ,V) 的最高权和最低权是唯一确定的. 而且它们在不可约表示论中扮演了重要的角色, 即我们有

定理 1.3.28 设 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的根系 Δ 的单根系. Φ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的不可约表示 (ρ,V) 关于 $\rho(\mathfrak{H})$ 的权系. 记 λ 为最高权, 则有

(1) 任取 $\mu\in\Phi$, 则存在 **权序列**

$$\lambda,\lambda-\alpha_{i_s},\cdots,\lambda-\alpha_{i_s}-\alpha_{i_{s-1}}-\cdots-\alpha_{i_1}=\mu,$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_s\in\{1,2,\cdots,l\}$, 且允许出现相同指标;

(2) 最高权 λ 的权空间是一维的;

(3) 对最高权 λ 及任一正根 α, $\dfrac{2B(\lambda,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)}$ 为非负整数.

证 (1) 在最高权 λ 的权空间 V_λ 中任取非零向量 v_λ. 构作表示空间 V 的非零子空间 V_0, 它由 $\rho(e_{-\alpha_{i_1}})\cdots\rho(e_{-\alpha_{i_t}})v_\lambda=v_{i_1i_2\cdots i_t}$, $1\leq i_1,\cdots,i_t\leq l$, $t=0,1,2,\cdots$ 线性生成. 由引理 1.3.25 的 (1) 可知 $v_{i_1i_2\cdots i_t}\in V_{\lambda-\alpha_{i_1}-\alpha_{i_2}-\cdots-\alpha_{i_t}}$. 我们来证 V_0 为表示空间 V 的不变子空间. 事实上, 用引理 1.3.27, 我们只要证 $\rho(h_i)V_0\subset V_0$, $\rho(e_i)V_0\subset V_0$, $\rho(e_{-i})V_0\subset V_0$ 就够了.

显然，$\rho(e_{-i})v_{i_1i_2\cdots i_s}=v_{ii_1i_2\cdots i_s}\in V_0$，所以证明了 $\rho(e_{-i})V_0\subset V_0$，$1\le i\le l$. 再

$$\begin{aligned}&\rho(h_i)v_{i_1i_2\cdots i_s}\\=&\rho(h_i)\rho(e_{-i_1})\rho(e_{-i_2})\cdots\rho(e_{-i_s})v_\lambda\\=&(\rho([h_i,e_{-i_1}])+\rho(e_{-i_1})\rho(h_i))\rho(e_{-i_2})\cdots\rho(e_{-i_s})v_\lambda\\=&(B(h_i,h_{-i_1})\rho(e_{-i_1})+\rho(e_{-i_1})\rho(h_i))\rho(e_{-i_2})\cdots\rho(e_{-i_s})v_\lambda\end{aligned}$$

以及 $\rho(h_i)v_\lambda=\lambda(h_i)v_\lambda$，所以由归纳法便证明了 $\rho(h_i)V_0\subset V_0$，$1\le i\le l$. 最后

$$\begin{aligned}\rho(e_i)v_{i_1\cdots i_s}&=\rho(e_i)\rho(e_{-i_1})\rho(e_{-i_2})\cdots\rho(e_{-i_s})v_\lambda\\&=(\rho([e_i,e_{-i_1}])+\rho(e_{-i_1})\rho(e_i))\rho(e_{-i_2})\cdots\rho(e_{-i_s})v_\lambda\\&=(\delta_{ii_1}\rho(h_i)+\rho(e_{-i_1})\rho(e_i))\rho(e_{-i_2})\cdots\rho(e_{-i_s})v_\lambda.\end{aligned}$$

而 $\rho(e_i)v_\lambda=0$，所以由归纳法便证明了 $\rho(e_i)V_0\subset V_0$，$1\le i\le l$. 至此证明了 V_0 为表示 (ρ,V) 的非零不变子空间.

但是我们假设表示不可约，由定义便推出 $V_0=V$，即 V 由 $v_{i_1i_2\cdots i_s},1\le i_1,\cdots,i_s\le l,s=0,1,2,\cdots$ 线性生成.

另一方面，由 Φ 为权系，所以表示空间 V 关于 $\rho(\mathfrak{H})$ 有权子空间分解

$$V=\sum_{\mu\in\Phi}V_\mu.$$

今 $v_{i_1i_2\cdots i_s}\in V_{\lambda-\alpha_{i_1}-\alpha_{i_2}\cdots-\alpha_{i_s}}$，所以表示空间 V 又可表示为

$$V=\sum_{1\le i_1,\cdots,i_s\le l,s=0,1,\cdots}V_{\lambda-\alpha_{i_1}-\cdots-\alpha_{i_s}},$$

这里，当 $\lambda-\alpha_{i_1}-\cdots-\alpha_{i_s}\notin\Phi$ 时 $V_{\lambda-\alpha_{i-1}-\cdots-\alpha_{i_s}}=0$. 注意到若 $v_{i_1i_2\cdots i_s}\neq 0$，则表示空间 V 中有非零向量

$$v_\lambda,v_{i_s},v_{i_{s-1}i_s},\cdots,v_{i_1i_2\cdots i_s}.$$

这证明了 λ，$\lambda-\alpha_{i_s}$，$\lambda-\alpha_{i_s}-\alpha_{i_{s-1}},\cdots,\lambda-\alpha_{i_s}-\cdots-\alpha_{i_1}$ 为权序列，即 (1) 成立.

(2) 现在证 $\dim V_\lambda = 1$. 事实上，由 $V = V_0$ 及 $V_\lambda = V_0 \cap V_\lambda = \{av_\lambda \mid \forall a \in \mathbb{C}\}$, 所以证明了 $\dim V_\lambda = 1$, 即 (2) 成立.

(3) 令 λ 为最高权，α 为正根，于是 $\lambda + \alpha \notin \Phi$. 因此 λ 关于 α 的权链对应的 $q = 0$. 由引理 1.3.25 的 (2) 便证明了 $\dfrac{2B(\lambda,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)}$ 为非负整数，即 (3) 成立．证完.

定义 1.3.29 实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 的向量 φ 称为 **整向量**, 如果 $\dfrac{2B(\varphi,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)}$ 为整数，$\forall \alpha \in \Delta$; 称为 **强整向量**, 如果 $\dfrac{2B(\varphi,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)}$ 为非负整数，$\forall \alpha \in \Delta^+$.

由定义 1.3.26, 定理 1.3.28 的 (3) 可改写为

定理 1.3.30 复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的不可约表示 (ρ, V) 的最高权 λ 唯一决定的向量 h_λ 为强整向量.

下面我们证明复半单李代数的不可约表示的最高权为表示在等价下的全系不变量，且给出定理 1.3.30 的逆定理.

定理 1.3.31 设 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的根系 Δ 的单根系．设 (ρ_i, V_i) 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的不可约表示．记 Φ_i 为关于 $\rho_i(\mathfrak{H})$ 的权系，λ_i 为最高权，$i = 1, 2$. 则 (ρ_1, V_1) 和 (ρ_2, V_2) 等价当且仅当最高权 $\lambda_1 = \lambda_2$. 换句话说，最高权是复半单李代数的不可约表示在等价下的 **全系不变量**.

证 设不可约表示 (ρ_1, V_1) 和 (ρ_2, V_2) 互相等价，于是

$$\dim V_1 = \dim V_2,$$

且存在线性空间 V_1 到 V_2 上的线性同构 σ, 使得 $\rho_2(x) \circ \sigma = \sigma \circ \rho_1(x)$, $\forall x \in \mathfrak{L}$. 令 $V_i = \sum\limits_{\mu_i \in \Phi_i} V_{\mu_i}^{(i)}$, $i = 1, 2$, 其中

$$V_{\mu_i}^{(i)} = \{v \in V_i \mid \rho_i(h)v = \mu_i(h)v,\ \forall h \in \mathfrak{H}\}.$$

任取 $\mu_i \in \Phi_1$, $v \in V_\mu^{(1)}$, 则 $\sigma(v) \in V_2$, 而

$$\rho_2(h)(\sigma(v)) = \sigma(\rho_1(h)v) = \mu_1(h)\sigma(v),\ \forall h \in \mathfrak{H}.$$

这证明了 $\sigma(v)$ 为权向量，属于权 μ_1. 因此 $\mu_1 \in \Phi_2$. 至此证明了 $\Phi_1 \subset \Phi_2$. 考虑线性同构 σ^{-1}, 同理可证 $\Phi_2 \subset \Phi_1$, 即证明了权系

$\Phi_2 = \Phi_1$. 于是最高权 $\lambda_2 = \lambda_1$. 因此证明了等价的不可约表示的最高权相同.

反之，设不可约表示 (ρ_i, V_i) 的最高权为 $\lambda_i, i = 1,2$, 且 $\lambda_2 = \lambda_1$. 我们来证表示 (ρ_1, V_1) 和 (ρ_2, V_2) 互相等价. 由定理 1.3.28 的证明可知在 $V_{\lambda_i}^{(i)}$ 中取基向量 v_i, 则 V_i 由

$$\rho_i(e_{-i_1})\rho_i(e_{-i_2})\cdots\rho_i(e_{-i_s})v_{\lambda_i}^{(i)}, 1 \leq i_1, \cdots, i_s \leq l, s = 0,1,2,\cdots$$

线性生成， $i = 1,2$. 建立表示空间 V_1 到 V_2 上的对应

$$\begin{aligned}\sigma : \sum a_{i_1\cdots i_s}\rho_1(e_{-i_1})\cdots\rho_1(e_{-i_s})v_{\lambda_1}^{(1)} \\ \to \sum a_{i_1\cdots i_s}\rho_2(e_{-i_1})\cdots\rho_2(e_{-i_s})v_{\lambda_2}^{(2)},\end{aligned}$$

$\forall a_{i_1\cdots i_s} \in \mathbb{C}$, 这里和号取 $1 \leq i_1, \cdots, i_s \leq l, s = 0,1,2,\cdots$. 我们来证 σ 为单值映射. 即证 $\sum a_{i_1\cdots i_s}\rho_2(e_{-i_1})\cdots\rho_2(e_{-i_s})v_{\lambda_2}^{(2)} = 0$ 蕴含 $\sum a_{i_1\cdots i_s}\rho_1(e_{-i_1})\cdots\rho_1(e_{-i_s})v_{\lambda_1}^{(1)} = 0$. 事实上，在表示空间 V_1 中考虑子集

$$\begin{aligned}\widetilde{V_1} = \{ \sum a_{i_1\cdots i_s}\rho_1(e_{-i_1})\cdots\rho_1(e_{-i_s})v_{\lambda_1}^{(1)} \mid \\ \sum a_{i_1\cdots i_s}\rho_2(e_{-i_1})\cdots\rho_2(e_{-i_s})v_{\lambda_2}^{(2)} = 0\}.\end{aligned}$$

显然， $\widetilde{V_1}$ 为线性空间 V_1 的子空间，我们来证 $\widetilde{V_1}$ 为表示空间 V_1 的不变子空间.

由 $\sum a_{i_1\cdots i_s}\rho_2(e_{-i_1})\cdots\rho_2(e_{-i_s})v_{\lambda_2}^{(2)} = 0$ 可推出

$$\begin{aligned}&\rho_2(e_{-i})\sum a_{i_1\cdots i_s}\rho_2(e_{-i_1})\cdots\rho_2(e_{-i_s})v_{\lambda_2}^{(2)} \\ &= \sum a_{i_1\cdots i_s}\rho_2(e_{-i})\rho_2(e_{-i_1})\cdots\rho_2(e_{-i_s})v_{\lambda_2}^{(2)} \\ &= 0,\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}&\rho_2(e_i)\sum a_{i_1\cdots i_s}\rho_2(e_{-i_1})\cdots\rho_2(e_{-i_s})v_{\lambda_2}^{(2)} \\ &= \sum a_{i_1\cdots i_s}(\rho_2([e_i, e_{-i_1}]) + \rho_2(e_{-i_1})\rho_2(e_i))\rho_2(e_{-i_2})\cdots\rho_2(e_{-i_s})v_{\lambda_2}^{(2)} \\ &= \sum a_{i_1\cdots i_s}(\delta_{ii_1}\rho_2(h_i) + \rho_2(e_{-i_1})\rho_2(e_i))\rho_2(e_{-i_2})\cdots\rho_2(e_{-i_s})v_{\lambda_2}^{(2)},\end{aligned}$$

且

$$\rho_2(h)\sum a_{i_1\cdots i_s}\rho_2(e_{-i_1})\cdots\rho_2(e_{-i_s})v_{\lambda_2}^{(2)}$$
$$=\sum a_{i_1\cdots i_s}(B(-h_{i_1},h)\rho_2(e_{-i_1})+\rho_2(e_{-i_1})\rho_2(h))$$
$$\rho_2(e_{-i_2})\cdots\rho_2(e_{-i_s})v_{\lambda_2}^{(2)}.$$

依次讨论下去，由 $\rho_2(h)v_{\lambda_2}^{(2)}=\lambda_2(h)v_{\lambda_2}^{(2)}$ 及 $\rho_2(e_i)v_{\lambda_2}^{(2)}=0$, 所以证明了当

$$v=\sum a_{i_1\cdots i_s}\rho_2(e_{-i_1})\cdots\rho_2(e_{-i_s})v_{\lambda_2}^{(2)}=0$$

时

$$\rho_2(e_{-i})v=0,\ \rho_2(h)v=0,\ \rho_2(e_i)v=0,$$

而且有

$$\widetilde{v}=\sum a_{i_1\cdots i_s}\rho_1(e_{-i_1})\cdots\rho_1(e_{-i_s})v_{\lambda_1}^{(1)}\in\widetilde{V_1},$$
$$\rho_1(e_{-i})\widetilde{V_1}\subset\widetilde{V_1},\ \rho_1(h)\widetilde{V_1}\subset\widetilde{V_1},\ \rho_1(e_i)\widetilde{V_1}\subset\widetilde{V_1}.$$

这证明了 $\widetilde{V_1}$ 为表示空间 V_1 的真不变子空间. 但是表示不可约, 所以 $\widetilde{V_1}=0$. 于是证明了映射 σ 为单值映射.

定义映射

$$\tau:\quad \sum a_{i_1\cdots i_s}\rho_2(e_{-i_1})\cdots\rho_2(e_{-i_s})v_{\lambda_2}^{(2)}$$
$$\to\sum a_{i_1\cdots i_s}\rho_1(e_{-i_1})\cdots\rho_1(e_{-i_s})v_{\lambda_1}^{(1)},$$

$\forall a_{i_1\cdots i_s}\in\mathbb{C}$, 这里, 和号取 $1\le i_1,\cdots,i_s\le l, s=0,1,2,\cdots$. 同理, 我们也证明了 τ 为单值映射. 显然由映射 σ 及 τ 的定义有 $\sigma\tau=\tau\sigma=\mathrm{id}$. 这证明了 σ 为表示空间 V_1 到 V_2 上的线性同构.

所以为了证明表示 (ρ_1,V_1) 和 (ρ_2,V_2) 等价, 只要证 $\rho_2(x)\circ\sigma=\sigma\circ\rho_1(x)$, $\forall x\in\mathfrak{L}$ 就够了. 今由定义有

$$\rho_2(x)\sigma(\rho_1(e_{-i_1})\cdots\rho_1(e_{-i_s})v_{\lambda_1}^{(1)})$$
$$=\rho_2(x)\rho_2(e_{-i_1})\cdots\rho_2(e_{-i_s})v_{\lambda_2}^{(2)}.$$

又 $\rho_1(x)(\rho_1(e_{-i_1})\cdots\rho_1(e_{-i_s})v_{\lambda_1}^{(1)})$ 为一些 $\rho_1(e_{-j_1})\cdots\rho_1(e_{-j_t})v_{\lambda_1}^{(1)}$ 的线性组合，它由李代数 $\mathfrak{L}$ 的元素 x 及 $e_{-i_1},\cdots,e_{-i_s}$ 及李代数 $\mathfrak{L}$ 的乘法表决定，所以关于表示 ρ_1 和关于表示 ρ_2 是一样的. 这证明了

$$\sigma\rho_1(x)(\rho_1(e_{-i_1})\cdots\rho_1(e_{-i_s})v_{\lambda_1}^{(1)})=\rho_2(x)\rho_2(e_{-i_1})\cdots\rho_2(e_{-i_s})v_{\lambda_2}^{(2)},$$

即证明了 $\rho_2(x)\sigma=\sigma\rho_1(x)$, $\forall x\in\mathfrak{L}$. 至此证明了表示等价. 定理证完.

显然有

定理 1.3.32 设 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的根系 Δ 的单根系. 设 (ρ,V) 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的不可约表示， Φ 为关于 $\rho(\mathfrak{H})$ 的权系. 设 λ 为最高权， v_λ 为最高权 λ 的权子空间 V_λ 的基向量，则有

$$V=\rho(U(\mathfrak{L})^-)v_\lambda,\quad V_\lambda=\rho(U(\mathfrak{L})^\circ)v_\lambda,\quad \rho(U(\mathfrak{L})^+)v_\lambda=0.$$

为了从已知表示构造新的表示. 我们引进 Kronecker 乘积.

定义 1.3.33 设 $\mathcal{A}_i$ 为复线性空间 V_i 上的线性变换，在 V_i 中取定基 $e_1^{(i)},\cdots,e_{m_i}^{(i)}$, 则有

$$\mathcal{A}_i(e_j^{(i)})=\sum_{k=1}^{m_i}a_{kj}^{(i)}e_k^{(i)},\quad j=1,2,\cdots,m_i,\ i=1,2.$$

于是线性变换 $\mathcal{A}_i$ 的方阵表示为 $A_i=(a_{jk}^{(i)})$, $i=1,2$. 张量积 $V_1\otimes V_2$ 上的线性变换称为 **线性变换 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$的 Kronecker 乘积**, 记作 $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$, 如果

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2)(e_j^{(1)}\otimes e_k^{(2)})=\mathcal{A}_1(e_j^{(1)})\otimes\mathcal{A}_2(e_k^{(2)})\\&=\sum_p a_{pj}^{(1)}e_p^{(1)}\otimes\sum_q a_{qk}^{(2)}e_q^{(2)}=\sum_p\sum_q a_{pj}^{(1)}a_{qk}^{(2)}e_p^{(1)}\otimes e_q^{(2)}.\end{aligned}$$

由线性变换的 Kronecker 乘积 $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ 的定义可知，在张量积 $V_1\otimes V_2$ 的基 $e_j^{(1)}\otimes e_k^{(2)}$, $1\le j\le m_1$, $1\le k\le m_2$ 按照次序

$e_1^{(1)} \otimes e_1^{(2)}, \cdots, e_{m_1}^{(1)} \otimes e_1^{(2)}, \cdots, e_1^{(1)} \otimes e_{m_2}^{(2)}, \cdots, e_{m_1}^{(1)} \otimes e_{m_2}^{(2)}$ 下对应的方阵为

$$A_1 \otimes A_2 = \begin{pmatrix} A_1 a_{11}^{(2)} & \cdots & A_1 a_{1m_2}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ A_1 a_{m_2 1}^{(2)} & \cdots & A_1 a_{m_2 m_2}^{(2)} \end{pmatrix}$$

称为方阵 A_1 和 A_2 的 **Kronecker 乘积**.

定义 1.3.34 记 (ρ_i, V_i), $i = 1, 2$ 为域 F 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的两个表示. 则

$$x \to \rho_1 \otimes \mathrm{id}_{V_2} + \mathrm{id}_{V_1} \otimes \rho_2(x), \quad \forall x \in \mathfrak{L}$$

仍为李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示, 记作 $(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)$, 称为**表示** (ρ_1, V_1) **及** (ρ_2, V_2)**的 Kronecker 乘积**. 为方便起见, 我们记 $\rho_1 \otimes \rho_2$ 为 $\rho_1 \rho_2$.

自然地, 可以定义有限多个表示的 Kronecker 乘积. 显然, Kronecker 乘积适合结合律, 但是没有交换律.

对复半单李代数, 表示的 Kronecker 乘积的重要性在于

定理 1.3.35 设 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的根系 Δ 的单根系. 记 Φ_i 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的不可约表示 (ρ_i, V_i) 关于 $\rho_i(\mathfrak{H})$ 的权系. 记 λ_i 为最高权, $i = 1, 2$. 则表示 (ρ_1, V_1) 和 (ρ_2, V_2) 的 Kronecker 乘积 $(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)$ 中必有一个不可约子表示, 其最高权为 $\lambda_1 + \lambda_2$.

证 记表示空间 V_i 关于 $\rho_i(\mathfrak{H})$ 的权子空间分解为

$$V_i = \sum_{\mu_i \in \Phi_i} V_{\mu_i}^{(i)}, \quad i = 1, 2.$$

于是

$$V_1 \otimes V_2 = \sum_{\mu_1 \in \Phi_1} \sum_{\mu_2 \in \Phi_2} V_{\mu_1}^{(1)} \otimes V_{\mu_2}^{(2)}.$$

由定义有

$$V_{\mu_i}^{(i)} = \{v \in V_i \mid \rho_1(h)v = \mu_i(h)v, \ \forall h \in \mathfrak{H}\}.$$

任取 $v_i \in V_{\mu_i}^{(i)}$, $i=1,2$. 记 $\rho=\rho_1\otimes\rho_2$, 则有

$$\rho(h)=\rho_1(h)\otimes \mathrm{id}_{V_2}+\mathrm{id}_{V_1}\otimes\rho_2(h), \quad \forall h\in\mathfrak{H}.$$

而

$$\begin{aligned}\rho(h)(v_1\otimes v_2)&=\rho_1(h)v_1\otimes v_2+v_1\otimes\rho_2(h)v_2\\&=(\mu_1(h)+\mu_2(h))(v_1\otimes v_2).\end{aligned}$$

所以表示 $(\rho, V_1\otimes V_2)$ 的权系 Φ 包含权 $\mu_1+\mu_2$, $\forall\mu_1\in\Phi_1,\mu_2\in\Phi_2$. 即有 $\Phi_1+\Phi_2\subset\Phi$. 由张量积 $V_1\otimes V_2$ 的关于 $\rho(\mathfrak{H})$ 的权子空间分解可知

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2.$$

于是权系 Φ 的最高权为 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$, 且任取 $\mu\in\Phi$, 记线性空间 $V=V_1\otimes V_2$, 则有

$$V_\mu=\sum_{\mu_1+\mu_2=\mu,\ \mu_i\in\Phi,i=1,2} V_{\mu_1}^{(1)}\otimes V_{\mu_2}^{(2)}.$$

特别地, 最高权空间

$$V_\lambda=V_{\lambda_1}^{(1)}\otimes V_{\lambda_2}^{(2)}.$$

令表示 (ρ_i, V_i) 不可约, 所以 $\dim V_{\lambda_i}^{(i)}=1$, $i=1,2$. 因此 $\dim V_\lambda=(\dim V_{\lambda_1}^{(1)})(\dim V_{\lambda_2}^{(2)})=1$. 现在考虑表示空间 $V=V_1\otimes V_2$ 的子空间 V_0:

$$V_0=\{\sum a_{i_1\cdots i_s}\rho(e_{-i_1})\cdots\rho(e_{-i_s})(v_1\otimes v_2)|\forall a_{i_1\cdots i_2}\in\mathbb{C}\},$$

其中和号取 $1\le i_1,\cdots,i_s\le l, s=0,1,\cdots$, $0\ne v_i\in V_{\lambda_i}^{(i)}$, $i=1,2$. 由定理 1.3.28 的证明可知 V_0 为表示空间 V 的不变子空间, 它包含元素 $v_1\otimes v_2$, 且为包含元素 $v_1\otimes v_2$ 的最小不变子空间. 我们来证它是表示 (ρ, V) 的极小不变子空间. 事实上, 由 Weyl 的表示完全可约定理可知, 在表示空间 V 中存在不变子空间 V_1, 使得

$$V=V_0+V_1$$

为不变子空间直接和．若子表示 (ρ, V_0) 可约，则 V_0 为两个非零不变子空间 W_1 和 W_2 的空间直接和．于是，W_1 及 W_2 都按照 $\rho(\mathfrak{H})$ 分解为权子空间直接和

$$W_i = \sum_{\mu_i \in \Phi_i} W_{\mu_i}^{(i)}, \quad i = 1, 2.$$

于是

$$V_0 = W_1 + W_2 = \sum_{\mu_1 \in \Phi_1} W_{\mu_1}^{(1)} + \sum_{\mu_2 \in \Phi_2} W_{\mu_2}^{(2)} = \sum_{\mu \in \Phi_0} \widetilde{V_\mu}.$$

其中 Φ_0 为表示 (ρ, V_0) 关于 $\rho(\mathfrak{H})$ 的权系．因此 $\Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi_0$. 由 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \in \Phi_0$, 所以 $\lambda \in \Phi_1$ 或 $\lambda \in \Phi_2$. 记 $\lambda \in \Phi_1$, 则证明了 $W_\lambda^{(1)} = V_\lambda$, 且由 W_1 为不变子空间可知 $V_0 \subset W_1$. 这证明了 V_0 不可约．因此在表示 (ρ, V) 中存在最高权为 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ 的不可约子表示．定理证完.

定义 1.3.36　设 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的根系 Δ 的单根系．李代数 $\mathfrak{L}$ 的不可约表示 (ρ, V) 称为**第 i 个基本表示**, 如果表示 (ρ, V) 的最高权 λ_i 有

$$\frac{2B(\lambda_i, h_j)}{B(h_j, h_j)} = \delta_{ij}, \quad 1 \le j \le l.$$

定理 1.3.37　设 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的根系 Δ 的单根系．则可构造出一个表示 (ρ_i, V_i) 使得它是第 i 个基本表示.

这个定理需要具体构造，比较复杂，但可以在李代数的很多书中找到，我们在此略去．但是利用这个结果，我们可以证明定理 1.3.30 的逆定理，即有

定理 1.3.38　设 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的根系 Δ 的单根系．在实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 中任取强整向量 λ, 记

$$\frac{2B(\lambda, h_i)}{B(h_i, h_i)} = n_i, \quad 1 \le i \le l.$$

则存在李代数 $\mathfrak{L}$ 的不可约表示 (ρ, V), 它的最高权 λ 有 $B(\lambda, h) = \lambda(h)$, $\forall h \in \mathfrak{H}$, 且表示 (ρ, V) 和李代数 $\mathfrak{L}$ 的基本表示 (ρ_i, V_i), $1 \le i \le l$ 的 Kronecker 乘积 $\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\cdots\rho_l^{n_l}$ 的一个不可约子表示等价.

证 由定理 1.3.37, 存在强整向量 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$, 使得

$$\frac{2B(\lambda_i, h_j)}{B(h_j, h_j)} = \delta_{ij}, \quad 1 \le i, j \le l.$$

于是

$$\frac{2B(\sum n_i\lambda_i, h_j)}{B(h_j, h_j)} = \sum n_i\delta_{ij} = n_j, \quad 1 \le j \le l.$$

记

$$\mu = \lambda - \sum n_i\lambda_i,$$

则有

$$\frac{2B(\mu, h_j)}{B(h_j, h_j)} = \frac{2B(\lambda, h_j)}{B(h_j, h_j)} - \sum n_i \frac{2B(\lambda_i, h_j)}{B(h_j, h_j)} = 0, 1 \le j \le l.$$

这证明了 $B(\mu, h_j) = 0$, $1 \le j \le l$, 即 $\mu = 0$. 因此 $\lambda = \sum n_i\lambda_i$. 由定理 1.3.35 便证明了在 Kronecker 乘积 $\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\cdots\rho_l^{n_l}$ 中存在以 $\lambda = \sum n_i\lambda_i$ 为最高权的不可约子表示. 定理证完.

第二章　实半单李代数

这一章介绍实半单李代数的分类理论及表示论. 方法是将实半单李代数的分类及表示问题首先化为复半单李代数的分类及表示问题, 再进一步弄清实和复的差别, 从而解决实的情形. 其次, 为了第五章的需要, 我们还给出实半单李代数的若干性质, 特别是 Iwasawa 分解和限制根系.

§ 2.1　实半单李代数的 Cartan 分解

定义 2.1.1　复线性空间 $\mathfrak{L}$ 上的一一对应 σ 称为**半对合**, 如果 σ 适合

(1)　$\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y),\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{L}$;

(2)　$\sigma(\lambda x)=\overline{\lambda}\sigma(x),\quad \forall\,\lambda\in\mathbb{C},\ x\in\mathfrak{L}$;

(3)　$\sigma^2=\mathrm{id}$.

例　给定实线性空间 $\mathfrak{L}_0$. 作 $\mathfrak{L}_0$ 的复化 $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_0^C$, 于是 $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_0+\sqrt{-1}\mathfrak{L}_0$. 易证 $\mathfrak{L}$ 到 $\mathfrak{L}$ 上的一一对应 $\sigma{:}x+\sqrt{-1}y\to x-\sqrt{-1}y$, $\forall\, x,y\in\mathfrak{L}_0$ 为复线性空间 $\mathfrak{L}$ 上的半对合.

由半对合的定义可知, 半对合不是线性变换. 两个半对合的乘积才是线性变换. 另一方面, 给定半对合 σ, 则复线性空间 $\mathfrak{L}$ 中 σ 的不动点集 $\mathfrak{L}_0=\{x\in\mathfrak{L}\mid\sigma(x)=x\}$ 为复线性空间 $\mathfrak{L}$ 的实线性子空间.

引理 2.1.2　设 σ 为复线性空间 $\mathfrak{L}$ 的半对合, $\mathfrak{L}_0$ 为 σ 的不

动点集，则 $\mathfrak{L}_0$ 为 $\mathfrak{L}$ 的 **实形式**. 即实线性空间 $\mathfrak{L}_0$ 的 **复化** $\mathfrak{L}_0^C = \mathfrak{L}_0 + \sqrt{-1}\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}$.

证 显然 $\mathfrak{L}_0$ 的复化包含在 $\mathfrak{L}$ 中，我们来证相等. 事实上，任取 $x \in \mathfrak{L}$, 则 $\sigma(x+\sigma(x)) = x+\sigma(x)$, $\sigma(\sqrt{-1}(x-\sigma(x))) = \sqrt{-1}(x-\sigma(x))$. 所以 $x+\sigma(x)$, $\sqrt{-1}(x-\sigma(x)) \in \mathfrak{L}_0$. 令

$$x = \frac{1}{2}(x+\sigma(x)) + (-\frac{\sqrt{-1}}{2})(\sqrt{-1}(x-\sigma(x))) \in \mathfrak{L}_0 + \sqrt{-1}\mathfrak{L}_0.$$

这证明了 $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \sqrt{-1}\mathfrak{L}_0$. 最后由 $x \in \mathfrak{L}_0$ 有 $\sigma(x) = x, \sigma(\sqrt{-1}x) = -\sqrt{-1}x$. 这证明了 $\mathfrak{L}_0 \cap \sqrt{-1}\mathfrak{L}_0 = 0$. 所以证明了实线性空间 $\mathfrak{L}_0$ 的复化就是 $\mathfrak{L}$. 证完.

由此可见，复线性空间 $\mathfrak{L}$ 的实形式和半对合之间有一个明显的一一对应关系. 由于取复线性空间的不同实形式，则它的复共轭的定义也不同. 正因为如此，对复线性空间 $\mathfrak{L}$, 记由半对合 σ 决定的实形式为 $\mathfrak{L}_0 = (\mathfrak{L}, \sigma)$.

显然，设 $\mathfrak{L}_0$ 为复线性空间 $\mathfrak{L}$ 的实形式， $\mathcal{A}_0$ 为实线性空间 $\mathfrak{L}_0$ 上的线性变换，很自然地 $\mathcal{A}_0$ 可扩充为复线性空间 $\mathfrak{L}$ 上的线性变换. 反之，我们有

引理 2.1.3 设 $\mathfrak{L}_0$ 为复线性空间 $\mathfrak{L}$ 的实形式，它由 $\mathfrak{L}$ 的半对合 σ 决定. 设 $\mathcal{A}$ 为复线性空间 $\mathfrak{L}$ 上的线性变换，则 $\mathcal{A}(\mathfrak{L}_0) \subset \mathfrak{L}_0$, 即 $\mathcal{A}$ 为实线性空间 $\mathfrak{L}_0$ 上的线性变换 $\mathcal{A}_0$ 的扩充当且仅当 $\mathcal{A} \circ \sigma = \sigma \circ \mathcal{A}$.

证 任取 $x, y \in \mathfrak{L}_0$, 则 $x + \sqrt{-1}y \in \mathfrak{L}$. 今 $\mathcal{A}(\mathfrak{L}_0) \subset \mathfrak{L}_0$ 当且仅当 $\mathcal{A}(x+\sqrt{-1}y) = \mathcal{A}(x) + \sqrt{-1}\mathcal{A}(y)$ 有 $\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y) \in \mathfrak{L}_0$. 所以当且仅当 $\sigma\mathcal{A}(x+\sqrt{-1}y) = \mathcal{A}(x) - \sqrt{-1}\mathcal{A}(y) = \mathcal{A}(x - \sqrt{-1}y) = \mathcal{A}\sigma(x+\sqrt{-1}y)$. 这证明了引理. 证完.

定义 2.1.4 复李代数 $\mathfrak{L}$ 作为线性空间上的半对合称为复李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **半对合**, 如果有

$$\sigma([x,y]) = [\sigma(x), \sigma(y)], \quad \forall x, y \in \mathfrak{L}.$$

显然有

引理 2.1.5 设 σ 为复李代数 $\mathfrak{L}$ 的半对合，则 σ 的不动点集 $\mathfrak{L}_0$ 为实李代数，且其复化 $\mathfrak{L}_0^C = \mathfrak{L}$. 设 $\mathfrak{L}_0$ 为实李代数，$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0^C$ 为其复化，则 $\mathfrak{L}$ 为复李代数，且 $\mathfrak{L}$ 上有半对合 σ, 使得其不动点集为 $\mathfrak{L}_0$.

因此复李代数的实形式和复李代数的半对合一一对应. 记 $\mathfrak{L}_0$ 为复李代数 $\mathfrak{L}$ 的实形式，它是复李代数 $\mathfrak{L}$ 的半对合 σ 的不动点集. 我们记 $\mathfrak{L}_0 = (\mathfrak{L}, \sigma)$. 显然有

引理 2.1.6 设 $\mathfrak{G}_1$ 和 $\mathfrak{G}_2$ 为实李代数，ρ 为 $\mathfrak{G}_1$ 到 $\mathfrak{G}_2$ 上的同构. 记 $\mathfrak{G}_i$ 的复化为 $\mathfrak{L}_i$, $i = 1, 2$, 则 ρ 可扩充为复李代数 $\mathfrak{L}_1$ 到 $\mathfrak{L}_2$ 上的李代数同构. 记 σ_i 为由 $\mathfrak{G}_i$ 决定的复李代数 $\mathfrak{L}_i$ 的半对合，则有

$$\sigma_2 = \rho \circ \sigma_1 \circ \rho^{-1}.$$

因此，我们将实李代数的分类分为两步，第一步是对复李代数作分类，第二步是固定复李代数，考虑半对合在复李代数的自同构下的共轭分类. 由于复半单李代数的分类在 §1.2 中已解决，所以下面考虑实半单李代数的分类. 为此，我们先给出

定义 2.1.7 实李代数 $\mathfrak{G}$ 称为 **紧的**, 如果在李代数 $\mathfrak{G}$ 上有 **内积**(x, y) , 它有如下 **不变性**:

$$((\operatorname{ad} x)y, z) + (y, (\operatorname{ad} x)z) = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{G}.$$

显然，紧李代数的子代数必为紧李代数. 又有

引理 2.1.8 紧李代数为紧单理想的直接和.

证 设实李代数 $\mathfrak{G}$ 单，则不必证. 若 $\mathfrak{G}$ 不是单李代数，则 $\mathfrak{G}$ 有非零真理想 $\mathfrak{L}$. 于是 $\mathfrak{G} = \mathfrak{L} + \mathfrak{L}^\perp$ 为空间直接和，其中 $\mathfrak{L}^\perp$ 为 $\mathfrak{L}$ 关于内积的正交补. 今由

$$((\operatorname{ad} x)\mathfrak{L}, \mathfrak{L}^\perp) + (\mathfrak{L}, (\operatorname{ad} x)\mathfrak{L}^\perp) = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{G}.$$

而 $[\mathfrak{G}, \mathfrak{L}] \subset \mathfrak{L}$, 这证明了 $(\mathfrak{L}, [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}^\perp]) = 0$, 即 $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}^\perp] \subset \mathfrak{L}^\perp$, 所以 $\mathfrak{L}$ 的正交补为理想. 对 $\mathfrak{L}$ 和 $\mathfrak{L}^\perp$ 继续讨论，由于实李代数 $\mathfrak{G}$ 的维数有限，便证明了引理. 证完.

显然, 一维李代数为单李代数, 今 $\mathfrak{G}$ 为紧李代数, 由引理 2.1.8, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \cdots + \mathfrak{G}_s$ 为紧单理想直接和, 因此 $[\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_j] \subset \mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{G}_j = 0, i \neq j$. 所以无妨设 $\mathfrak{G}_1, \cdots, \mathfrak{G}_r$ 的维数大于 1, 而 $\mathfrak{G}_{r+1}, \cdots, \mathfrak{G}_s$ 的维数为 1. 于是由 $[\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_j] = 0$, $i \neq j$ 便证明了紧李代数的中心为一维理想的直接和, 而且有

引理 2.1.9 设 $\mathfrak{G}$ 为紧李代数, $\mathrm{C}(\mathfrak{G})$ 为紧李代数 $\mathfrak{G}$ 的中心, 则在 $\mathfrak{G}$ 中存在实半单紧李代数 $\mathfrak{G}_0 = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, 使得 $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 + \mathrm{C}(\mathfrak{G})$ 为理想直接和.

证 今 $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \cdots + \mathfrak{G}_s$ 为紧单理想直接和, 其中 $\mathfrak{G}_1, \cdots, \mathfrak{G}_r$ 的维数大于 1, $\mathfrak{G}_{r+1}, \cdots, \mathfrak{G}_s$ 的维数为 1, 所以有 $[\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_j] = 0$, $i \neq j$, 且 $[\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_i] = 0$, $r + 1 \leq i \leq s$. 这证明了 $\mathfrak{G}_{r+1} + \cdots + \mathfrak{G}_s \subset \mathrm{C}(\mathfrak{G})$. 再任取 $x \in \mathrm{C}(\mathfrak{G})$, 记 $x = \sum^s x_i$, 则有 $0 = [\mathfrak{G}, x] = \sum^s [\mathfrak{G}, x_i]$

$N_{\alpha\beta}\neq 0$, 且有关系

$$N_{-\alpha,-\beta}=-N_{\alpha\beta}\in\mathbb{R}.$$

另一方面, 在 $\mathfrak{H}_R$ 中引进次序后, 有单根系 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$. 记 $h_i\in\mathfrak{H}_R$, 定义为 $\alpha_i(h)=B(h_i,h)$, $\forall\, h\in\mathfrak{H}$, 且 Cartan 矩阵 $(B(h_i,h_j))$ 为正定对称方阵.

作复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的实子空间

$$\mathfrak{G}=\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R+\sum_{\alpha\in\Delta^+}\mathbb{R}(e_\alpha-e_{-\alpha})+\sum_{\alpha\in\Delta^+}\mathbb{R}(\sqrt{-1}(e_\alpha+e_{-\alpha})),$$

我们来证 $\mathfrak{G}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的紧实形式.

事实上, 在复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 中引进一一对应

$$\tau(\sum_{i=1}^{l}\lambda_i h_i+\sum_{\alpha\in\Delta}\lambda_\alpha e_\alpha)=-\sum_{i=1}^{l}\overline{\lambda_i}h_i-\sum_{\alpha\in\Delta}\overline{\lambda_\alpha}e_{-\alpha},$$

其中 $\lambda_i\in\mathbb{C}$, $\lambda_\alpha\in\mathbb{C}$. 我们来证明它是复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的半对合. 这是因为

$$\begin{aligned}\tau([x,y])&=\tau([\sum\lambda_i h_i+\sum\lambda_\alpha e_\alpha,\sum\mu_j h_j+\sum\mu_\beta e_\beta])\\&=\tau(\sum\lambda_i\mu_\alpha\alpha(h_i)e_\alpha-\sum\mu_i\lambda_\alpha\alpha(h_i)e_\alpha\\&\quad+\sum\lambda_\alpha\mu_{-\alpha}h_\alpha+\sum_{\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta}\lambda_\alpha\mu_\beta N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta})\\&=-\sum(\overline{\lambda_i}\overline{\mu_\alpha}-\overline{\mu_i}\overline{\lambda_\alpha})\overline{B(\alpha,h_i)}e_{-\alpha}-\sum\overline{\lambda_\alpha}\overline{\mu_{-\alpha}}h_\alpha\\&\quad-\sum_{\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta}\overline{\lambda_\alpha}\overline{\mu_\beta}N_{\alpha\beta}e_{-(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

这里用到 $\alpha\in\Delta$, 则 α 为单根的整系数线性组合. 再由 $N_{\alpha\beta}=-N_{-\alpha,-\beta}$, 所以有

$$\begin{aligned}[\tau(x),\tau(y)]&=[-\sum\overline{\lambda_i}h_i-\sum\overline{\lambda_\alpha}e_{-\alpha},-\sum\overline{\mu_j}h_j-\sum\overline{\mu_\beta}e_{-\beta}]\\&=\sum\overline{\lambda_i}\overline{\mu_\beta}(-\beta(h_i))e_{-\beta}-\sum\overline{\mu_i}\overline{\lambda_\alpha}(-\alpha(h_i))e_{-\alpha}\\&\quad+\sum\overline{\lambda_\alpha}\overline{\mu_{-\alpha}}h_{-\alpha}+\sum_{\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta}\overline{\lambda_\alpha}\overline{\mu_\beta}N_{-\alpha,-\beta}e_{-(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

由于 $h_{-\alpha}=-h_\alpha$, 所以证明了 $\tau([x,y])=[\tau(x),\tau(y)]$. 至此证明了 τ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的半对合. 它定义的实形式 $(\mathfrak{L},\tau)=\mathfrak{G}$ 为

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}&=\{\sum\lambda_ih_i+\sum\lambda_\alpha e_\alpha|\lambda_i=-\overline{\lambda_i},\ \lambda_\alpha=-\overline{\lambda_{-\alpha}}\}\\&=\{\sqrt{-1}\sum a_ih_i+\sum_{\alpha\in\Delta^+}\lambda_\alpha e_\alpha-\sum_{\alpha\in\Delta^+}\overline{\lambda_\alpha}e_{-\alpha}|a_i\in\mathbb{R},\ \lambda_\alpha\in\mathbb{C}\}.\end{aligned}$$

由于 $h_1,\cdots,h_l$ 为实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 的基, 所以证明了

$$\mathfrak{G}=\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R+\sum_{\alpha\in\Delta^+}\mathbb{R}(e_\alpha-e_{-\alpha})+\sum_{\alpha\in\Delta^+}\mathbb{R}(\sqrt{-1}(e_\alpha+e_{-\alpha})).$$

至此证明了断言.

最后我们来证实李代数 $\mathfrak{G}$ 为紧李代数, 即它有不变内积. 实际上, 我们考虑复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型在实子代数 $\mathfrak{G}$ 上的限制.

今已知 $B(e_\alpha,e_{-\alpha})=1$, $\forall\alpha\in\Delta$, 由定理 1.2.23 的 (1) 可知 Killing 型 B 限制在 $\mathfrak{H}_R$ 上正定. 由式 (1.2.6) 及 (1.2.7) 有 $B(\mathfrak{H},\mathfrak{L}_\alpha)=0$, $B(\mathfrak{L}_\alpha,\mathfrak{L}_\beta)=0$, $\forall\alpha,\beta\in\Delta$, $\alpha+\beta\neq0$. 任取

$$x=\sqrt{-1}\sum a_ih_i+\sum_{\alpha\in\Delta^+}(\lambda_\alpha e_\alpha-\overline{\lambda_\alpha}e_{-\alpha})$$

及

$$y=\sqrt{-1}\sum b_jh_j+\sum_{\beta\in\Delta^+}(\mu_\beta e_\beta-\overline{\mu_\beta}e_{-\beta}),$$

其中 $a_i,b_j\in\mathbb{R}$, $\lambda_\alpha,\mu_\beta\in\mathbb{C}$. 因此

$$B(x,y)=-\sum a_ib_jB(h_i,h_j)-\sum_{\alpha\in\Delta^+}(\lambda_\alpha\overline{\mu_\alpha}+\overline{\lambda_\alpha}\mu_\alpha)$$

为实二次型, 且

$$B(x,x)=-\sum a_ia_jB(h_i,h_j)-2\sum_{\alpha\in\Delta^+}|\lambda_\alpha|^2\leq0.$$

由 Cartan 矩阵 $(B(h_i, h_j))$ 实正定，所以等号成立当且仅当 $a_i = 0$, $1 \le i \le l$, $\lambda_\alpha = 0$, $\forall \alpha \in \Delta^+$. 这证明了复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 上的不变对称双线性函数 $-B(x,y)$ 限制在实形式 $\mathfrak{G}$ 上为实正定不变对称双线性函数，即为内积．所以实形式 $\mathfrak{G}$ 为紧李代数．引理证完．

推论　设 $\mathfrak{H}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数，Δ 为根系，Π 为单根系．记由 h_Δ 实线性生成的 $\mathfrak{H}$ 的实子空间为 $\mathfrak{H}_R$. 则在 $\mathfrak{L}$ 中存在 Weyl 基 $\{e_\alpha | \forall \alpha \in \Delta^+\}$ 使得 $\mathfrak{L}$ 的紧实形式

$$\mathfrak{G} = \sqrt{-1}\mathfrak{H}_R + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathbb{R}(e_\alpha - e_{-\alpha}) + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathbb{R}\sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha})$$

决定的半对合 τ 有

$$\tau(h_\alpha) = -h_\alpha, \ \tau(e_\alpha) = -e_{-\alpha}, \quad \forall \alpha \in \Delta.$$

证　令 $\sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha})$, $e_\alpha - e_{-\alpha} \in \mathfrak{G}$. 由于 $\mathfrak{G}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 关于半对合 τ 的不动点集，所以有 $\tau(\sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha})) = \sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha})$, $\tau(e_\alpha - e_{-\alpha}) = e_\alpha - e_{-\alpha}$, 即有 $e_\alpha + e_{-\alpha} = -\tau(e_\alpha) - \tau(e_{-\alpha})$, $e_\alpha - e_{-\alpha} = \tau(e_\alpha) - \tau(e_{-\alpha})$. 因此证明了 $2e_\alpha = -2\tau(e_{-\alpha})$, 即 $\tau(e_{-\alpha}) = -e_\alpha$, $\forall \alpha \in \Delta$. 又由 $\sqrt{-1}h_\alpha \in \mathfrak{G}$, 所以 $\tau(\sqrt{-1}h_\alpha) = \sqrt{-1}h_\alpha$, 即有 $\tau(h_\alpha) = -h_\alpha$, $\forall \alpha \in \Delta$. 推论证完．

注意，一般复李代数不一定有实形式，但是实李代数必为其复化的实形式．又只有在复半单李代数时才证明了它总有实形式．一般地，我们有

引理 2.1.11　设复李代数 $\mathfrak{L}$ 有实形式 $\mathfrak{G}$, 则 $\mathfrak{L}$ 复半单当且仅当它的实形式 $\mathfrak{G}$ 实半单．

证　记 $B(x,y)$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型．显然 $B(x,y)$ 限制在实形式 $\mathfrak{G}$ 上为实李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Killing 型 $B_0(x,y)$. 显然 $B(x,y)$ 非退化当且仅当 $B_0(x,y)$ 非退化．所以引理证完．

由引理 2.1.10 可知复半单李代数必有紧半单实形式，由引理 2.1.11 可知紧半单李代数的复化必为复半单李代数．另一方面，引

理 2.1.10 的证明告诉我们复半单李代数的紧实形式有如下特点：复半单李代数的 Killing 型限制在实形式上必负定. 事实上，我们有如下一般性质.

引理 2.1.12 实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 为紧半单李代数当且仅当它的 Killing 型负定.

证 记 $B_0(x,y)$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Killing 型. 若 $B_0(x,y)$ 负定，则 $-B_0(x,y)$ 正定，所以是不变内积，即实半单李代数紧.

反之，若 $\mathfrak{G}$ 为紧半单李代数，由定义 $\mathfrak{G}$ 有不变内积 (x,y). 在线性空间 $\mathfrak{G}$ 中取关于内积 (x,y) 的标准正交基 $e_1,\cdots,e_n$, 即有 $(e_i,e_j)=\delta_{ij}$, $1\le i,j\le n$. 记乘法表为

$$[e_i,e_j]=\sum_k C_{ij}^k e_k.$$

由内积不变性有

$$([e_i,e_j],e_k)+(e_j,[e_i,e_k])=0,$$

即有

$$C_{ij}^k+C_{ik}^j=0,\quad 1\le i,j,k\le n.$$

由 Killing 型的定义有

$$\begin{aligned}B_0(x,y)&=B_0(\sum x_ie_i,\sum y_je_j)=\sum x_iy_jB_0(e_i,e_j)\\&=\sum x_iy_j\operatorname{tr}\operatorname{ad}e_i\operatorname{ad}e_j.\end{aligned}$$

今

$$\operatorname{ad}e_i\operatorname{ad}e_j(e_k)=\operatorname{ad}e_i\sum_t C_{jk}^te_t=\sum_{s,t}C_{it}^sC_{jk}^te_s,$$

所以

$$B_0(e_i,e_j)=\sum_{k,t}C_{it}^kC_{jk}^t=-\sum_{k,t}C_{it}^kC_{jt}^k.$$

因此

$$B_0(x,y)=-\sum x_iy_jC_{it}^kC_{jt}^k=-\sum_{t,k}(\sum_i x_iC_{it}^k)(\sum_j y_jC_{jt}^k).$$

于是

$$B_0(x,x) = -\sum_{t,k}(\sum_i x_i C_{it}^k)^2 \leq 0,$$

且等号成立当且仅当 $\sum\limits_i x_i C_{it}^k = 0,\ 1 \leq t, k \leq n$. 因此

$$\sum_i x_i \sum_k C_{it}^k e_k = 0.$$

这推出 $\sum\limits_i x_i [e_i, e_t] = 0,\ 1 \leq t \leq n$, 所以 $[\sum\limits_i x_i e_i, \mathfrak{G}] = 0$. 但是 $\mathfrak{G}$ 为实半单李代数，它的中心为零. 这证明了 $x = \sum\limits_i x_i e_i = 0$. 至此证明了 Killing 型 B_0 负定. 证完.

现在来引进处理实半单李代数的两种重要的子空间直接和分解之一的 Cartan 分解.

定义 2.1.13 实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的子空间直接和分解

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$$

称为 **Cartan 分解**, 如果

$$\mathfrak{G}_c = \mathfrak{K} + \sqrt{-1}\mathfrak{P}$$

为 **紧半单李代数**.

由定义可知，我们需要证明 Cartan 分解的存在性及找出它在什么意义下唯一. 另外，再给出一些等价定义和讨论 Cartan 分解的性质.

定理 2.1.14 实半单李代数必有 Cartan 分解.

证 设 $\mathfrak{G}$ 为实半单李代数，它的复化 $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C$ 已知为复半单李代数，且 $\mathfrak{G}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的实形式，它由半对合 σ 决定，即有

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{L}, \sigma).$$

另一方面，由引理 2.1.10 的证明可知复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 上存在半对合 τ', 使得由半对合 τ' 决定的实形式

$$\mathfrak{G}_c' = (\mathfrak{L}, \tau')$$

为紧半单李代数.

注意到两个半对合的乘积必为李代数的自同构，因此我们有复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的自同构

$$\theta = \sigma\tau'.$$

由于复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型 $B(x,y)$ 限制在紧实形式 $\mathfrak{G}_c' = (\mathfrak{L},\tau')$ 上为负定不变对称双线性函数 B_0, 它也是实李代数 $\mathfrak{G}_c'$ 的 Killing 型. 记

$$H(x,y) = -B(x,\tau'(y)), \quad \forall\, x,y \in \mathfrak{L}.$$

注意到对复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的任意半对合 φ, 有

$$B(\varphi(x),\varphi(y)) = \operatorname{tr}\operatorname{ad}\varphi(x)\operatorname{ad}\varphi(y).$$

在复李代数 $\mathfrak{L}$ 中任取基 $e_1,\cdots,e_n$, 显然 $\varphi(e_1),\cdots,\varphi(e_n)$ 仍为 $\mathfrak{L}$ 的基. 而 $(\operatorname{ad}\varphi(x)\operatorname{ad}\varphi(y))\varphi(e_i) = \varphi((\operatorname{ad}x\operatorname{ad}y)e_i)$, 这证明了

$$\operatorname{tr}\operatorname{ad}\varphi(x)\operatorname{ad}\varphi(y) = \overline{\operatorname{tr}\operatorname{ad}x\operatorname{ad}y},$$

即有 $B(\varphi(x),\varphi(y)) = \overline{B(x,y)}$. 因此证明了

$$\begin{aligned}\overline{H(x,y)} &= -\overline{B(x,\tau'(y))} = -\overline{B(\tau'(\tau'(x)),\tau'(y))}\\ &= -B(\tau'(x),y) = -B(y,\tau'(x)) = H(y,x),\end{aligned}$$

所以证明了 $H(x,y)$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 上的 **Hermite 双线性函数**. 由 Killing 型非退化可知 $H(x,y)$ 为非退化 Hermite 双线性函数. 由于 $\mathfrak{G}_c' = (\mathfrak{L},\tau')$, 所以紧半单李代数 $\mathfrak{G}_c'$ 为 $\mathfrak{L}$ 中 τ' 的不动点集. 因此, 将 Hermite 双线性函数 $H(x,y)$ 限制在紧半单李代数 $\mathfrak{G}_c'$ 上, 有 $H(x,y) = -B_0(x,y)$, $\forall\, x,y \in \mathfrak{G}_c'$, 其中 $B_0(x,y)$ 为李代数 $\mathfrak{G}_c'$ 上的 Killing 型, 所以由 $-B_0(x,y)$ 定正可知 Hermite 双线性函数 $H(x,y)$ 限制在紧半单李代数 $\mathfrak{G}_c'$ 上为不变内积. 关于此内积, 在紧半单李代数 $\mathfrak{G}_c'$ 中取定标准正交基 $e_1,\cdots,e_n$, 因此有

$$H(e_i,e_j) = -B(e_i,\tau'(e_j)) = -B(e_i,e_j) = \delta_{ij},\ 1 \le i,j \le n.$$

由于 $\mathfrak{G}'_c$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的实形式，所以实李代数 $\mathfrak{G}'_c$ 的基也是复李代数 $\mathfrak{L}$ 的基. 在 $\mathfrak{G}'_c$ 中取定基 $e_1,\cdots,e_n$, 在这组基下，Hermite 双线性函数 $H(x,y)$ 对应的方阵表示为单位方阵. 事实上， $x=\sum x_i e_i$, $y=\sum y_j e_j$, 则

$$H(x,y)=\sum x_i\overline{y_i}=xI\overline{y}',$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$, 又 I 为单位方阵. 这证明了 Hermite 双线性函数 $H(x,y)$ 实际上是复半单李代数的内积.

令 $\theta=\sigma\tau'$, 所以

$$\theta^{-1}\tau'=(\sigma\tau')^{-1}\tau'=\tau'\sigma\tau'=\tau'\theta.$$

因此任取 $x,y\in\mathfrak{L}$, 则由 Killing 型在李代数的自同构下不变，有

$$\begin{aligned}H(\theta(x),y)=&-B(\theta(x),\tau'(y))=-B(x,\theta^{-1}\tau'(y))\\=&-B(x,\tau'\theta(y))=H(x,\theta(y)).\end{aligned}$$

因此记复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的自同构 θ 在基 $e_1,\cdots,e_n$ 下对应的方阵 A, 则在复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 中存在另一组 (复) 基 $f_1,\cdots,f_n$, 使得李代数 $\mathfrak{L}$ 的自同构 θ 对应的方阵表示 A_0 为实对角方阵，而 Hermite 双线性函数 $H(x,y)$ 对应方阵表示为单位方阵. 记 $A_0=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, 则有

$$\theta(f_i)=\lambda_i f_i,\quad 1\le i\le n.$$

记基 $f_1,\cdots,f_n$ 的乘法表为 $[f_i,f_j]=\sum\limits_k C_{ij}^k f_k$, $1\le i,j\le n$. 于是有

$$\sum_k C_{ij}^k\theta(f_k)=[\theta(f_i),\theta(f_j)],$$

即有

$$\sum_k \lambda_i\lambda_j C_{ij}^k f_k=\sum_k C_{ij}^k\lambda_k f_k.$$

这证明了

$$(\lambda_k-\lambda_i\lambda_j)C_{ij}^k=0,\quad 1\le i,j,k\le n.$$

因此当 $C_{ij}^k \neq 0$ 时有 $\lambda_k = \lambda_i\lambda_j$, 所以 $\lambda_k^2 = \lambda_i^2\lambda_j^2$. 这证明了 $(\lambda_k^2)^t = (\lambda_i^2)^t(\lambda_j^2)^t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. 总之，证明了

$$(\lambda_k^{2t} - \lambda_i^{2t}\lambda_j^{2t})C_{ij}^k = 0. \qquad (*)$$

在复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 上构造线性同构 $\theta_t : f_i \to \lambda_i^{2t} f_i$, $1 \leq i \leq n$. 而式 $(*)$ 推出 θ_t 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的自同构. 另一方面，由自同构 θ_t 的定义，可知有

$$\theta_s \circ \theta_t = \theta_t \circ \theta_s = \theta_{s+t}, \quad \theta_t^{-1} = \theta_{-t}, \ \forall t \in \mathbb{R},$$
$$\theta\theta_t = \theta_t\theta, \ \theta_1 = \theta^2, \ \theta_0 = \mathrm{id}\,, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

今 $\theta^{-1}\tau' = \tau'\theta$. 记 $\tau'(f_i) = \sum\limits_j a_{ji} f_j$, $1 \leq i \leq n$, 所以由

$$\theta^{-1}\tau'(f_i) = \theta^{-1}\sum_j a_{ji} f_j = \sum_j a_{ji}\lambda_j^{-1} f_j,$$
$$\tau'\theta(f_i) = \tau'(\lambda_i f_i) = \sum_j a_{ji}\lambda_i f_j$$

推出

$$a_{ji}(\lambda_i - \lambda_j^{-1}) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

于是当 $a_{ji} \neq 0$ 时推出 $\lambda_j^{-1} = \lambda_i$. 这证明了 $\lambda_j^{-2} = \lambda_i^2$. 因此有 $\lambda_j^{-2t} = \lambda_i^{2t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. 这推出

$$a_{ji}(\lambda_i^{2t} - \lambda_j^{-2t}) = 0, \ 1 \leq i, j \leq n.$$

于是有

$$\theta_{-t}\tau' = \theta_t^{-1}\tau' = \tau'\theta_t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

记

$$\tau = \theta_{\frac{1}{4}}\tau'\theta_{-\frac{1}{4}} = \theta_{\frac{1}{2}}\tau' = \tau'\theta_{-\frac{1}{2}}.$$

由于 $\theta_{\pm\frac{1}{2}}$ 都是复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的自同构，所以 τ 仍为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的半对合，且李代数 $\mathfrak{L}$ 有自同构

$$\theta' = \sigma\tau = \sigma\tau'\theta_{-\frac{1}{2}} = \theta\theta_{-\frac{1}{2}} = \theta^{-1}\theta^2\theta_{-\frac{1}{2}} = \theta^{-1}\theta_1\theta_{-\frac{1}{2}},$$
$$\tau'' = \tau\sigma = \theta_{\frac{1}{2}}\tau'\sigma = \theta_{\frac{1}{2}}\theta^{-1} = \theta^{-1}\theta_{\frac{1}{2}} = \theta'.$$

这证明了复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 有自同构

$$\theta' = \sigma\tau = \tau\sigma.$$

现在来计算由半对合 τ 决定的实形式

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_c &= \{x \in \mathfrak{L} | \tau(x) = \theta_{\frac{1}{4}}\tau'\theta_{\frac{1}{4}}^{-1}(x) = x\} \\ &= \{x \in \mathfrak{L} | \tau'(\theta_{-\frac{1}{4}}(x)) = \theta_{-\frac{1}{4}}(x)\} \\ &= \{x \in \mathfrak{L} | \theta_{-\frac{1}{4}}(x) \in \mathfrak{G}'_c\} = \theta_{\frac{1}{4}}(\mathfrak{G}'_c).\end{aligned}$$

注意到 $\theta_{\frac{1}{4}}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的自同构，于是 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型 B 限制在实形式 $\mathfrak{G}_c$ 上为

$$B(x,y) = B(\theta_{-\frac{1}{4}}(x'),\ \theta_{-\frac{1}{4}}(y')) = B(x',y'),$$

其中 $x',y' \in \mathfrak{G}'_c$, $x = \theta_{-\frac{1}{4}}(x')$, $y = \theta_{-\frac{1}{4}}(y')$. 由于紧实形式 $\mathfrak{G}'_c$ 上的 Killing 型 $B(x',y')$ 负定，所以 $\mathfrak{G}_c$ 上的 Killing 型也负定. 这证明了实形式 $\mathfrak{G}_c$ 仍为紧实形式.

至此，证明了任给实半单李代数 $\mathfrak{G}$, 记 $\mathfrak{G}$ 的复化为 $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C$. 则在复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 中存在紧实形式 $\mathfrak{G}_c = (\mathfrak{L}, \tau)$, 使得 $\sigma\tau = \tau\sigma$, 其中半对合 σ 由复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的实形式 $\mathfrak{G}$ 决定.

因此, 我们可以证明复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的半对合 τ 有 $\tau(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$, 且 τ 为 $\mathfrak{G}$ 上的对合自同构. 事实上，任取 $x \in \mathfrak{G}$, 则有 $\sigma(x) = x$. 于是

$$\sigma(\tau(x)) = \tau(\sigma(x)) = \tau(x).$$

这证明了 $\tau(x) \in \mathfrak{G}$. 由 τ 一一便证明了 $\tau(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$. 显然，复半单李代数的半对合 τ 在实形式 $\mathfrak{G}$ 上为李代数自同构，且由 $\tau^2 = \mathrm{id}$ 可知为对合自同构. 这证明了断言.

同理可证复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的半对合 σ 为紧实形式 $\mathfrak{G}_c$ 上的对合自同构. 因此作为实线性空间 $\mathfrak{G}_c$ 上的实线性变换，特征根为 ±1, 且 σ 的方阵表示实相似于对角形，对角元素为 1 或 -1. 这证明了实形式 $\mathfrak{G}_c$ 关于线性变换 σ 分解为特征向量构成的根子空间

直接和

$$\mathfrak{G}_c = \mathfrak{G}_c^+ + \mathfrak{G}_c^-, \quad \mathfrak{G}_c^\pm = \{x \in \mathfrak{G}_c \mid \sigma(x) = \pm x\}.$$

且由 σ 为李代数 $\mathfrak{G}_c$ 的自同构可知

$$\mathfrak{G}_c^+ = [\mathfrak{G}_c^+, \mathfrak{G}_c^+] + [\mathfrak{G}_c^-, \mathfrak{G}_c^-], \quad \mathfrak{G}_c^- = [\mathfrak{G}_c^+, \mathfrak{G}_c^-].$$

由半对合定义可知 $\sqrt{-1}\mathfrak{G}_c^-$ 的元素为 σ 的不动点. 因此 $\mathfrak{G}_c^+$ 和 $\sqrt{-1}\mathfrak{G}_c^-$ 的元素都在半对合 σ 下不动. 这证明了 $\mathfrak{G}_c^+ + \sqrt{-1}\mathfrak{G}_c^- \subset \mathfrak{G}$. 再由 $\mathfrak{G}_c^+ \cap \sqrt{-1}\mathfrak{G}_c^- = 0$ 以及

$$\begin{aligned}\dim_R \mathfrak{G}_c^+ + \dim_R \sqrt{-1}\mathfrak{G}_c^- &= \dim_R \mathfrak{G}_c^+ + \dim_R \mathfrak{G}_c^- \\ &= \dim_R \mathfrak{G}_c = \dim_C \mathfrak{L} = \dim_R \mathfrak{G},\end{aligned}$$

便证明了

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_c^+ + \sqrt{-1}\mathfrak{G}_c^-.$$

改记

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{G}_c^+, \quad \mathfrak{P} = \sqrt{-1}\mathfrak{G}_c^-,$$

便有 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$, $\mathfrak{G}_c = \mathfrak{K} + \sqrt{-1}\mathfrak{P}$. 又 $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}_c^+$ 为紧半单李代数 $\mathfrak{G}_c$ 的子代数, 所以 $\mathfrak{K}$ 为紧子代数. 至此证明了实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 有 Cartan 分解. 证完.

记 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$ 为域 F 上的李代数 $\mathfrak{G}$ 的自同构群.

定理 2.1.15 设 $\mathfrak{G} = (\mathfrak{L}, \sigma)$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的实形式, 则存在紧实形式 $\mathfrak{G}_c = (\mathfrak{L}, \tau)$, 使得 $\sigma\tau = \tau\sigma$, 且 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{G}_c)$, $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$. 又 $\mathfrak{G}$ 有 Cartan 分解 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$, 使得 $\tau|_{\mathfrak{K}} = \mathrm{id}$, $\tau|_{\mathfrak{P}} = -\mathrm{id}$. 反之, 若实形式 $\mathfrak{G} = (\mathfrak{L}, \sigma)$ 有 Cartan 分解 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$, 记紧实形式 $\mathfrak{G}_c = \mathfrak{K} + \sqrt{-1}\mathfrak{P} = (\mathfrak{L}, \tau)$, 则有 $\sigma\tau = \tau\sigma$.

证 前一断言由定理 2.1.14 的证明给出. 下面证明后一断言如下: 由于 $\tau|_{\mathfrak{K}} = \mathrm{id}$, $\tau|_{\sqrt{-1}\mathfrak{P}} = \mathrm{id}$, 所以 $\tau|_{\mathfrak{P}} = -\mathrm{id}$. 因此在实形式 $\mathfrak{G}$ 上有 $\sigma\tau = \tau\sigma$. 当然在 $\mathfrak{G}$ 的复扩充 $\mathfrak{L}$ 上仍有 $\sigma\tau = \tau\sigma$. 定理证完.

定理 2.1.16 复半单李代数的任两紧实形式必互相共轭.

证　设 $\mathfrak{G}_i=(\mathfrak{L},\tau_i)$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的紧实形式，$i=1,2$. 设 $\tau=\tau_1\tau_2$, 则 τ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的自同构. 由定理 2.1.14 的证明，存在李代数 $\mathfrak{L}$ 的自同构族 τ_t, $\forall t\in\mathbb{R}$, 使得 $\tau_2'=\theta_{\frac{1}{4}}\tau_2\theta_{-\frac{1}{4}}$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的半对合. 其不动点集为 $\theta_{\frac{1}{4}}(\mathfrak{G}_2)$, 且 $\theta_{\frac{1}{4}}(\mathfrak{G}_2)$ 为紧实形式. 又 $\mathfrak{G}_1=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$ 为 Cartan 分解，$\theta_{\frac{1}{4}}(\mathfrak{G}_2)=\mathfrak{K}+\sqrt{-1}\mathfrak{P}$ 为紧实形式，注意到 $\mathfrak{G}_1$ 也是紧实形式，所以复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型 B 限制在紧实形式 $\mathfrak{G}_1=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$ 及 $\theta_{\frac{1}{4}}(\mathfrak{G}_2)=\mathfrak{K}+\sqrt{-1}\mathfrak{P}$ 上都负定，因此在子空间 $\mathfrak{P}$ 及 $\sqrt{-1}\mathfrak{P}$ 上都负定. 这推出了子空间 $\mathfrak{P}=0$, 即 $\mathfrak{G}_1=\mathfrak{K}=\theta_{\frac{1}{4}}(\mathfrak{G}_2)$.

于是，为了证紧实形式 $\mathfrak{G}_1$ 和 $\mathfrak{G}_2$ 互相共轭，只要证存在元素 $X\in\mathfrak{L}$, 使得 $\tau_t=\exp t\,\mathrm{ad}\,X$ 就可以了. 由定理 2.1.14 的证明可知，自同构 θ_t 的定义为：在复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 中存在基 $f_1,\cdots,f_n$, 使得

$$\theta_t(f_i)=\lambda_i^{2t}f_i,\ 1\le i\le n,\ t\in\mathbb{R},$$

其中 λ_i^2 为正实数. 记 $\mu_i=\ln\lambda_i^2$, $1\le i\le n$, 则有

$$\theta_t(f_i)=\exp(t\mu_i)f_i,\quad 1\le i\le n.$$

于是自同构 θ_t 的方阵表示为

$$\mathrm{diag}\,(\cdots,\lambda_i^{2t},\cdots)=\mathrm{diag}\,(\cdots,\exp(t\mu_i),\cdots)=\exp tD,$$

其中 $D=\mathrm{diag}\,(\cdots,\mu_i,\cdots)$. 它决定的线性变换仍记作 D, 则有

$$\theta_t=\exp tD,\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

今由 $\theta_t([x,y])=[\theta_t(x),\theta_t(y)]$, $\forall t\in\mathbb{R}$. 在 $t=0$ 附近展开，并取 t 的一次项，便有

$$D([x,y])=[Dx,y]+[x,Dy],\quad \forall x,y\in\mathfrak{L}.$$

这证明了 D 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的微分. 由 1.2 节可知 D 为内微分，即存在 $X\in\mathfrak{L}$, 使得 $D=\mathrm{ad}\,X$. 因此证明了 $\theta_{\frac{1}{4}}=\exp(\frac{1}{4}\mathrm{ad}\,X)$, 即为内自同构. 所以证明了复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的任两紧实形式互相共轭. 证完.

定理 2.1.17 实半单李代数的 Cartan 分解互相共轭.

证 设实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 是由复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的半对合 σ 决定的实形式, 即 $\mathfrak{G}=(\mathfrak{L},\sigma)$. 设

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{K}_1+\mathfrak{P}_1=\mathfrak{K}_2+\mathfrak{P}_2$$

为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的两种 Cartan 分解. 记紧实形式

$$\mathfrak{G}_c^{(i)}=\mathfrak{K}_i+\sqrt{-1}\mathfrak{P}_i=(\mathfrak{L},\tau_i),\quad i=1,2.$$

由定理 2.1.16 可知存在内自同构族 $\theta_t=\exp t\,\mathrm{ad}\,X$, $\forall t\in\mathbb{R}$, 使得 $\mathfrak{G}_c^{(1)}=\theta_{\frac{1}{4}}(\mathfrak{G}_c^{(2)})$, 且有 $\sigma\theta_t=\theta_t\sigma$. 由定理 2.1.15, 有 $\sigma\theta_i=\theta_i\sigma$, $i=1,2$.

今任取 $x\in\mathfrak{K}_2$, 则有

$$\sigma\theta_{\frac{1}{4}}(x)=\theta_{\frac{1}{4}}\sigma(x)=\theta_{\frac{1}{4}}(x),$$

因此 $\theta_{\frac{1}{4}}(x)\in\mathfrak{G}\cap\mathfrak{G}_c^{(1)}\subset\mathfrak{K}_1$. 这证明了 $\theta_{\frac{1}{4}}(\mathfrak{K}_2)\subset\mathfrak{K}_1$. 再任取 $y\in\mathfrak{P}_2$, 则有 $\sqrt{-1}y\in\mathfrak{G}_c^{(2)}$, 又

$$\sigma\theta_{\frac{1}{4}}(y)=\theta_{\frac{1}{4}}\sigma(y)=\theta_{\frac{1}{4}}(y),$$

因此 $\theta_{\frac{1}{4}}(y)\in\mathfrak{G}\cap\theta_{\frac{1}{4}}(\sqrt{-1}\mathfrak{G}_2^{(2)})=\mathfrak{G}\cap\sqrt{-1}\mathfrak{G}_c^{(1)}\subset\mathfrak{P}_1$. 这证明了 $\theta_{\frac{1}{4}}(\mathfrak{P}_2)\subset\mathfrak{P}_1$. 由 $\mathfrak{K}_i\cap\mathfrak{P}_i=0$, $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}_i+\mathfrak{P}_i$, $i=1,2$, 所以 $\theta_{\frac{1}{4}}(\mathfrak{K}_2)=\mathfrak{K}_1$, $\theta_{\frac{1}{4}}(\mathfrak{P}_2)=\mathfrak{P}_1$, 即证明了 Cartan 分解在共轭下唯一. 证完.

下面给出 Cartan 分解的性质, 即有

定理 2.1.18 设 $\mathfrak{G}=(\mathfrak{L},\sigma)$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的半对合 σ 决定的实形式. 记

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$$

为 Cartan 分解, 而 $\mathfrak{G}_c=\mathfrak{K}+\sqrt{-1}\mathfrak{P}=(\mathfrak{L},\tau)$ 为紧实形式, 其中 $\sigma\tau=\tau\sigma$, 则有

(1) $\theta=\sigma\tau=\tau\sigma$ 为复半单李代数的对合自同构, 称为 **Cartan 对合**, 它有 $\theta(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}$, $\theta(\mathfrak{G}_c)=\mathfrak{G}_c$;

(2) $\mathfrak{K} = [\mathfrak{K}, \mathfrak{K}] + [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$, $\mathfrak{P} = [\mathfrak{K}, \mathfrak{P}]$;

(3) $\mathfrak{K}$ 为紧实李代数;

(4) 实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Killing 型 $B_0(x,y)$ 限制在子代数 $\mathfrak{K}$ 上负定, 限制在子空间 $\mathfrak{P}$ 上正定, 又 $B_0(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}) = 0$;

(5) 在子代数 $\mathfrak{K}$ 中存在基 $e_1, \cdots, e_r$, 在子空间 $\mathfrak{P}$ 中存在基 $e_{r+1}, \cdots, e_n$, 使得任取 $x \in \mathfrak{K}$, 则 $\mathrm{ad}\, x$ 关于基 $e_1, \cdots, e_n$ 对应实斜对称方阵; 任取 $y \in \mathfrak{P}$, 则 $\mathrm{ad}\, y$ 关于基 $e_1, \cdots, e_n$ 对应实对称方阵.

证 显然, (1) 由定理 2.1.14 推出. 由 $\mathfrak{G}$ 及 $\mathfrak{G}_c$ 都是实半单李代数可知

$$\mathfrak{G} = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] = [\mathfrak{K}, \mathfrak{K}] + [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] + [\mathfrak{K}, \mathfrak{P}],$$
$$\mathfrak{G}_c = [\mathfrak{G}_c, \mathfrak{G}_c] = [\mathfrak{K}, \mathfrak{K}] + [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] + \sqrt{-1}[\mathfrak{K}, \mathfrak{P}].$$

这证明了 (2). 今 $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{G}_c = \mathfrak{K}$, 由紧李代数的子代数仍紧, 所以 $\mathfrak{K}$ 为 $\mathfrak{G}$ 的紧子代数, 即 (3) 成立. 下面来证 (4) 及 (5).

今 $\mathfrak{G} = (\mathfrak{L}, \sigma)$, $\mathfrak{G}_c = (\mathfrak{L}, \tau)$. 而复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 上的 Killing 型限制在 $\mathfrak{G}$ 及 $\mathfrak{G}_c$ 上分别也都是 Killing 型. 今任取 $x \in \mathfrak{K}, y \in \mathfrak{P}$, 则 $x + \sqrt{-1}y \in \mathfrak{G}_c$. 于是有

$$B(x + \sqrt{-1}y, x + \sqrt{-1}y) = B(x,x) - B(y,y) + 2\sqrt{-1}B(x,y) \leq 0.$$

所以 $B(x,y) = 0$, 且等号成立当且仅当 $x + \sqrt{-1}y = 0$, 即 $x = 0, y = 0$. 今 $B(x,x) \leq 0$, $B(y,y) \geq 0$. 即证明了 $\mathfrak{K}$ 和 $\mathfrak{P}$ 互相正交, 且 Killing 型 $B(x,y)$ 在 $\mathfrak{K}$ 上负定, 在 $\mathfrak{P}$ 上正定. 所以证明了 (4).

最后, 在子代数 $\mathfrak{K}$ 中取关于内积 $-B(x,y)$ 的标准正交基

$$e_1, \cdots, e_r,$$

在子空间 $\mathfrak{P}$ 中取关于内积 $B(x,y)$ 的标准正交基. 因此有

$$B(e_i, e_j) = \begin{cases} -\delta_{ij}, & 1 \leq i,j \leq r; \\ 0, & 1 \leq i \leq r,\ r+1 \leq j \leq n, \\ \delta_{ij}, & r+1 \leq i,j \leq n. \end{cases}$$

所以，关于复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的基 $e_1,\cdots,e_n$, Killing 型 B 的对应方阵为 $\operatorname{diag}(-I^{(r)},I^{(n-r)})$. 但是 Killing 型有不变性，即有

$$B((\operatorname{ad}x)y,z)+B(y,(\operatorname{ad}x)z)=0.$$

记 $\operatorname{ad}x$ 关于上述基的方阵表示为 A_x, 则有

$$A_x\begin{pmatrix}-I^{(r)} & 0\\ 0 & I^{(n-r)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-I^{(r)} & 0\\ 0 & I^{(n-r)}\end{pmatrix}A_x'=0.$$

将 A_x 按前 r 行、列分块，便给出等价表达式

$$A_x=\begin{pmatrix}K_{1x} & B_x\\ B_x' & K_{2x}\end{pmatrix},$$

其中 $K_{1x}+K_{1x}'=0$, $K_{2x}+K_{2x}'=0$.

特别取 $x\in\mathfrak{K}$, 则由 $(\operatorname{ad}x)\mathfrak{K}\subset\mathfrak{K}$, $(\operatorname{ad}x)\mathfrak{P}\subset\mathfrak{P}$ 可知 $B_x=0$, 因此 $\operatorname{ad}x$ 的方阵表示为斜对称方阵；取 $x\in\mathfrak{P}$, 则由 $(\operatorname{ad}x)\mathfrak{K}\subset\mathfrak{P}$, $(\operatorname{ad}x)\mathfrak{P}\subset\mathfrak{K}$ 可知 $K_{1x}=0$, $K_{2x}=0$, 因此 $\operatorname{ad}x$ 对应的方阵表示为对称方阵. 这证明了 (5). 定理证完.

定理 2.1.19 设 ρ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}_1$ 到 $\mathfrak{G}_2$ 上的李代数同构. 设 $\mathfrak{G}_1=\mathfrak{K}_1+\mathfrak{P}_1$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}_1$ 的 Cartan 分解，则

$$\mathfrak{G}_2=\rho(\mathfrak{G}_1)=\rho(\mathfrak{K}_1)+\rho(\mathfrak{P}_1)$$

为实半单李代数 $\mathfrak{G}_2$ 的 Cartan 分解. 换句话说， Cartan 分解在李代数的同构下不变.

证 由引理 2.1.12, 实半单李代数紧当且仅当它的 Killing 型负定. 已知 $\mathfrak{G}_1=\mathfrak{K}_1+\mathfrak{P}_1$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}_1$ 的 Cartan 分解，于是 $\mathfrak{G}_{1c}=\mathfrak{K}_1+\sqrt{-1}\mathfrak{P}_1$ 紧，因此它的 Killing 型负定. 今 $\rho(\mathfrak{G}_1)=\rho(\mathfrak{K}_1+\mathfrak{P}_1)$. 记复半单李代数 $\mathfrak{L}_i=\mathfrak{G}_i^C$ 的 Killing 型为 $B_i(x,y)$, $i=1,2$. 则有

$$B_2(\rho(x),\rho(y))=B_1(x,y),\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{G}_1.$$

所以由 B_1 在 $\mathfrak{G}_{1c}$ 上负定可知 B_2 在 $\rho(\mathfrak{G}_{1c})$ 上负定. 这证明了 $\rho(\mathfrak{G}_{1c})$ 为紧李代数, 记作 $\mathfrak{G}_{2c}$. 因此我们有子空间直接和分解:

$$\mathfrak{G}_2 = \rho(\mathfrak{K}_1) + \rho(\mathfrak{P}_1), \quad \mathfrak{G}_{2c} = \rho(\mathfrak{K}_1) + \sqrt{-1}\rho(\mathfrak{P}_1),$$

其中 $\mathfrak{G}_{2c}$ 为紧半单李代数. 这证明了 $\mathfrak{G}_2 = \rho(\mathfrak{K}_1) + \rho(\mathfrak{P}_1)$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}_2$ 的 Cartan 分解. 定理证完.

利用复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的紧实形式在 $\mathfrak{L}$ 的内自同构下互相共轭, 又实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 分解在其复化 $\mathfrak{L}$ 的内自同构下互相共轭, 所以从实半单李代数的分类角度, 我们可以固定紧实形式为 $\mathfrak{H} + \sum\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{L}_\alpha$ 的 Weyl 基 $\{e_\alpha | \forall\, \alpha \in \Delta\}$ 决定的实子代数

$$\mathfrak{G}_c = \sqrt{-1}\mathfrak{H}_R + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}(e_\alpha - e_{-\alpha}) + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}\sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha}).$$

而实形式 $\mathfrak{G}$ 决定的半对合 σ 为 $\mathfrak{G}_c$ 的对合自同构. 实际上, σ 在 $\mathfrak{G}_c$ 上为 Cartan 对合, 即 Cartan 对合 $\theta = \sigma\tau = \tau\sigma$ 有 $\theta|_{\mathfrak{G}_c} = \sigma|_{\mathfrak{G}_c}$. 所以问题化为首先考虑复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 上的所有使 $\mathfrak{G}_c$ 映为自身的对合自同构在 $\mathfrak{L}$ 的使 $\mathfrak{G}_c$ 映为自身的内自同构下的分类.

另一方面, 从 Cartan 分解可知, 当 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 时有 $\mathfrak{G}_c = \mathfrak{K} + \sqrt{-1}\mathfrak{P}$, 所以 $\mathfrak{K}$ 为紧实形式 $\mathfrak{G}_c$ 的紧子代数. 这个子代数实际上也刻画了实形式 $\mathfrak{G}$. 所以研究紧实形式 $\mathfrak{G}_c$ 中什么子代数能扮演 $\mathfrak{K}$ 的角色, 是实半单李代数分类理论的重要方面. 由于 $\mathfrak{K}$ 实际上是 Cartan 对合在 $\mathfrak{G}_c$ 的不动点集, 我们称它为紧实形式 $\mathfrak{G}_c$ 的**特征子代数**. 由此可见, 实半单李代数的分类问题的研究, 化为决定紧半单李代数的对合自同构在内自同构共轭下的分类, 以及对合自同构的特征子代数的性质的研究.

§ 2.2 Iwasawa 分解

为了引进 Iwasawa 分解，我们先讨论实半单李代数的 Cartan 子代数. 我们有

定理 2.2.1 实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的子代数 $\mathfrak{H}_0$ 为 Cartan 子代数，当且仅当 $\mathfrak{H}_0$ 为极大交换子代数，且 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_0$ 由 $\mathfrak{G}$ 上的一批半单线性变换构成.

证 记实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的复化为 $\mathfrak{L}$. 设 $\mathfrak{H}_0$ 为 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数. 由 Cartan 子代数的定义为极大幂零，且其正规化子为自身可知，$\mathfrak{H}_0$ 的复化 $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0^C$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数. 由 1.2 节可知 $\mathfrak{H}$ 为 $\mathfrak{L}$ 的极大交换子代数，且 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 由复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 上的一批半单元素构成. 今 $\mathfrak{H}_0\subset\mathfrak{H}$, 即实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0$ 为 $\mathfrak{H}$ 的子集，所以 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_0$ 在复线性空间 $\mathfrak{L}$ 上半单，因此在其实形式上半单. 又显然 $\mathfrak{H}_0$ 为实李代数 $\mathfrak{G}$ 的极大交换子代数. 至此证明了充分性.

下面来证必要性. 设 $\mathfrak{H}_0$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的极大交换子代数，且 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_0$ 由一批半单元素构成. 于是，$\mathfrak{H}_0$ 的复化 $\mathfrak{H}$ 在李代数 $\mathfrak{G}$ 的复化 $\mathfrak{L}$ 上为交换子代数. 因此，$\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_0$ 和 $\mathrm{ad}\,\sqrt{-1}\mathfrak{H}_0$ 可交换，所以 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$ 由复线性空间 $\mathfrak{L}$ 上的一批半单元素构成，我们来证 $\mathfrak{H}$ 在李代数 $\mathfrak{L}$ 中极大交换. 设若不然，$\mathfrak{L}$ 中存在交换子代数 $\tilde{\mathfrak{H}}\supset\mathfrak{H}$. 任取 $x\in\tilde{\mathfrak{H}}$, $x\notin\mathfrak{H}$, 记 $x=y+\sqrt{-1}z$. 今 $\mathfrak{H}_0\subset\mathfrak{H}$, 所以有 $0=[x,\mathfrak{H}_0]=[y,\mathfrak{H}_0]+\sqrt{-1}[z,\mathfrak{H}_0]$. 这证明了 $[y,\mathfrak{H}_0]=0$, $[z,\mathfrak{H}_0]=0$. 今由 $x\notin\mathfrak{H}$ 可知 $y\notin\mathfrak{H}_0$ 或者 $z\notin\mathfrak{H}_0$. 至此，在实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 中找到元素 $a\notin\mathfrak{H}_0$, $[a,\mathfrak{H}_0]=0$. 于是 $\mathfrak{H}_0$ 和 a 线性生成比 $\mathfrak{H}_0$ 大的交换子代数. 这和 $\mathfrak{H}_0$ 为 $\mathfrak{G}$ 中极大交换子代数矛盾. 因此证明了复李代数 $\mathfrak{L}$ 中 $\mathfrak{H}$ 极大交换. 由 1.2 节可知 $\mathfrak{H}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数. 所以证明了 $\mathfrak{H}_0$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数. 定理证完.

推论 实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的子代数 $\mathfrak{H}_0$ 为 Cartan 子代数，当且仅当它的复化 $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0^C$ 为 $\mathfrak{G}$ 的复化 $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$ 的 Cartan 子代数.

在 §1.2 中，我们未加证明地承认了复半单李代数的 Cartan 子代数互相共轭. 在实半单李代数的情形，有例子说明其 Cartan 子代数不一定互相共轭. 实际上，有许多互不共轭的 Cartan 子代数. 为此，我们对一些特殊的 Cartan 子代数作一番讨论.

定义 2.2.2 设 $\mathfrak{H}_0$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数. 记

$$\mathfrak{H}_c=\{h_0\in\mathfrak{H}_0\mid \operatorname{ad}h_0 \quad \text{的非零特征根纯虚}\},$$

$$\mathfrak{H}_v=\{h_0\in\mathfrak{H}_0\mid \operatorname{ad}h_0 \quad \text{的特征根都是实数}\}.$$

则 $\mathfrak{H}_c$ 及 $\mathfrak{H}_v$ 分别称为 Cartan 子代数的**环面部分**及**向量部分**.

显然，实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0$ 的环面部分 $\mathfrak{H}_c$ 及向量部分 $\mathfrak{H}_v$ 都是 $\mathfrak{H}_0$ 的交换子代数. 我们有

定理 2.2.3. 设 $\mathfrak{H}_0$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数，$\mathfrak{H}_c$ 及 $\mathfrak{H}_v$ 分别为 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0$ 的环面部分及向量部分. 则 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0$ 有子空间直接和分解

$$\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}_c+\mathfrak{H}_v,$$

且存在实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 分解

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P},$$

使得

$$\mathfrak{H}_c=\mathfrak{K}\cap\mathfrak{H}_0,\quad \mathfrak{H}_v=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{H}_0.$$

复半单李代数 $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0^C$ 的根子空间分解

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{H}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{L}_\alpha$$

的根系 Δ 及 Weyl 基 $\{e_\alpha\mid\forall\alpha\in\Delta\}$ 有性质：

(1) $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0^C$ 的有限子集 Δ 实线性生成实线性空间

$$\mathfrak{H}_R=\sqrt{-1}\mathfrak{H}_c+\mathfrak{H}_v;$$

(2) Cartan 分解 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$, 若有 $\mathfrak{H}_c=\mathfrak{K}\cap\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{H}_v=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{H}_0$, 则紧实形式 $\mathfrak{G}_c=\mathfrak{K}+\sqrt{-1}\mathfrak{P}=(\mathfrak{L},\tau)$ 有,

$$\tau(\alpha)=-\alpha,\ \tau(e_\alpha)=-e_{-\alpha},\quad \forall\alpha\in\Delta;$$

(3) 设实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 决定的半对合为 σ, 即 $\mathfrak{G}=(\mathfrak{L},\sigma)$, 则有

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}&=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}\\&=\mathfrak{H}_0+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}(e_\alpha+\sigma(e_\alpha))+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}\sqrt{-1}(e_\alpha-\sigma(e_{-\alpha})),\\ \mathfrak{G}_c&=\mathfrak{K}+\sqrt{-1}\mathfrak{P}\\&=\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}(e_\alpha+\tau(e_\alpha))+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}\sqrt{-1}(e_\alpha-\tau(e_{-\alpha})).\end{aligned}$$

证　令 $\mathfrak{H}_0$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数, 所以 $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0^C$ 为复半单李代数 $\mathfrak{G}^C=\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数. 记

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{H}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{L}_\alpha$$

为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的根子空间分解, 其中 Δ 为根系. 在 Δ 中取定单根系 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$. 由引理 2.1.10, 所以在 $\mathfrak{L}$ 中取定 Weyl 基 $h_1',\cdots,h_l'$, e_α', $\forall\alpha\in\Delta$, 则有紧实形式

$$\mathfrak{G}_c'=\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}(e_\alpha'-e_{-\alpha}')+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}\sqrt{-1}(e_\alpha'+e_{-\alpha}').$$

记紧实形式 $\mathfrak{G}_c'$ 决定的复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的半对合为 τ', 记实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 决定的李代数 $\mathfrak{L}$ 的半对合为 σ, 而复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 有自同构 $\theta=\sigma\tau'$, $\theta^2=\theta_1$. 由定理 2.1.16 的证明可知存在李代数 $\mathfrak{L}$ 的自同构族 σ_t, $\forall t\in\mathbb{R}$, 使得李代数 $\mathfrak{L}$ 有紧实形式 $\mathfrak{G}_c=\theta_{\frac14}(\mathfrak{G}_c')$, 它决定半对合 $\tau=\theta_{\frac14}\tau'\theta_{-\frac14}$, 且有 Cartan 分解

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P},\quad \mathfrak{G}_c=\mathfrak{K}+\sqrt{-1}\mathfrak{P}.$$

注意到实形式 $\mathfrak{G}_c'$ 决定了半对合 τ', 所以有 $\tau'(\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R)=\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R$. 同理, 实形式 $\mathfrak{G}$ 决定半对合 σ, 所以有 $\sigma(\mathfrak{H}_0)=\mathfrak{H}_0$. 因此 $\sigma(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$, $\tau'(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$, 这证明了 $\theta(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$. 于是 $\theta^2(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$. 进而易证 $\theta_t(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$, $\forall t\in\mathbb{R}$. 由根系的定义可知

$$\theta_{\frac{1}{4}}(\{h_\alpha\mid\forall\alpha\in\Delta\})=\{h_\alpha\mid\forall\alpha\in\Delta\},$$

因此有 $\theta_{\frac{1}{4}}(\mathfrak{H}_R)=\mathfrak{H}_R$. 而 $\theta_{\frac{1}{4}}$ 将 Weyl 基映为 Weyl 基. 这证明了在复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 中存在 Weyl 基 $\{e_\alpha\mid\forall\alpha\in\Delta\}$, 使得

$$\mathfrak{G}_c=\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}(e_\alpha-e_{-\alpha})+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}\sqrt{-1}(e_\alpha+e_{-\alpha}).$$

显然, $\mathfrak{H}_c\cap\mathfrak{H}_v=0$, $\mathfrak{H}_c+\mathfrak{H}_v\subset\mathfrak{H}_0$. 我们来证 $\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}_c+\mathfrak{H}_v$, $\mathfrak{H}_c=\mathfrak{K}\cap\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{H}_v=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{H}_0$. 事实上, 由定理 2.1.18 及 $\mathfrak{H}_c,\mathfrak{H}_v$ 的定义可证 $\mathfrak{K}\cap\mathfrak{H}_0\subset\mathfrak{H}_c$, $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{H}_0\subset\mathfrak{H}_v$. 于是只要证明 $\mathfrak{K}\cap\mathfrak{H}_0+\mathfrak{P}\cap\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}_0$ 就够了.

今已证明了 $\theta_{\frac{1}{4}}(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$, $\tau'(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$. 由 $\tau=\theta_{\frac{1}{4}}\tau'\theta_{-\frac{1}{4}}$ 可知 $\tau(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$. 由 τ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的对合自同构, 所以 $\tau(\mathfrak{H}_0)\subset\mathfrak{G}\cap\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0$. 任取 $x\in\mathfrak{H}_0$, 则 $\tau(x)\in\mathfrak{H}_0$. 于是 $\frac{1}{2}(x+\tau(x))\in\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{K}$, $\frac{1}{2}(x-\tau(x))\in\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{P}$. 因此证明了 $x\in\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{K}+\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{P}$. 至此证明了 $\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}_c+\mathfrak{H}_v$, $\mathfrak{H}_c=\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{K}$, $\mathfrak{H}_v=\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{P}$.

现在开始证明性质 (1),(2),(3). 先证 (1). 事实上, 由 $\mathfrak{H}_c+\sqrt{-1}\mathfrak{H}_v\subset\mathfrak{K}+\sqrt{-1}\mathfrak{P}=\mathfrak{G}_c=\theta_{\frac{1}{4}}(\mathfrak{G}_c')$, 所以 $\mathfrak{H}_c+\sqrt{-1}\mathfrak{H}_v\subset\theta_{\frac{1}{4}}(\mathfrak{G}_c')\cap\mathfrak{H}=\theta_{\frac{1}{4}}(\mathfrak{G}_c'\cap\mathfrak{H})=\theta_{\frac{1}{4}}(\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R)=\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R$. 这证明了 $\sqrt{-1}\mathfrak{H}_c+\mathfrak{H}_v\subset\mathfrak{H}_R$. 由于 $\sqrt{-1}\mathfrak{H}_c\cap\mathfrak{H}_v=0$, 而

$$\begin{aligned}\dim_R\sqrt{-1}\mathfrak{H}_c+\dim_R\mathfrak{H}_v&=\dim_R\mathfrak{H}_c+\dim_R\mathfrak{H}_v\\&=\dim_R\mathfrak{H}_0=\dim_R\mathfrak{H}_R.\end{aligned}$$

这证明了 $\mathfrak{H}_R=\mathfrak{H}_v+\sqrt{-1}\mathfrak{H}_c$. 所以证明了 (1).

再由 $\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R\subset\mathfrak{G}_c$, 所以 $\tau(\sqrt{-1}h_\alpha)=\sqrt{-1}h_\alpha$, $\tau(e_\alpha-e_{-\alpha})=e_\alpha-e_{-\alpha}$, $\tau(\sqrt{-1}(e_\alpha+e_{-\alpha}))=\sqrt{-1}(e_\alpha+e_{-\alpha})$. 这证明了 $\tau(h_\alpha)=-h_\alpha$, $\tau(e_\alpha)=-e_{-\alpha}$, $\forall\alpha\in\Delta$. 所以 (2),(3) 成立. 证完.

定理 2.2.4 设 $\mathfrak{H}_1$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数，$\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$ 为 Cartan 分解，则存在 $x_0\in\mathfrak{G}$，使得 $\mathfrak{H}_0=(\exp\operatorname{ad}x_0)\mathfrak{H}_1$ 仍为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数，且有

$$\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}_c+\mathfrak{H}_v,\quad \mathfrak{H}_c=\mathfrak{K}\cap\mathfrak{H}_0,\quad \mathfrak{H}_c=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{H}_0,$$

其中 $\mathfrak{H}_c$ 为环面部分，$\mathfrak{H}_v$ 为向量部分.

证 由定理 2.2.1 可知，给定实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_1$，则存在 Cartan 分解 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}_1+\mathfrak{P}_1$，使得 $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{K}_1\cap\mathfrak{H}_1+\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{H}_1$，其中 $\mathfrak{H}_c'=\mathfrak{K}_1\cap\mathfrak{H}_1$ 及 $\mathfrak{H}_v'=\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{H}_1$ 分别为 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_1$ 的环面部分和向量部分. 由定理 2.1.5，实半单李代数的 Cartan 分解互相共轭. 所以 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}=\mathfrak{K}_1+\mathfrak{P}_1$ 互相共轭，即存在 $x_0\in\mathfrak{G}$，使得

$$(\exp\operatorname{ad}x_0)\mathfrak{K}_1=\mathfrak{K},\quad (\exp\operatorname{ad}x_0)\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}.$$

令 $(\exp\operatorname{ad}x_0)\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}_0$ 仍为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数，于是有

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_0&=(\exp\operatorname{ad}x_0)\mathfrak{H}_1=(\exp\operatorname{ad}x_0)(\mathfrak{H}_1\cap\mathfrak{K}_1)+(\exp\operatorname{ad}x_0)(\mathfrak{H}_1\cap\mathfrak{P}_1)\\&=\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{K}+\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{P}.\end{aligned}$$

至此证明了 $\mathfrak{H}_c=\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{K}$，$\mathfrak{H}_v=\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{P}$ 分别为 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0$ 的环面部分及向量部分. 证完.

下面考虑两类特殊的 Cartan 子代数.

定义 2.2.5 设 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 分解. $\mathfrak{H}_0$ 为 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数，使得 $\mathfrak{H}_c=\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{K}$ 及 $\mathfrak{H}_v=\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{P}$ 分别为 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的环面部分及向量部分. $\mathfrak{H}_0$ 称为 **最大向量 Cartan 子代数**，如果 $\mathfrak{H}_v$ 为 $\mathfrak{P}$ 的极大交换子代数. $\mathfrak{H}_0$ 称为 **最大紧 Cartan 子代数**，如果 $\mathfrak{H}_c$ 为 $\mathfrak{K}$ 的极大交换子代数.

定理 2.2.6 设 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 分解，在 $\mathfrak{P}$(或 $\mathfrak{K}$) 中任取极大交换子代数 $\mathfrak{H}_v$(或 $\mathfrak{H}_c$)，再在 $\mathfrak{G}$ 中取包含 $\mathfrak{H}_v$(或 $\mathfrak{H}_c$) 的极大交换子代数 $\mathfrak{H}_0$，则 $\mathfrak{H}_0$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的最大向量 (或最大紧)Cartan 子代数.

证 任取 $x \in \mathfrak{H}_0$，由 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$，所以 $x = x' + x''$，其中 $x' \in \mathfrak{K}$，$x'' \in \mathfrak{P}$．今设 $\mathfrak{H}_v(\subset \mathfrak{H}_0)$ 为 $\mathfrak{P}$ 中极大交换子代数，由

$$0 = [x, \mathfrak{H}_v] = [x', \mathfrak{H}_v] + [x'', \mathfrak{H}_v]$$

及 $[x', \mathfrak{H}_v] \subset [\mathfrak{K}, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{P}$，$[x'', \mathfrak{H}_v] \subset [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{K}$ 可知 $[x'', \mathfrak{H}_v] = 0$．由 $\mathfrak{H}_v$ 在 $\mathfrak{P}$ 中为极大交换子代数，便证明了 $x'' \in \mathfrak{H}_v \subset \mathfrak{H}_0$，所以 $x' = x - x'' \in \mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{K}$，这证明了交换子代数 $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{K} + \mathfrak{H}_v$，$\mathfrak{H}_v = \mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{P}$．记 $\mathfrak{H}_c = \mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{K}$．由定理 2.2.1，为了证 $\mathfrak{H}_0$ 为实半单李代数的 Cartan 子代数，只要证 $\operatorname{ad} \mathfrak{H}_0$ 由线性空间 $\mathfrak{G}$ 上的半单线性变换构成．由定理 2.1.18 可知，$\operatorname{ad} \mathfrak{K}$，$\operatorname{ad} \mathfrak{P}$ 都由半单元素构成．又由 $[\mathfrak{H}_v, \mathfrak{H}_c] \subset [\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_0] = 0$ 可知 $[\operatorname{ad} \mathfrak{H}_v, \operatorname{ad} \mathfrak{H}_c] = 0$，因此证明了 $\operatorname{ad} \mathfrak{H}_0$ 的元素两两可交换，又 $\operatorname{ad} \mathfrak{H}_0 = \operatorname{ad} \mathfrak{H}_v + \operatorname{ad} \mathfrak{H}_c$．因此 $\operatorname{ad} \mathfrak{H}_0$ 由半单元素构成．至此证明了 $\mathfrak{H}_0$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数．

再设 $\mathfrak{H}_c$ 为 $\mathfrak{K}$ 的极大交换子代数．由

$$0 = [x, \mathfrak{H}_c] = [x', \mathfrak{H}_c] + [x'', \mathfrak{H}_c],$$

而 $[x', \mathfrak{H}_c] \subset [\mathfrak{K}, \mathfrak{K}] \subset \mathfrak{K}$，$[x'', \mathfrak{H}_c] \subset [\mathfrak{P}, \mathfrak{K}] \subset \mathfrak{P}$，推出 $[x', \mathfrak{H}_c] = 0$．由 $\mathfrak{H}_c$ 为 $\mathfrak{K}$ 的极大交换子代数，所以证明了 $x' \in \mathfrak{H}_c$．因此 $x'' = x - x' \in \mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{P}$．这证明了交换子代数 $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{K} + \mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{P}$，$\mathfrak{H}_c = \mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{K}$，$\mathfrak{H}_v = \mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{P}$．和上面一样，立即推出 $\mathfrak{H}_0$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数．定理证完．

注意，除了最大向量 Cartan 子代数及最大紧 Cartan 子代数外，还有许多介于两者之间的 Cartan 子代数存在．

在严志达和许以超合著的《李群及其李代数》一书中，用严志达教授的方法，即用最大紧 Cartan 子代数来给出实半单李代数的分类．现在我们从最大向量 Cartan 子代数出发，引进 Iwasawa 分解．实际上，用最大向量 Cartan 子代数也可以给出实半单李代数的分类，本书就不涉及了．

在下面，为了引进 Iwasawa 分解，我们在实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 中取定一个最大向量 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0$ 来讨论．这时，取定 Cartan

分解 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$, 最大向量 Cartan 子代数

$$\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}_c+\mathfrak{H}_v,\quad \mathfrak{H}_c=\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{K},\quad \mathfrak{H}_v=\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{P},$$

其中 $\mathfrak{H}_v$ 为 $\mathfrak{P}$ 的极大交换子代数.

今已知 $\mathfrak{G}_c=\mathfrak{K}+\sqrt{-1}\mathfrak{P}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$ 的紧实形式. 记 $\mathfrak{G}=(\mathfrak{L},\sigma)$, $\mathfrak{G}_c=(\mathfrak{L},\tau)$, 其中 σ,τ 都是复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的半对合, 而 $\theta=\sigma\tau=\tau\sigma$ 为复半单李代数的 Cartan 对合. 记 $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0^C$, 则复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{H}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{L}_\alpha,$$

其中 Δ 为根系, 它决定 $\mathfrak{H}$ 的子集合

$$h_\Delta=\{h_\alpha\mid\forall\alpha\in\Delta\},$$

仍用 Δ 来表示. 而 Δ 实线性生成 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的实子空间 $\mathfrak{H}_R=\sqrt{-1}\mathfrak{H}_c+\mathfrak{H}_v$ (见定理 2.2.1). 在 $\mathfrak{H}_v$ 中取基, 再在 $\sqrt{-1}\mathfrak{H}_c$ 中取基, 于是在实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 中取定基. 以这组基定义次序, 于是在根系 Δ 中有单根系 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$. 因此记 Δ^+ 为正根集, Δ^- 为负根集. 于是正根系 Δ^+ 分成两部分

$$P_+=\{\alpha\in\Delta^+\mid\theta(h_\alpha)\neq h_\alpha\},\quad P_-=\{\alpha\in\Delta^+\mid\theta(h_\alpha)=h_\alpha\}.$$

因此有

引理 2.2.7 符号同上. 子集合 P_+ 及 P_- 有

(1) 当 $\alpha\in P_-$ 时, 有

$$\tau(h_\alpha)=-h_\alpha,\ \sigma(h_\alpha)=-h_\alpha,\ \theta(h_\alpha)=h_\alpha,$$

又 $\mathfrak{L}_\alpha+\mathfrak{L}_{-\alpha}\subset\mathfrak{K}^C$, 且

$$P_-=\{\alpha\in\Delta^+\mid h_\alpha\in\sqrt{-1}\mathfrak{H}_c\};$$

(2) 当 $\alpha\in P_+$ 时, 有

$$\tau(h_\alpha)=-h_\alpha,\ \sigma(h_\alpha)=-\theta(h_\alpha),$$

且存在 $\beta \in P_+$, 使得 $\sigma(h_\alpha) = h_\beta$, 又 $\alpha \in P_+$ 当且仅当 h_α 在 $\mathfrak{H}_v$ 上的投影不等于零.

证 今 $\mathfrak{H}_R = \sqrt{-1}\mathfrak{H}_c + \mathfrak{H}_v$. 任取 $\alpha \in \Delta^+$, 则 $h_\alpha = h'_\alpha + h''_\alpha$, 其中 $\sqrt{-1}h'_\alpha \in \mathfrak{H}_c$, $h''_\alpha \in \mathfrak{H}_v$. 因此

$$\begin{aligned}
\tau(h_\alpha) &= \tau(h'_\alpha) + \tau(h''_\alpha) = -h'_\alpha - h''_\alpha = -h_\alpha,\\
\sigma(h_\alpha) &= \sigma(h'_\alpha) + \sigma(h''_\alpha) = -h'_\alpha + h''_\alpha,\\
\theta(h_\alpha) &= \sigma\tau(h_\alpha) = h'_\alpha - h''_\alpha.
\end{aligned}$$

由 P_+ 及 P_- 的定义可知

$$\begin{aligned}
P_+ &= \{\alpha \in \Delta^+ \mid \theta(h_\alpha) \neq h_\alpha\}\\
&= \{\alpha \in \Delta^+ \mid h_\alpha = h'_\alpha + h''_\alpha,\ h''_\alpha \neq 0\},\\
P_- &= \{\alpha \in \Delta^+ \mid \theta(h_\alpha) = h_\alpha\}\\
&= \{\alpha \in \Delta^+ \mid h_\alpha = h'_\alpha, h''_\alpha = 0\}.
\end{aligned}$$

先来证 (1). 今 $\alpha \in P_-$, 即 $h''_\alpha = 0$, $h_\alpha = h'_\alpha \in \sqrt{-1}\mathfrak{H}_c$. 于是 $\tau(h_\alpha) = -h_\alpha$, $\sigma(h_\alpha) = -h_\alpha$, $\theta(h_\alpha) = h_\alpha$. 因此只要证 $\mathfrak{L}_\alpha + \mathfrak{L}_{-\alpha} \subset \mathfrak{K}^C$ 就可以了.

记 $0 \neq e_\alpha \in \mathfrak{L}_\alpha \subset \mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C = \mathfrak{K}^C + \mathfrak{P}^C$. 所以 $e_\alpha = x_\alpha + y_\alpha$, 其中 $x_\alpha \in \mathfrak{K}^C$, $y_\alpha \in \mathfrak{P}^C$. 今 Cartan 对合 θ 为复半单李代数的自同构, 它有 $\theta(h_\alpha) = h_\alpha$. 由

$$[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha = B(h_\alpha, h)e_\alpha,$$

其中 B 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型. 所以有

$$[\theta(h), \theta(e_\alpha)] = \alpha(h)\theta(e_\alpha) = B(h_\alpha, h)\theta(e_\alpha) = B(\theta(h_\alpha), \theta(h))\theta(e_\alpha).$$

由 $\theta(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$ 可知 $[h, \theta(e_\alpha)] = B(h, \theta(h_\alpha))\theta(e_\alpha)$. 由 $\alpha \in P_+$ 可知 $\theta(h_\alpha) = h_\alpha$, 这证明了 $\theta(e_\alpha) \in \mathfrak{L}_\alpha$. 因此 $\theta(e_\alpha) = a_\alpha e_\alpha$. 由于 $\theta^2 = \mathrm{id}$, 所以 $a_\alpha = \pm 1$. 设 $a_\alpha = 1$, 则 $\theta(e_\alpha) = e_\alpha$, 即 $\theta(x_\alpha) + \theta(y_\alpha) = x_\alpha + y_\alpha$, 但是 $\theta|_{\mathfrak{K}} = \mathrm{id}$, $\theta|_{\mathfrak{P}} = -\mathrm{id}$, 这导出 $\theta(x_\alpha) = x_\alpha, \theta(y_\alpha) = -y_\alpha$. 于是证明了 $y_\alpha = 0$, 即 $e_\alpha = x_\alpha \in \mathfrak{K}^C$. 这证明了 $\mathfrak{L}_\alpha \subset \mathfrak{K}^C$. 设 $a_\alpha = -1$,

则 $\theta(e_\alpha)=-e_\alpha$, 即 $x_\alpha=0$. 于是 $e_\alpha\in\mathfrak{P}^C$. 这时有 $[\mathfrak{H}_v,e_\alpha]=0$. 事实上，任取 $h'\in\mathfrak{H}_v$, $[h',e_\alpha]=B(h_\alpha,h')e_\alpha$. 今 $h'\in\mathfrak{P}^C$, $h_\alpha\in\mathfrak{K}^C$, 所以 $B(h_\alpha,h')=0$, 即 $[h',e_\alpha]=0$. 这证明了 $[\mathfrak{H}_v,e_\alpha]=0$. 由 $e_\alpha\neq 0$, $e_\alpha\in\mathfrak{P}^C$ 以及 $\mathfrak{L}_\alpha\cap\mathfrak{H}=0$ 可知， $\mathfrak{H}_v$ 不是 $\mathfrak{P}$ 的极大交换子代数．这推出矛盾．所以证明了 $\theta(e_\alpha)=e_\alpha$, 且 $\mathfrak{L}_\alpha\subset\mathfrak{K}^C$. 由于 $\tau(\mathfrak{K}^C)=\mathfrak{K}^C$, $\tau(h_\alpha)=-h_\alpha=h_{-\alpha}$, 所以 $\tau(\mathfrak{L}_\alpha)=\mathfrak{L}_{-\alpha}$. 因此有 $\mathfrak{L}_{-\alpha}\subset\mathfrak{K}^C$. 至此完全证明了 (1) 成立.

下面证 (2) 成立．设 $\alpha\in P_+$, 记 $h_\alpha=h'_\alpha+h''_\alpha$, 其中 $h'_\alpha\in\sqrt{-1}\mathfrak{H}_c$, $h''_\alpha\in\mathfrak{H}_v$. 而 $\tau(h_\alpha)=-h_\alpha=h_{-\alpha}$, $\sigma(h_\alpha)=-h'_\alpha+h''_\alpha$, $\theta(h_\alpha)=h'_\alpha-h''_\alpha\neq h_\alpha$, 由 $P_+=\{\alpha\in\Delta^+\mid h_\alpha=h'_\alpha+h''_\alpha,\ h''_\alpha\neq 0\}$ 可知， $\alpha\in P_+$ 当且仅当 h_α 在 $\mathfrak{H}_v$ 的投影不等于零．余下要证明 $\sigma(h_\alpha)=h_\beta$, 其中 $\beta\in P_+$. 事实上，任取 $0\neq e_\alpha\in\mathfrak{L}_\alpha$, $h\in\mathfrak{H}$, 则 $[h,e_\alpha]=B(h_\alpha,h)=e_\alpha$, 于是 $[\theta(h),\theta(e_\alpha)]=B(\theta(h_\alpha),\theta(h))\theta(e_\alpha)$, 即有 $[h,\theta(e_\alpha)]=B(h,\theta(h_\alpha))\theta(e_\alpha)$, $\forall h\in\mathfrak{H}$. 由于 θ 为自同构，所以 $\theta(e_\alpha)\neq 0$, 因此 $\theta(e_\alpha)$ 为 $\operatorname{ad}\mathfrak{H}$ 在 $\mathfrak{L}$ 的特征向量．这证明了存在 $\beta\in\Delta$, 使得 $h_\beta=\theta(h_\alpha)=h'_\alpha-h''_\alpha$, $h''_\alpha\neq 0$. 所以 h_β 在 $\mathfrak{H}_v$ 的投影不等于零，即 $\beta\in P_+$. 引理证完.

定理 2.2.8(Iwasawa 分解) 设 $\mathfrak{G}$ 为实半单李代数，

$$\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}_c+\mathfrak{H}_v$$

为关于 Cartan 分解 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$ 的最大向量 Cartan 子代数． P_+ 及 P_- 的定义由引理 2.2.7 给出．记复半单李代数 $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0^C=\mathfrak{H}$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{H}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{L}_\alpha.$$

记

$$\mathfrak{N}_0=\mathfrak{G}\cap\sum_{\alpha\in P_+}\mathfrak{L}_\alpha,\quad \mathfrak{S}_0=\mathfrak{H}_v+\mathfrak{N}_0,$$

则 $\mathfrak{N}_0$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的幂零子代数， $\mathfrak{S}_0$ 为可解子代数，又

$\mathfrak{G}$ 有空间直接和分解

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{S}_0 = \mathfrak{K} + \mathfrak{H}_v + \mathfrak{N}_0,$$

称为 **Iwasawa 分解**.

这时, 在复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 中存在一组基, 使得关于这组基, $\mathrm{ad}\,\mathfrak{K}$ 的元素的矩阵表示为斜 Hermite 方阵, $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_v$ 的元素的矩阵表示为对角方阵, $\mathrm{ad}\,\mathfrak{N}_0$ 的元素的矩阵表示为对角元素等于零的上三角方阵.

证 显然

$$\sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{L}_\alpha, \quad \mathfrak{H} + \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{L}_\alpha$$

分别为复半单李代数的幂零子代数和可解子代数. 所以为了证明 $\mathfrak{N}_0$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的幂零子代数, 只要证明当 $\alpha, \beta \in P_+$, 且 $\alpha + \beta \in \Delta$, 则 $\alpha + \beta \in P_+$. 事实上, 由 $\alpha, \beta \in P_+$ 可知 $\theta(h_\alpha) \neq h_\alpha$, $\theta(h_\beta) \neq h_\beta$. 今已知最大向量 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_c + \mathfrak{H}_v$. 由 $h_\alpha, h_\beta \in \mathfrak{H}_R$, $\mathfrak{H}_R = \sqrt{-1}\mathfrak{H}_c + \mathfrak{H}_v$ 可知 $h_\alpha = \sqrt{-1}h'_\alpha + h''_\alpha$, $h_\beta = \sqrt{-1}h'_\beta + h''_\beta$, 其中 h'_α, $h'_\beta \in \mathfrak{H}_c$, h''_α, $h''_\beta \in \mathfrak{H}_v$. 由引理 2.2.7 的 (2) 可知 h''_α, $h''_\beta \neq 0$, 且 $\sigma(h_\alpha) = -\sqrt{-1}h'_\alpha + h''_\alpha$, $\sigma(h_\beta) = -\sqrt{-1}h'_\beta + h''_\beta$. 又存在 $\xi, \eta \in P_+$, 使得 $\sigma(h_\alpha) = h_\xi$, $\sigma(h_\beta) = h_\eta$. 今 $P_+ \subset \Delta^+$, 所以 $h_\alpha, h_\beta, h_\xi, h_\eta > 0$. 这证明了 $h_\alpha + h_\xi = 2h''_\alpha > 0$, $h_\beta + h_\eta = 2h''_\beta > 0$. 因此 $h''_\alpha + h''_\beta > 0$. 所以 $\alpha + \beta$ 若为根, 则当 $\alpha, \beta \in \Delta^+$ 时可知 $\alpha + \beta \in \Delta^+$, 于是 $\alpha + \beta \in P_+$, 因此实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的子代数 $\mathfrak{N}_0$ 幂零. 注意到 $[\mathfrak{H}_v, \mathfrak{H}_v] = 0$, $[\mathfrak{H}_v, \mathfrak{N}_0] \subset \mathfrak{N}_0$, 所以易知子代数 $\mathfrak{S}_0$ 可解.

现在来证明 Iwasawa 分解式成立. 任取 $x \in \mathfrak{G}$, 则 $\sigma(x) = x$, 因此 $x = \dfrac{1}{2}(x + \sigma(x))$. 另一方面, $x = h + \sum\limits_{\alpha\in\Delta} y_\alpha$, 其中 $y_\alpha \in \mathfrak{L}_\alpha$. 所以 $\sigma(h) = h, \sigma(y_\alpha) = y_{\sigma(\alpha)}$, 即

$$x = h + \sum_{\alpha\in\Delta} (x_\alpha + \sigma(x_\alpha)),$$

其中 $x_\alpha = \frac{1}{2}y_\alpha \in \mathfrak{L}_\alpha$, $h \in \mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_c + \mathfrak{H}_v \subset \mathfrak{K} + \mathfrak{H}_v$. 令 $\Delta^+ = P_+ \cup P_-$, $P_+ \cap P_- = \phi$. 当 $\alpha \in P_-$ 时, 由引理 2.2.7 可知 $\mathfrak{L}_\alpha + \mathfrak{L}_{-\alpha} \subset \mathfrak{K}^C$, $\sigma(\alpha) = -\alpha$, 所以 $\sigma(\mathfrak{L}_\alpha) = \mathfrak{L}_{-\alpha}$. 因此

$$\sum_{\alpha \in P_-} (x_\alpha + \sigma(x_\alpha)) \in \mathfrak{K}^C \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{K}.$$

于是, 为了证明 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{H}_v + \mathfrak{N}_0$, 问题化为证明

$$\sum_{\alpha \in P_+} (x_\alpha + \sigma(x_\alpha)) + \sum_{\alpha \in -P_+} (x_\alpha + \sigma(x_\alpha)) \in \mathfrak{K} + \mathfrak{H}_c + \mathfrak{N}_0.$$

今取 $\alpha \in P_+$, 则唯一存在 $\beta \in P_+$, 使得 $\sigma(h_\alpha) = h_\beta$. 所以 $\sigma(\mathfrak{L}_\alpha) \subset \mathfrak{L}_\beta$, 因此

$$\sum_{\alpha \in P_+} (x_\alpha + \sigma(x_\alpha)) \in (\sum_{\alpha \in P_+} \mathfrak{L}_\alpha) \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{N}_0.$$

任取 $\alpha \in -P_+$, 则 $-\alpha \in P_+$. 于是唯一存在 $\beta \in P_+$ 使得 $\sigma(h_{-\alpha}) = h_\beta$. 由 $h_{-\alpha} = -h_\alpha = \tau(h_\alpha)$ 可知 $\sigma\tau(h_\alpha) = h_\beta$, 即 $\theta(h_\alpha) = h_\beta$. 因此

$$\tau(x_\alpha + \sigma(x_\alpha)) = \tau(x_\alpha) + \theta(x_\alpha) \in \mathfrak{L}_{-\alpha} + \mathfrak{L}_\beta \subset \sum_{\xi \in P_+} \mathfrak{L}_\xi,$$

这证明了 $\tau(x_\alpha + \sigma(x_\alpha)) \in \mathfrak{G} \cap \sum\limits_{\xi \in P_+} \mathfrak{L}_\xi = \mathfrak{N}_0$. 令

$$x_\alpha + \sigma(x_\alpha) = -\tau(x_\alpha + \sigma(x_\alpha)) + ((x_\alpha + \sigma(x_\alpha)) + \tau(x_\alpha + \sigma(x_\alpha))).$$

而

$$(x_\alpha + \sigma(x_\alpha)) + \tau(x_\alpha + \sigma(x_\alpha)) \in \mathfrak{G}_c \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{K},$$

因此证明了

$$x_\alpha + \sigma(x_\alpha) \in \mathfrak{K} + \mathfrak{N}_0, \ \mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{H}_v + \mathfrak{N}_0.$$

下面证明 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{N}_0$ 为空间直接和. 任取 $x \in \mathfrak{K}$, $y \in \mathfrak{H}_v$, $z \in \mathfrak{N}_0$. 设若 $x + y + z = 0$, 于是对 Cartan 对合 θ, 有 $\theta(x) +$

$\theta(y)+\theta(z)=0$. 令 $\theta=\sigma\tau=\tau\sigma$, $x\in\mathfrak{K}$, 所以 $\theta(x)=x$, $y\in\mathfrak{H}_v\subset\mathfrak{P}$, 所以 $\theta(y)=-y$. 因此有 $\theta(z)=-\theta(x)-\theta(y)=-x+y$, $z=-x-y$. 所以 $\theta(z)-z=2y\in\mathfrak{H}_v$. 今 $z\in\mathfrak{N}_0=\mathfrak{G}\cap\sum\limits_{\alpha\in P_+}\mathfrak{L}_\alpha$, 所以 $z\in\sum\limits_{\alpha\in P_+}\mathfrak{L}_\alpha$, $\theta(z)=\sum\limits_{\alpha\in P_+}\theta(\mathfrak{L}_\alpha)$. 由引理 2.2.7, $\alpha\in P_+$, 则存在 $\beta\in P_+$, 使得 $\sigma(h_\alpha)=h_\beta$. 于是 $\theta(h_\alpha)=\tau\sigma(h_\alpha)=\tau(h_\beta)=h_{-\beta}$, 即 $\theta(\mathfrak{L}_\alpha)=\mathfrak{L}_{-\beta}$. 于是 $z-\theta(z)\in(\sum\limits_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{G}_\alpha)\cap\mathfrak{H}_v=0$. 这证明了 $y=0$, $\theta(z)=z$. 由 $z=\sum\limits_{\alpha\in P_+}x_\alpha$, 其中

$$x_\alpha\in\mathfrak{L}_\alpha,\ \theta(z)=\sum_{\alpha\in P_+}\theta(x_\alpha),\ \theta(x_\alpha)\in\theta(\mathfrak{L}_\alpha)=\mathfrak{L}_{-\beta},\ \beta\in\Delta^+.$$

所以 $z\in\sum\limits_{\alpha\in\Delta^+}\mathfrak{L}_\alpha$, $\theta(z)\in\sum\limits_{\alpha\in\Delta^-}\mathfrak{L}_\alpha$. 这证明了 $z=0$. 因此 $x=0$. 至此证明了 Iwasawa 分解为空间直接和.

现在来证明后一断言. 由引理 2.1.10 的推论我们知道, 设 $\mathfrak{G}$ 为实半单李代数, $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$ 为其复化, 则 $\mathfrak{G}=(\mathfrak{L},\sigma)$. 相伴的紧实形式 $\mathfrak{G}_c=(\mathfrak{L},\tau)$ 有 $\sigma\tau=\tau\sigma=\theta$ 为 Cartan 对合, 且在 $\mathfrak{G}$ 中取最大向量 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0$, 记 $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0^C$ 为 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数, $\mathfrak{L}=\mathfrak{H}+\sum\limits_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{L}_\alpha$ 为根子空间分解, 则存在 Weyl 基 $\{\forall\alpha\in\Delta\}$, 使得 $\tau(e_\alpha)=-e_{-\alpha}$, $\tau(h_\alpha)=-h_\alpha$, $\forall\alpha\in\Delta$. 而复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型 $B(x,y)$ 有 $B(e_\alpha,e_{-\alpha})=1$, $B(e_\alpha,e_\beta)=0$, $\alpha,\beta\neq0$. 又 $B(\mathfrak{H},\sum\limits_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{L}_\alpha)=0$, 且 Killing 型 B 限制在 $\mathfrak{H}_R$ 上正定. 又

$$H(x,y)=-B(x,\tau(y)),\quad\forall x,y\in\mathfrak{L}$$

为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 上的 Hermite 型.

记 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$ 为 Cartan 分解, 则 $\mathfrak{G}_c=\mathfrak{K}+\sqrt{-1}\mathfrak{P}$ 为相伴的紧实形式, 即 $\mathfrak{G}=(\mathfrak{L},\sigma),\mathfrak{G}_c=(\mathfrak{L},\tau)$. 设 $\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}_c+\mathfrak{H}_v$ 为最大向量 Cartan 子代数, 于是 $\mathfrak{H}_R=\sqrt{-1}\mathfrak{H}_c+\mathfrak{H}_v$. 在 $\mathfrak{H}_v$ 中取定基, 再按顺序排出 $\sqrt{-1}\mathfrak{H}_c$ 的一组基, 从而在实子空间 $\mathfrak{H}_R$ 中取

定了基. 因此定义了次序, 从而引进了单根系 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$. 记 $h_i=h_{\alpha_i}$, $1\le i\le l$. 因此实对称方阵 $(B(h_i,h_j))$ 正定, 所以在实子空间 $\mathfrak{H}_R$ 中存在一组基 $\xi_1,\cdots,\xi_l$, 使得对这组基, Killing 型 $B(x,y)$ 在实子空间 $\mathfrak{H}_R$ 上的方阵表示为单位方阵. 另一方面, 将正根系 Δ^+ 的元素按大小次序排为 $0<\beta_1<\beta_2<\cdots$, 将复半单李代数的基排为

$$\cdots,e_{-\beta_2},e_{-\beta_1},\xi_1,\cdots,\xi_l,e_{\beta_1},e_{\beta_2},\cdots. \qquad (**)$$

我们来证对这组基, 定理的后一断言成立.

事实上, 任取 $x\in\mathfrak{L}$, 则 $x=\sum a_i\xi_i+\sum b_\alpha e_\alpha$, 其中 $a_i,b_\alpha\in\mathbb{C}$. 今 $\xi_i\in\mathfrak{H}_R$, 所以 $\tau(\xi_i)=-\xi_i$. 又 $B(\xi_i,\xi_j)=\delta_{ij}$, $1\le i,j\le l$, 因此

$$\begin{aligned}H(x,x)&=-B(x,\tau(x))\\&=-B(\sum a_i\xi_i+\sum b_\alpha e_\alpha,-\sum \overline{a_i}\xi_i-\sum\overline{b_\alpha}e_{-\alpha})\\&=\sum|a_i|^2+\sum|b_\alpha|^2\ge 0,\end{aligned}$$

且等号成立当且仅当 $x=0$. 这证明了 $H(x,y)$ 为复线性空间 $\mathfrak{L}$ 上的内积, 且在基 (**) 下的方阵表示为单位方阵.

今任取 $x,y\in\mathfrak{L}$, $z\in\mathfrak{K}$, 则有 $\tau(z)=z$. 而

$$\begin{aligned}&H((\operatorname{ad}z)x,y)=-B([z,x],\tau(y))=B(x,[z,\tau(y)])\\&=B(x,\tau([z,y]))=-H(x,[z,y])=-H(x,(\operatorname{ad}z)y]).\end{aligned}$$

这证明了在基 (**) 下, 线性变换 $\operatorname{ad}z$ 对应的方阵表示为斜 Hermite 方阵.

任取 $h\in\mathfrak{H}_v$, 则由

$$[h,e_{\pm\beta_i}]=B(h,h_{\pm\beta_i})e_{\pm\beta_i}=\pm B(h,h_{\beta_i})e_{\pm\beta_i},\quad [h,\xi_i]=0,$$

所以 $\operatorname{ad}h$ 在基 (**) 下的方阵表示为对角方阵.

最后, 任取 $z\in\mathfrak{N}_0=\mathfrak{G}\cap\sum\limits_{\alpha\in P_+}\mathfrak{L}_\alpha$. 所以为了证在基 (**) 下 $\operatorname{ad}z$ 的方阵表示为对角元素等于零的上三角方阵, 我们只要证任取

$\alpha \in P_+$, 则 $\mathrm{ad}\, e_\alpha$ 的方阵表示为对角元素等于零的上三角方阵就行了. 事实上, 由 $(\mathrm{ad}\, e_\alpha)e_{\beta_i} = [e_\alpha, e_{\beta_i}] = N_{\alpha\beta_i}e_{\alpha+\beta_i}$, 其中由 $\alpha \in P_+$ 可知 $\alpha > 0$. 又 $\beta_i > 0$, 所以 $\alpha + \beta_i > \beta_i > 0$. 因此, 在基 (**) 下线性变换 $\mathrm{ad}\, e_\alpha$ 的方阵表示, 由 β_i 决定的行中除零外, 只出现 $N_{\alpha\beta_i}$, 它落在上三角区, 且不在对角线上. 又由 $(\mathrm{ad}\, e_\alpha)e_{-\beta_i} = [e_\alpha, e_{-\beta_i}]$. 当 $\alpha = \beta_i$ 时, 则 $(\mathrm{ad}\, e_\alpha)e_{-\beta_i} = h_{\beta_i} = \sum\limits_{j=1}^{l} b_{ij}\xi_j$, 所以考虑由 $-\beta_i$ 决定的行, 除零外, 只出现 $b_{i1}, \cdots, b_{il}$, 它们也只落在上三角区, 且不在对角线上. 当 $\alpha \neq \beta_i$ 时, 若 $\alpha - \beta_i \notin \Delta$, 则 $N_{\alpha,-\beta_i} = 0$; 若 $\alpha - \beta_i \in \Delta$, 则有 $-\beta_i < \alpha - \beta_i$, 所以 $N_{\alpha,-\beta_i}$ 仍落在上三角区, 且不在对角线上. 又 $(\mathrm{ad}\, e_\alpha)\xi_i = [e_\alpha, \xi] = -[\xi, e_\alpha] = -B(\xi, h_\alpha)e_\alpha$, 注意到 $\alpha > 0$, 所以在基 (**) 的顺序下, $-B(\xi, h_\alpha)$ 也落在上三角区, 且不在对角线上. 至此证明了 $\mathrm{ad}\, e_\alpha$ 的方阵表示适合断言. 定理证完.

为了第五章的需要, 我们考虑一类特殊的实半单李代数. 先引进下面的符号.

设 $\mathfrak{G}$ 为实半单李代数, $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C$ 为其复化. 于是 $\mathfrak{G} = (\mathfrak{L}, \sigma)$. 设 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 为其 Cartan 分解, 于是复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 有紧实形式 $\mathfrak{G}_c = \mathfrak{K} + \sqrt{-1}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{G}_c = (\mathfrak{L}, \tau)$, 使得 $\theta = \sigma\tau = \tau\sigma$ 为 Cartan 对合.

设 $\mathfrak{H}_0$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数, 则有

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_c + \mathfrak{H}_v, \quad \mathfrak{H}_c = \mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{K}, \quad \mathfrak{H}_v = \mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{P},$$

且记 $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0^C$, 则 $\mathfrak{H}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数. 于是有根子空间分解

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{L}_\alpha,$$

且根系 Δ 决定 $\mathfrak{H}$ 的子集 $h_\Delta = \{h_\Delta | \forall \alpha \in \Delta\}$. h_Δ 实线性生成 $\mathfrak{H}$ 的实子空间

$$\mathfrak{H}_R = \sqrt{-1}\mathfrak{H}_c + \mathfrak{H}_v.$$

在 $\mathfrak{H}_v$ 中取基，再在 $\sqrt{-1}\mathfrak{H}_c$ 中取基，从而在 $\mathfrak{H}_R$ 中引进正方向. 由此决定了根系 Δ 的单根系 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$. 记 $h_{\alpha_i} = h_i$, $1 \leq i \leq l$. 它们构成实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 的一组基，且复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型 $B(x, y)$ 使得 $l \times l$ 实对称方阵 $(B(h_i, h_j))$ 正定.

又在复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 中存在 Weyl 基 $\{h_i, 1 \leq i \leq l, e_\alpha, \forall \alpha \in \Delta\}$, 使得

$$\tau(h_\alpha) = -h_\alpha, \ \tau(e_\alpha) = -e_{-\alpha}, \ \forall \alpha \in \Delta.$$

下面我们不加解释地使用上面的符号.

引理 2.2.9 实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 关于 Cartan 分解 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 的最大紧 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{K}$, 当且仅当 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_1$ 中元素的非零特征根纯虚.

证 令

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_{1c} + \mathfrak{H}_{1v}, \quad \mathfrak{H}_{1c} = \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{K}, \quad \mathfrak{H}_{1v} = \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{P}.$$

于是 $\mathfrak{H}_{1c} + \sqrt{-1}\mathfrak{H}_{1v}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的紧实形式 $\mathfrak{G}_c = \mathfrak{K} + \sqrt{-1}\mathfrak{P}$ 的 Cartan 子代数. 由紧李代数的定义可知，在 $\mathfrak{G}_c$ 上有不变内积 (x, y). 于是实线性空间 $\mathfrak{G}_c$ 上的实线性变换集 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{G}_c$ 可同时实相似于实斜对称方阵，因此它们的非零特征根都纯虚. 这证明了 $\mathrm{ad}\sqrt{-1}\mathfrak{H}_{1v}$ 中元素的非零特征根都纯虚，所以 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_{1v}$ 作为复线性空间 $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C = \mathfrak{G}_c^C$ 上的线性变换，其特征根都是实数. 因此 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_1$ 中元素的非零特征根纯虚当且仅当 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_{1v} = 0$, 即 $\mathfrak{H}_{1v} \subset C(\mathfrak{L}) = 0$. 这证明了 $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_{1c} \subset \mathfrak{K}$. 引理证完.

显然，紧李代数的 Cartan 子代数为极大交换子代数. 所以，如果实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的最大紧 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{K}$, 则 $\mathfrak{H}_1$ 也是紧子代数 $\mathfrak{K}$ 的 Cartan 子代数. 反之，若紧子代数 $\mathfrak{K}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_1$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数，则必为最大紧 Cartan 子代数.

下面我们假设实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 有 Cartan 分解 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$, 使得紧子代数 $\mathfrak{K}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_1$ 为实半单李代数的最大紧 Cartan 子代数.

记 $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1^C$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数，则由 $\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{K}$, $[\mathfrak{K},\mathfrak{K}]\subset\mathfrak{K}$, $[\mathfrak{K},\mathfrak{P}]\subset\mathfrak{P}$, $[\mathfrak{P},\mathfrak{P}]\subset\mathfrak{K}$, 可知 $[\mathfrak{H}_1,\mathfrak{K}]\subset\mathfrak{K}$, $[\mathfrak{H}_1,\mathfrak{P}]\subset\mathfrak{P}$. 于是，对根子空间分解

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{H}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{L}_\alpha,$$

有

$$\mathfrak{K}^C=\mathfrak{H}+\sum_{\alpha\in\Delta_c}\mathfrak{L}_\alpha,\quad \mathfrak{P}^C=\sum_{\alpha\in\Delta_v}\mathfrak{L}_\alpha.$$

由半对合 τ 有

$$\tau|_{\mathfrak{K}}=\mathrm{id},\ \tau|_{\mathfrak{P}}=-\mathrm{id},$$

因此对 Weyl 基有

$$\mathfrak{K}=\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R+\sum_{\alpha\in\Delta_c}\mathbb{R}(e_\alpha-e_{-\alpha})+\sum_{\alpha\in\Delta_c}\mathbb{R}\sqrt{-1}(e_\alpha+e_{-\alpha}),$$
$$\mathfrak{P}=\sum_{\alpha\in\Delta_v}\mathbb{R}(e_\alpha+e_{-\alpha})+\sum_{\alpha\in\Delta_v}\mathbb{R}\sqrt{-1}(e_\alpha-e_{-\alpha}),$$

且 $-\Delta_c=\Delta_c, -\Delta_v=\Delta_v$, 又

$$\mathfrak{H}_R=\sqrt{-1}\mathfrak{H}_1.$$

我们称 Δ_c 为紧根系, 其中的元素为**紧根**,Δ_v 为**非紧根系**, 其中的元素为**非紧根**. 这时 $[\mathfrak{K},\mathfrak{K}]\subset\mathfrak{K}$, $[\mathfrak{K},\mathfrak{P}]\subset\mathfrak{P}$, $[\mathfrak{P},\mathfrak{P}]\subset\mathfrak{K}$ 分别等价于

$$(\Delta_c+\Delta_c)\cap\Delta\subset\Delta_c,\qquad (\Delta_c+\Delta_v)\cap\Delta\subset\Delta_v,$$
$$(\Delta_v+\Delta_v)\cap\Delta\subset\Delta_c.$$

再由 $\mathfrak{H}_R=\sqrt{-1}\mathfrak{H}_1$, 可知

$$\tau(h_\alpha)=-h_\alpha,\quad \sigma(h_\alpha)=-h_\alpha,\quad \forall\alpha\in\Delta.$$

现在在实线性空间 $\mathfrak{H}_R=\sqrt{-1}\mathfrak{H}_1$ 中引进正方向如下：先在非紧根系 Δ_v 中取极大实线性无关部分组，再在紧根系 Δ_c 中取极

大实线性无关部分组. 从而在 $\mathfrak{H}_R$ 的对偶空间 $\mathfrak{H}_R^*$ 中引进了正方向, 这样自然地导出实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 的正方向. 因此, 在根系 Δ 中另外决定了一个单根系 Π 、正根系 Δ^+ 及负根系 Δ^-.

引理 2.2.10 我们有

$$(\Delta_c + \Delta_v^{\pm}) \cap \Delta \subset \Delta_v^{\pm}, \quad (\Delta_v^{\pm} + \Delta_v^{\pm}) \cap \Delta = \emptyset.$$

证 由正方向的选取可知非紧根系 Δ_v 的正向量加上任意紧根仍为正向量. 对负向量也如此. 所以证明了 $(\Delta_c+\Delta_v^{\pm})\cap\Delta \subset \Delta_v^{\pm}$.

再任取 $\alpha, \beta \in \Delta_v^{\pm}$, 则 $e_\alpha, e_\beta \in \mathfrak{P}^C$. 于是 $[e_\alpha, e_\beta] \in [\mathfrak{P}^C, \mathfrak{P}^C] \cap \mathfrak{L}_{\alpha+\beta} \subset \mathfrak{K}^C \cap \mathfrak{L}_{\alpha+\beta}$. 设若 $\alpha+\beta \in \Delta$, 则证明了 $\alpha+\beta \in \Delta_c$, 且由 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 推出 $\alpha+\beta > 0$. 特别地, $\alpha+\beta > \alpha$. 但是, 由次序的选取可知, 非紧正根必大于任意紧根. 这导出矛盾. 所以证明了 $(\Delta_v^+ + \Delta_v^+) \cap \Delta = \emptyset$. 同理有 $(\Delta_v^- + \Delta_v^-) \cap \Delta = \emptyset$. 证完.

于是, 显然有

引理 2.2.11 假设和符号同上. 记

$$\mathfrak{P}_{\pm} = \sum_{\alpha \in \Delta_v^{\pm}} \mathfrak{L}_\alpha \subset \mathfrak{P}^C,$$

则有子空间直接和

$$\mathfrak{P}^C = \mathfrak{P}_+ + \mathfrak{P}_-,$$

且有

$$[\mathfrak{P}_\pm, \mathfrak{P}_\pm] = 0, \quad [\mathfrak{P}_+, \mathfrak{P}_-] \subset \mathfrak{K}^C, \quad [\mathfrak{K}^C, \mathfrak{P}_\pm] \subset \mathfrak{P}_\pm$$

以及复子空间直接和

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{P}_- + \mathfrak{K}^C + \mathfrak{P}_+.$$

在上面假设下, 对实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 关于 Cartan 分解 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 构作最大向量 Cartan 子代数. 我们有

引理 2.2.12 假设和符号同上. 在非紧正根系 Δ_v^+ 中存在正向量

$$0 < \beta_1 < \cdots \beta_r,$$

使得

$$\mathfrak{H}_v=\sum_{i=1}^{r}\mathbb{R}(e_{\beta_i}+e_{-\beta_i})$$

为子空间 $\mathfrak{P}$ 的极大交换子代数，且 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 在实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 的对偶空间 $\mathfrak{H}_R^*$ 中实线性无关. 正整数 r 称为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的秩, 根集

$$\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}$$

称为 Harish-Chandra **强正交根系**.

证　在非紧正根系 Δ_v^+ 中取最小正根 β_1. 考虑 Δ_v^+ 的子集 $\{\beta\in\Delta_v^+ \mid \beta\pm\beta_1\notin\Delta\cup\{0\}\}$. 在其中取最小正根 β_2, 再对 Δ_v^+ 的子集

$$\{\beta\in\Delta_v^+ \mid \beta\pm\beta_1,\ \beta\pm\beta_2\notin\Delta\cup\{0\}\}$$

依次作下去，由于根系 Δ 为有限集，所以得到非紧正根系 Δ_v^+ 的向量集 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 有 $\beta_i\pm\beta_j\notin\Delta\cup\{0\}$, $i\neq j$, $1\le i,j\le r$. 因此有

$$[e_{\pm\beta_i},e_{\pm\beta_j}]=[e_{\beta_i},e_{-\beta_j}]=0,\ i\neq j,\ 1\le i,j\le r.$$

所以 $\mathfrak{P}$ 的实子空间 $\mathfrak{H}_v$ 为交换子代数.

我们来证 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 实线性无关. 事实上，当 $i\neq j$ 时，由 $\beta_i\pm\beta_j\notin\Delta\cup\{0\}$ 可知 $\dfrac{2B(\beta_i,\beta_j)}{B(\beta_i,\beta_i)}=0$. 即 $B(\beta_i,\beta_j)=0$. 因此若存在实数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$, 有 $\sum\lambda_i\beta_i=0$, 则有

$$0=B\Big(\sum\lambda_i\beta_i,\sum\lambda_j\beta_j\Big)=\sum\lambda_i^2B(\beta_i,\beta_i).$$

注意到复半单李代数 $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$ 的 Killing 型 $B(x,y)$ 限制在实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 上正定，所以 $a_i=B(\beta_i,\beta_i)>0$, $1\le i\le r$. 这证明了 $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=0$, 即 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关.

最后，我们来证 $\mathfrak{P}$ 的子空间 $\mathfrak{H}_v$ 为 $\mathfrak{P}$ 的极大交换子代数. 事实上，如果它不是极大交换子代数，则存在 $X\in\mathfrak{P}$, $X\notin\mathfrak{H}_v$, 使得

$$[e_{\beta_i}+e_{-\beta_i},X]=0,\ 1\le i\le r.$$

我们可取

$$X = \sum_{\alpha\in\Delta_v^+} \lambda_\alpha(e_\alpha + e_{-\alpha}) + \sum_{\alpha\in\Delta_v^+} \mu_\alpha\sqrt{-1}(e_\alpha - e_{-\alpha}),$$

其中 $\lambda_\alpha, \mu_\alpha$ 为实数，又记 $c_\alpha = \lambda_\alpha + \sqrt{-1}\mu_\alpha$，$\forall \alpha \in \Delta_v^+$，$c_{\beta_i} = 0$, $1 \leq i \leq r$. 今

$$\begin{aligned}
&[e_{\beta_i} + e_{-\beta_i}, X] \\
= &\sum_{\alpha\in\Delta_v^+, \alpha\neq\beta_1,\cdots,\beta_r} c_\alpha(N_{\beta_i,\alpha}e_{\beta_i+\alpha} + N_{-\beta_i,\alpha}e_{\alpha-\beta_i}) \\
&+ \sum_{\alpha\in\Delta_v^+, \alpha\neq\beta_1,\cdots,\beta_r} \bar{c}_\alpha(N_{\beta_i,-\alpha}e_{\beta_i-\alpha} + N_{-\beta_i,-\alpha}e_{-\alpha-\beta_i}) = 0.
\end{aligned}$$

设若 $\beta \pm \beta_i \in \Delta$, 则 $N_{\pm\beta_i,\beta} \neq 0$, 于是 $c_\beta = 0$. 由 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 的选取便证明了 $X = 0$, 即 $\mathfrak{H}_v$ 为极大交换子代数. 引理证完.

§ 2.3 实半单李代数的分类及表示

关于实半单李代数的分类及表示的理论，我们不打算详细讨论，只在这一节中给出简单介绍. 显然，由于实半单李代数的复化为复半单李代数，所以首先要利用复半单李代数的分类结果和表示结果. 但是，实的情形比复的情形要复杂得多，因此我们还要弄清楚实和复的差别.

一个最自然的想法，是利用 Cartan 分解. 注意到复半单李代数的紧实形式在共轭下唯一，所以紧半单李代数的分类就完全归结于复半单李代数的分类. 而且对复半单李代数的实形式的分类，我们可以固定紧实形式 $\mathfrak{G}_c$, 使得实形式 $\mathfrak{G}$ 有 Cartan 分解 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$, 它相对应的紧实形式为给定的紧实形式 $\mathfrak{G}_c = \mathfrak{K} + \sqrt{-1}\mathfrak{P}$. 记 $\mathfrak{G} = (\mathfrak{L}, \sigma)$, $\mathfrak{G}_c = (\mathfrak{L}, \tau)$, 其中 $\theta = \sigma\tau = \tau\sigma$ 为 Cartan 对合.

注意到复半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 对合 θ 为紧实形式 $\mathfrak{G}_c$ 的对合自同构，所以实半单李代数的分类化为首先对紧实形式作分

类，再对标准紧实形式考虑对合自同构在共轭下的分类，进一步利用标准对合自同构给出紧实形式 $\mathfrak{G}_c$ 的 Cartan 分解和 Cartan 子代数使得标准对合自同构将 Cartan 子代数映为自身，从而给出根系的一一对应，将问题仍然化为一种图论的问题.

另一方面，我们从复半单李代数的分类理论及表示理论可以看出，分类理论实际上是复半单李代数的伴随表示论. 在实半单李代数的情形，比较复杂，但是仍然需要讨论实半单李代数的伴随表示论. 为此，我们先讨论实半单李代数的表示论.

引理 2.3.1 设 V 为复线性空间，$V_0=(V,\sigma)$ 为由复线性空间 V 上的半对合 σ 决定的实形式. 则在复线性空间 V 中有复子空间 V_1，使得 V 有复子空间直接和

$$V=V_1+\sigma(V_1),\quad V_1\cap\sigma(V_1)=0,$$

当且仅当在实线性空间 V_0 上存在非异实线性变换 J，使得 $J^2=-\mathrm{id}$，且

$$V_1=\{v+\sqrt{-1}Jv\mid\forall v\in V_0\}.$$

证 先证必要性. 设若实线性空间 V_0 上有线性变换 J，使得 $J^2=-\mathrm{id}$. 在复化 $V=V_0^C$ 中取子集合 $V_1=\{v+\sqrt{-1}Jv\mid\forall v\in V_0\}$，我们来证 V_1 为复线性空间 V 的复子空间. 显然，V_1 为实子空间. 又任取 $v\in V_0$，则由 $J^2=-\mathrm{id}$ 有

$$\sqrt{-1}(v+\sqrt{-1}Jv)=-Jv+\sqrt{-1}v=(-Jv)+\sqrt{-1}J(-Jv)\in V_1.$$

这证明了断言.

今任取 $V_1\cap\sigma(V_1)$ 的元素 $v+\sqrt{-1}Jv=\sigma(v_1+\sqrt{-1}Jv_1)$，其中 $v,v_1\in V_0$. 由 σ 为半对合，有 $v+\sqrt{-1}Jv=v_1-\sqrt{-1}Jv_1$. 所以 $v=v_1$，$Jv=-Jv_1$. 这导出 $v_1=0$，所以证明了 $V_1\cap\sigma(V_1)=0$.

由子空间 V_1 的定义可知，任取 $v\in V_0$，则 $v+\sqrt{-1}Jv\in V_1$. 于是 $v-\sqrt{-1}Jv\in\sigma(V_1)$. 因此 $2v\in V_1+\sigma(V_1)$，即有 $V_0\subset V_1+\sigma(V_1)$. 今 V_1 为复子空间，自然 $\sigma(V_1)$ 也是复子空间. 所以 $V_1+\sigma(V_1)$ 为

复线性空间的复子空间. 这证明了 $V = V_0^C \subset V_1 + \sigma(V_1) \subset V$. 必要性证完.

再证充分性. 若复线性空间 $V = V_1 + \sigma(V_1)$ 为复子空间直接和分解. 对 $V_1 \subset V = V_0^C$ 的任一元素 $v_1 + \sqrt{-1}v_2$, 其中 $v_1, v_2 \in V_0$, 我们有对应 $v_1 \to v_2$. 下面来证这是一一线性变换. 首先, 若 $v_1 + \sqrt{-1}v_2$, $v_1 + \sqrt{-1}v_2' \in V_1$, 则 $v_2 - v_2' \in V_1 \cap V_0$. 于是 $\sigma(v_2 - v_2') \in \sigma(V_1) \cap V_0$. 但是 $\sigma(v_2 - v_2') = v_2 - v_2'$. 这证明了 $v_2 - v_2' \in V_1 \cap \sigma(V_1) = 0$, 因此 $v_2' = v_2$. 所以对应 $v_1 \to v_2$ 为实线性空间 V_0 上的单值映射. 再证此对应一一. 事实上, 若 $v_1 + \sqrt{-1}v_2$, $v_1' + \sqrt{-1}v_2 \in V_1$, 则 $v_1 - v_1' \in V_1 \cap V_0$. 同理, 证明了 $v_1' = v_1$, 即对应一一. 此对应记作 J, 即有

$$V_1 = \{v + \sqrt{-1}Jv \mid \forall v \in V_0\}.$$

显然, J 为实线性空间 V_0 上的实线性变换. 由 V_1 为复线性空间, 故有 $J(v + \sqrt{-1}Jv) = v_1 + \sqrt{-1}Jv_1$, 于是 $v_1 = -Jv$, $Jv_1 = v$. 代入, 有 $v = Jv_1 = -J^2 v$, $\forall v \in V_0$. 这证明了 $J^2 = -\mathrm{id}$. 引理证完.

定义 2.3.2 设 $\mathfrak{G}$ 为实李代数, (ρ, V) 为实李代数的线性表示. 当表示空间 V 为实 (或复) 线性空间时, 表示 (ρ, V) 称为实李代数 $\mathfrak{G}$ 的 **实(或 复)表示**.

下面给出实李代数的实表示及复表示之间的关系.

设 (ρ_0, V_0) 为实李代数的实表示. 将表示空间 V_0 复化为 $V = V_0^C$. 于是它决定了复线性空间 V 的半对合 σ, 使得 $V_0 = (V, \sigma)$. 这时, $\rho_0(\mathfrak{G})$ 为实线性空间 V_0 上的线性变换. 自然地, 可以作为复线性空间 V 上的线性变换, 它定义为

$$\rho(x)(u + \sqrt{-1}v) = \rho_0(x)u + \sqrt{-1}\rho_0(x)v, \quad \forall u, v \in V_0,\ x \in \mathfrak{G}.$$

这样得到一个表示 (ρ, V), 显然是实李代数 $\mathfrak{G}$ 的复表示. 我们称复表示 (ρ, V) 为 **实表示 (ρ_0, V_0)的复化**. 我们有

引理 2.3.3 实李代数 $\mathfrak{G}$ 的复表示 (ρ, V) 的表示空间 V 上有半对合 σ, 即有实线性空间 V_0, 使得 $V_0 = (V, \sigma)$, 则复表示 (ρ, V)

为实表示 (ρ_0, V_0) 的复化，当且仅当

$$\sigma \circ \rho(x) = \rho(x) \circ \sigma, \quad \forall x \in \mathfrak{G}.$$

证 设复表示 (ρ, V) 为实表示 (ρ_0, V_0) 的复化，于是任取 $x \in \mathfrak{G}$，$u, v \in V_0$，有

$$\begin{aligned}
\sigma\rho(x)(u+\sqrt{-1}v) &= \sigma(\rho_0(x)u + \sqrt{-1}\rho_0(x)v) \\
&= \rho_0(x)u - \sqrt{-1}\rho_0(x)v, \\
\rho(x)\sigma(u+\sqrt{-1}v) &= \rho(x)(u - \sqrt{-1}v) \\
&= \rho_0(x)u - \sqrt{-1}\rho_0(x)v.
\end{aligned}$$

这证明了 $\sigma\rho(x) = \rho(x)\sigma, \forall x \in \mathfrak{G}$.

反之，若存在复线性空间 V 的半对合 σ，有 $\sigma \circ \rho(x) = \rho(x) \circ \sigma, \forall x \in \mathfrak{G}$. 记 V_0 为由半对合 σ 决定的实线性空间，且 $V_0^C = V$. 任取 $v \in V_0$，则有 $\sigma(\rho(x)(v)) = \rho(x)\sigma(v) = \rho(x)(v)$，即 $\rho(x)(v) \in V_0$. 所以证明了 $\rho(x)V_0 \subset V_0, \forall x \in \mathfrak{G}$. 记 $\rho(x)|_{V_0} = \rho_0(x), \forall x \in \mathfrak{G}$. 因此 (ρ_0, v_0) 为实李代数 $\mathfrak{G}$ 的实表示. 证完.

由此可见，实李代数 $\mathfrak{G}$ 的实表示 (ρ_0, V_0) 可复扩充为 $\mathfrak{G}$ 的复表示，但是我们不能推出实李代数的复表示必为一个实表示的复化. 例如，n 阶斜 Hermite 方阵构成的李代数，它不可能是一个实表示的复化，但是我们可以看作是另外一种实表示. 为此，我们用矩阵表示来说明问题.

熟知 $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ 为复李代数，其中元素

$$\mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) \ni A + \sqrt{-1}B \to \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in \mathrm{gl}(2n, \mathbb{R}),$$

$\forall A, B \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$. 所以 $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ 作为 $(2n)^2$ 维实李代数 $\mathrm{gl}(2n, \mathbb{R})$ 的实子代数，实维数为 $2n^2$. 显然，对应

$$\xi: \quad A + \sqrt{-1}B \to \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

给出实李代数的同构. 利用同构 ξ, 我们可以将实李代数 $\mathfrak{G}$ 的 n 维复表示变成 $2n$ 维实表示.

现在来考虑实李代数 $\mathfrak{G}$ 的不可约表示.

定义 2.3.4 设 (ρ_0, V_0) 为实李代数 $\mathfrak{G}$ 的实不可约表示. 记 (ρ, V) 为其复化, 其中 $V = V_0^C$. 设若 (ρ, V) 仍不可约, 则 (ρ_0, V_0) 称为 **第一类不可约表示**. 否则称为 **第二类不可约表示**.

显然, 求第一类实不可约表示的问题, 完全化为求复不可约表示. 求第二类实不可约表示, 比较复杂, 它的性质和判别条件由下面给出.

引理 2.3.5 设 (ρ_0, V_0) 为实李代数 $\mathfrak{G}$ 的第二类实不可约表示. 记 (ρ, V) 为其复化, 其中 $V = V_0^C$, 且 $V_0 = (V, \sigma)$, 这里 σ 为半对合. 任取复表示空间 V 的非零极小复不变子空间 V_1, 则 $\sigma(V_1)$ 仍为 V 的非零极小复不变子空间, 且有

$$V = V_1 + \sigma(V_1), \quad V_1 \cap \sigma(V_1) = 0.$$

证 由第二类不可约表示的定义可知, 不可约实表示 (ρ_0, V_0) 的复化 (ρ, V) 可约, 因此有非零极小复不变子空间 $V_1 \neq V$. 由 $\sigma \circ \rho(x) = \rho(x) \circ \sigma$, $\forall x \in \mathfrak{G}$, 所以复线性空间 $\sigma(V_1)$ 仍为极小复不变子空间. 于是, $\sigma(V_1) \cap V_1$ 也是不变子空间. 设若 $\sigma(V_1) \cap V_1 \neq 0$, 则有 $\sigma(V_1) \cap V_1 = V_1 = \sigma(V_1)$. 由 $V_1 = \sigma(V_1)$ 可知半对合 σ 在 V_1 的不动点集 V_2 为实子空间, 且有 $V_2 \subset V_0$. 另一方面, 由 $V_1 = \sigma(V_1)$ 可知实子空间 V_2 的复化 $V_2^C = V_1$. 今 V_1 为复不变子空间, 所以 V_2 为实不变子空间. 由假设实表示 (ρ_0, V_0) 不可约, 又 $V_2 \neq 0$, 所以证明了 $V_2 = V_0$, 因此 $V_1 = V_2^C = V_0^C = V$. 这和复线性空间 V_1 为真子空间矛盾. 所以证明了

$$V_1 \cap \sigma(V_1) = 0.$$

今表示空间 V 有复不变子空间直接和 $\widetilde{V} = V_1 + \sigma(V_1)$. 显然 $\sigma(\widetilde{V}) = \widetilde{V}$, 所以存在实线性空间 V_0 的子空间 V_3, 使得 $V_3^C = \widetilde{V}$. 由 $\widetilde{V}$ 为复表示空间 V 的复不变子空间, 所以 V_3 为实表示空间

V_0 的不变子空间. 由实表示 (ρ_0, V_0) 不可约, 所以 $V_0 = V_3$, 因此 $V = V_0^C = V_3^C = \widetilde{V} = V_1 + \sigma(V_1)$. 至此证明了引理. 证完.

引理 2.3.6 设 (ρ_0, V_0) 为实李代数 $\mathfrak{G}$ 的实不可约表示. 则 (ρ_0, V_0) 为第二类不可约表示, 当且仅当在实表示空间 V_0 上存在线性变换 J, 使得

$$\rho_0(x) \circ J = J \circ \rho_0(x), \quad \forall x \in \mathfrak{G}, \quad J^2 = -\mathrm{id}\,.$$

证 先证必要性. 由引理 2.3.1 可知, 记

$$V_1 = \{v + \sqrt{-1}Jv \mid \forall v \in V_0\}, \quad J^2 = -\mathrm{id}\,.$$

则有复子空间直接和分解 $V = V_1 + \sigma(V_1)$, 其中 σ 为复线性空间 V 的半对合, 使得 $V_0 = (V, \sigma)$. 下面来证 V_1 为实表示 (ρ_0, V_0) 的复化 (ρ, V) 的复不变子空间. 事实上, 由 $v \in V_0$, 任取 $x \in \mathfrak{G}$, 有

$$\begin{aligned}\rho(x)(v + \sqrt{-1}Jv) &= \rho_0(x)v + \sqrt{-1}\rho_0(x)Jv \\ &= \rho_0(x)v + \sqrt{-1}J\rho_0(x)v \in V_1, \quad \forall v \in V_0.\end{aligned}$$

这证明了 $\rho(x)V_1 \subset V_1$, $\forall x \in \mathfrak{G}$, 即 V_1 为复不变子空间. 因此实不可约表示 (ρ_0, V_0) 的复扩充 (ρ, V) 不是不可约表示, 所以实不可约表示 (ρ_0, V_0) 为第二类不可约实表示.

再证充分性. 令实表示 (ρ_0, V_0) 为第二类不可约表示, 由引理 2.3.1 和引理 2.3.5, 只要证明对实李代数 $\mathfrak{G}$ 的复表示 (ρ, V) 的复不变子空间 $V_1 = \{v + \sqrt{-1}Jv \mid \forall v \in V_0\}$, 有 $\rho_0(x)J = J\rho_0(x)$, $\forall x \in \mathfrak{G}$. 事实上, 任取 $v_0 \in V_0$, $x \in \mathfrak{G}$, 则由 $\rho(x)V_1 \subset V_1$, 有

$$\rho(x)(v + \sqrt{-1}Jv) = \rho_0(x)v + \sqrt{-1}\rho_0(x)Jv \ \in \ V_1,$$

即有 $J\rho_0(x)v = \rho_0(x)Jv$, $\forall v \in V_0$. 所以 $J\rho_0(x) = \rho_0(x)J$, $\forall x \in \mathfrak{G}$. 至此证明了充分性. 引理证完.

定理 2.3.7 实李代数 $\mathfrak{G}$ 的两个不可约实表示 $(\rho_0^{(i)}, V_0^{(i)})$, $i = 1, 2$ 互相等价, 当且仅当它们是同类型不可约表示, 且它们的复化 $(\rho^{(i)}, V^{(i)})$, $i = 1, 2$ 中必有一个不可约子表示互相等价.

证 设实表示 $(\rho_0^{(1)},V_0^{(1)})$ 和 $(\rho_0^{(2)},V_0^{(2)})$ 互相等价，所以存在实线性空间 $V_0^{(1)}$ 到 $V_0^{(2)}$ 上的线性同构 $\mathcal{A}_0$, 使得

$$\mathcal{A}_0\circ\rho_0^{(1)}(x)=\rho_0^{(2)}(x)\circ\mathcal{A}_0,\quad \forall x\in\mathfrak{G}.$$

今 $V_0^{(i)}$ 的复化为复线性空间 $V^{(i)}$. 记实形式 $V_0^{(i)}$ 决定的半对合为 σ_i, 即有 $V_0^{(i)}=(V^{(i)},\sigma_i)$, $i=1,2$. 因此线性同构 $\mathcal{A}_0$ 扩充为复表示空间 $V^{(1)}$ 到 $V^{(2)}$ 上的线性同构 $\mathcal{A}$, 它定义为

$$\mathcal{A}(v_1+\sqrt{-1}v_2)=\mathcal{A}_0(v_1)+\sqrt{-1}\mathcal{A}_0(v_2),\quad \forall v_1,v_2\in V_0^{(1)}.$$

任取 $v_1,v_2\in V^{(1)}$, 则有

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\rho^{(1)}(x)(v_1+\sqrt{-1}v_2)&=\mathcal{A}(\rho_0^{(1)}(x)v_1+\sqrt{-1}\rho_0^{(1)}(x)v_2)\\&=\mathcal{A}_0\rho_0^{(1)}(x)v_1+\sqrt{-1}\mathcal{A}_0\rho_0^{(1)}(x)v_2\\&=\rho_0^{(2)}(x)\mathcal{A}_0v_1+\sqrt{-1}\rho_0^{(2)}(x)\mathcal{A}_0v_2\\&=\rho^{(2)}(x)\mathcal{A}(v_1+\sqrt{-1}v_2).\end{aligned}$$

这证明了

$$\mathcal{A}\circ\rho^{(1)}(x)=\rho^{(2)}(x)\circ\mathcal{A},\quad \forall x\in\mathfrak{G},$$

即复表示 $(\rho^{(1)},V^{(1)})$ 和 $(\rho^{(2)},V^{(2)})$ 互相等价.

另一方面，显然有

$$\sigma_2\circ\mathcal{A}=\mathcal{A}\circ\sigma_1,\quad \sigma_i\circ\rho^{(i)}(x)=\rho^{(i)}(x)\circ\sigma_i,\ i=1,2.$$

复表示 $(\rho^{(1)},V^{(1)})$ 不可约当且仅当复表示 $(\rho^{(2)},V^{(2)})$ 不可约. 所以第一类不可约表示等价于第一类不可约表示. 因此第二类不可约表示等价于第二类不可约表示.

现在设 $(\rho_0^{(1)},V_0^{(1)})$ 为第二类不可约表示，它等价于第二类不可约表示 $(\rho_0^{(2)},V_0^{(2)})$, 因此它们的复化互相等价. 由引理 2.3.6, 在复表示空间 $V^{(1)}$ 中存在复极小不变子空间 $V_1^{(1)}$, 使得 $V^{(1)}=V_1^{(1)}+\sigma_1(V_1^{(1)})$ 为极小不变子空间直接和. 由于复表示 $(\rho^{(1)},V^{(1)})$ 在复线性变换 $\mathcal{A}$ 下等价于复表示 $(\rho^{(2)},V^{(2)})$, 所以 $\mathcal{A}(V_1^{(1)})=V_1^{(2)}$ 为复

表示 $(\rho^{(2)}, V^{(2)})$ 的极小不变子空间. 由引理 2.3.1 及 2.3.5 可知, 复表示空间 $V^{(2)} = V_1^{(2)} + \sigma_2(V_1^{(2)})$ 为极小不变子空间直接和. 这证明了复表示 $(\rho^{(i)}, V^{(i)})$ 的子表示 $(\rho^{(i)}, V_1^{(i)})$, $i = 1, 2$ 互相等价.

反之, 设 $(\rho_0^{(i)}, V_0^{(i)})$ 为实李代数 $\mathfrak{G}$ 的不可约表示, $(\rho^{(i)}, V^{(i)})$ 为其复化, 且复表示 $(\rho^{(i)}, V^{(i)})$ 中有不可约子表示 $(\rho^{(i)}, V_1^{(i)})$, $i = 1, 2$, 使得 $(\rho^{(1)}, V_1^{(1)})$ 和 $(\rho^{(2)}, V_1^{(2)})$ 互相等价. 我们来证明实表示 $(\rho_0^{(1)}, V_0^{(1)})$ 和 $(\rho_0^{(2)}, V_0^{(2)})$ 互相等价. 若 $(\rho_0^{(1)}, V_0^{(1)})$ 为第一类不可约表示, 因此 $V_1^{(1)} = V^{(1)}$, 所以 $(\rho_0^{(2)}, V_0^{(2)})$ 也为第一类不可约表示, 即 $V_1^{(2)} = V^{(2)}$. 由假设复表示 $(\rho^{(1)}, V^{(1)})$ 和 $(\rho^{(2)}, V^{(2)})$ 互相等价, 即存在复表示空间 $V^{(1)}$ 到 $V^{(2)}$ 上的线性同构 $\mathcal{A}$, 使得 $\rho^{(2)}(x)\mathcal{A} = \mathcal{A}\rho^{(1)}(x), \forall x \in \mathfrak{G}$, 且 $\rho^{(i)}(x)\sigma_i = \sigma_i\rho^{(i)}(x)$, $\forall x \in \mathfrak{G}$, $i = 1, 2$. 令 $\mathcal{B} = \sigma_2 \circ \mathcal{A} \circ \sigma_1$, 则 $\mathcal{B}$ 仍为线性空间 $V^{(1)}$ 到 $V^{(2)}$ 上的线性同构, 且有

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\rho_1(x) &= \sigma_2\mathcal{A}\sigma_1\rho_1(x) = \sigma_2\mathcal{A}\rho_1(x)\sigma_1 = \sigma_2\rho_2(x)\mathcal{A}\sigma_1 \\ &= \rho_2(x)\sigma_2\mathcal{A}\sigma_1 = \rho_2(x)\mathcal{B}, \quad \forall x \in \mathfrak{G}.\end{aligned}$$

于是, $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$ 有

$$\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\rho_1(x) = \mathcal{B}^{-1}\rho_2(x)\mathcal{A} = \rho_1(x)\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}, \quad \forall x \in \mathfrak{G}.$$

对表示空间 V_1 上的非异线性变换 $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$, 用 Schur 引理可知存在复数 $c \neq 0$, 使得 $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A} = c^{-1}(\mathrm{id})$, 即有 $\sigma_2\mathcal{A}\sigma_1 = \mathcal{B} = c\mathcal{A}$. 而 $\sigma_2\mathcal{A} = c\mathcal{A}\sigma_1$,

$$\mathcal{A} = \sigma_2^2\mathcal{A}\sigma_1^2 = \sigma_2(\sigma_2\mathcal{A}\sigma_1)\sigma_1 = \sigma_2(c\mathcal{A})\sigma_1 = \bar{c}\sigma_2\mathcal{A}\sigma_1 = |c|^2\mathcal{A}.$$

因此 $|c| = 1$. 记 $c = \exp(\sqrt{-1}\theta)$, 取 $\mathcal{A}_0 = \exp(\sqrt{-1}\theta/2)\mathcal{A}$, 于是

$$\begin{aligned}\sigma_2\mathcal{A}_0 &= \sigma_2(\exp(\frac{\sqrt{-1}\theta}{2})\mathcal{A}) = \exp(\frac{-\sqrt{-1}\theta}{2})\sigma_2\mathcal{A} \\ &= \exp(\frac{\sqrt{-1}\theta}{2})\mathcal{A}\sigma_1 = \mathcal{A}_0\sigma_1.\end{aligned}$$

今任取 $v \in V_0^{(1)}$, 则 $\mathcal{A}_0(v) = \mathcal{A}_0\sigma_1(v) = \sigma_2\mathcal{A}_0(v)$. 这证明了 $\mathcal{A}_0(v) \in V_0^{(2)}$. 所以 $\mathcal{A}_0(V_0^{(1)}) = V_0^{(2)}$, 且

$$\begin{aligned}\rho_0^{(2)}(x)\mathcal{A}_0 &= \rho_0^{(2)}(x)(\exp(\frac{\sqrt{-1}\theta}{2})\mathcal{A}) = \exp(\frac{\sqrt{-1}\theta}{2})\rho_0^{(2)}(x)\mathcal{A}\\ &= \exp(\frac{\sqrt{-1}\theta}{2})\mathcal{A}\rho_0^{(1)}(x) = \mathcal{A}_0\rho_0^{(1)}(x), \quad \forall x \in \mathfrak{G}.\end{aligned}$$

这证明了实表示 $(\rho_0^{(1)}, V_0^{(1)})$ 和 $(\rho_0^{(2)}, V_0^{(2)})$ 等价.

若 $(\rho_0^{(i)}, V_0^{(i)})$ 为第二类不可约表示, 记 $(\rho^{(i)}, V^{(i)})$ 为它的复化. 设存在复线性同构 $\mathcal{A}: V^{(1)} \to V^{(2)}$, 使得

$$\rho^{(2)}(x)\mathcal{A} = \mathcal{A}\rho^{(1)}(x), \quad \forall x \in \mathfrak{G}.$$

今表示空间 $V^{(1)}$ 中有极小复不变子空间 $V_1^{(1)}$, 使得 $V^{(1)} = V_1^{(1)} + \sigma_1(V_1^{(1)})$ 为极小复不变子空间直接和. 记 $V_1^{(2)} = \mathcal{A}(V_1^{(1)})$ 为表示空间 $(\rho_2, V^{(2)})$ 的子空间, 显然它是极小复不变子空间. 引进表示空间 $V^{(1)}$ 到 $V^{(2)}$ 上的线性同构 $\mathcal{B} = \sigma_2 \circ \mathcal{A} \circ \sigma_1$, 由于 $\sigma_i\rho^{(i)}(x) = \rho^{(i)}(x)\sigma_i$, $i = 1, 2$, $\forall x \in \mathfrak{G}$, 我们有 $\mathcal{B}\circ\rho^{(1)}(x) = \rho^{(2)}(x)\circ\mathcal{B}$, $\forall x \in \mathfrak{G}$. 而

$$\mathcal{B}(\sigma_1(V_1^{(1)})) = \sigma_2\mathcal{A}\sigma_1(\sigma_1(V_1^{(1)})) = \sigma_2\mathcal{A}(V_1^{(1)}) = \sigma_2(V_1^{(2)})$$

仍为极小复不变子空间, 且表示空间 $V^{(2)} = V_1^{(2)} + \sigma_2(V_1^{(2)})$ 为极小复不变子空间直接和. 在表示空间 $V^{(1)} = V_1^{(1)} + \sigma_1(V_1^{(1)})$ 上引进线性同构 $\mathcal{A}_0$, 使得 $\mathcal{A}_0|_{V_1^{(1)}} = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0|_{\sigma_1(V_1^{(1)})} = \mathcal{B}$. 于是任取 $u, v \in V_1^{(1)}$, 则

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}_0\sigma_1(u + \sigma_1(v)) = \mathcal{A}_0\sigma_1(u) + \mathcal{A}_0(v)\\ &= \mathcal{B}(v) + \mathcal{B}(\sigma_1(u)) = \mathcal{A}(v) + \sigma_2\mathcal{A}\sigma_1(\sigma_1(u))\\ &= \mathcal{A}(v) + \sigma_2\mathcal{A}(u),\\ &\sigma_2\mathcal{A}_0(u + \sigma_1(v)) = \sigma_2\mathcal{A}_0(u) + \sigma_2\mathcal{A}_0\sigma_1(v)\\ &= \sigma_2\mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v).\end{aligned}$$

这证明了 $\mathcal{A}_0\circ\sigma_1=\sigma_2\circ\mathcal{A}_0$. 又

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}_0\rho_1(x)(u+\sigma_1(v))=\mathcal{A}_0\rho_1(x)u+\mathcal{A}_0\rho_1(x)\sigma_1(v)\\=&\mathcal{A}\rho_1(x)(u)+\sigma_2\mathcal{A}\sigma_1\rho_1(x)\sigma_1(v)=\rho_2(x)\mathcal{A}(u)+\sigma_2\mathcal{A}\rho_1(x)(v)\\=&\rho_2(x)\mathcal{A}(u)+\sigma_2\rho_2(x)\mathcal{A}(v)=\rho_2(x)(\mathcal{A}(u)+\sigma_2\mathcal{A}(v))\\=&\rho_2(x)(\mathcal{A}(u)+(\sigma_2\mathcal{A}\sigma_1)(\sigma_1(v)))=\rho_2(x)\mathcal{A}_0(u+\sigma_1(v)),\end{aligned}$$

其中 $u,v\in V_1^{(1)}$, 即证明了 $\mathcal{A}_0\rho_1(x)=\rho_2(x)\mathcal{A}_0$, $\forall x\in\mathfrak{G}$, 因此 $\mathcal{A}_0$ 给出了复表示 $(\rho^{(1)},V^{(1)})$ 和 $(\rho^{(2)},V^{(2)})$ 的同构.

任取 $u\in V_0^{(1)}$, 则 $\mathcal{A}_0(u)=\mathcal{A}_0\sigma_1(u)=\sigma_2\mathcal{A}_0(u)$. 因此 $\mathcal{A}_0(u)\in V_0^{(2)}$. 这证明了 $\mathcal{A}_0(V_0^{(1)})=V_0^{(2)}$, 即 $\mathcal{A}_0$ 给出实表示 $(\rho_0^{(1)},V_0^{(1)})$ 和 $(\rho_0^{(2)},V_0^{(2)})$ 的同构. 定理证完.

设 $\mathfrak{G}$ 为实半单李代数, (ρ_0,V_0) 为它的实表示, (ρ,V) 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的实表示 (ρ_0,V_0) 的复化. 考虑实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的复化 $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$, 则

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{G}+\sqrt{-1}\mathfrak{G},\quad \mathfrak{G}\cap\sqrt{-1}\mathfrak{G}=0.$$

于是对李代数 $\mathfrak{G}$ 的复表示 (ρ,V), 引进

$$\widetilde{\rho}(x+\sqrt{-1}y)=\rho(x)+\sqrt{-1}\rho(y),\quad \forall x,y\in\mathfrak{G}.$$

则易证 $(\widetilde{\rho},V)$ 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示. 因此可以利用复半单李代数的表示论结果, 设法诱导出实半单李代数的表示论.

定理 2.3.8 设 (ρ_0,V_0) 为实半单李代数的第二类不可约表示. 记 (ρ,V) 为 (ρ_0,V_0) 的复化, V_1 为复表示空间 V 的极小复不变子空间, 有 $V=V_1+\sigma(V_1)$, 其中 σ 为复线性空间 V 的半对合, 使得 $V_0=(V,\sigma)$. 记 $\rho|_{V_1}=\rho_1$, $\rho|_{\sigma(V_1)}=\rho_2$. 则有

(1) $\rho_2=\overline{\rho_1}$;

(2) 记复表示 (ρ_1,V_1) 和 $(\overline{\rho_1},\sigma(V_1))$ 的权系分别为 Φ_1 及 Φ_2, 则有 $\Phi_2=\{\overline{\lambda\circ\sigma_0}\mid\forall\lambda\in\Phi_1\}$, 且权空间的维数有

$$\dim V_{1\lambda}=\dim(\sigma(V_1))_{\overline{\lambda\circ\sigma_0}},$$

其中 $\mathfrak{G}=(\mathfrak{L},\sigma_0)$, 这里 $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$.

证 显然有 $\rho_2=\overline{\rho_1}$. 记 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$ 为 Cartan 分解, $\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}_c+\mathfrak{H}_v$ 为 Cartan 子代数, 其中 $\mathfrak{H}_c=\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{K}$、$\mathfrak{H}_v=\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{P}$. 记 $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0^C$, 有根子空间分解

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{H}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{L}_\alpha.$$

记表示 (ρ,V) 关于 $\rho(\mathfrak{H}_0)$ 的权子空间分解为 $V=\sum\limits_{\lambda\in\Phi}V_\lambda$, 则 Φ 也称为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 关于**复表示** (ρ,V)**的权系**. 于是有

$$\rho(h)v_\lambda=\lambda(h)v_\lambda,\quad \forall\lambda\in\Phi,\ h\in\mathfrak{H}_0.$$

记 σ 为由实形式 V_0 决定的复表示空间 V 的半对合, 即有 $V_0=(V,\sigma)$, 则有

$$\rho(h)\circ\sigma=\sigma\circ\rho(h),\quad \forall h\in\mathfrak{H}_0.$$

所以任取 $h',h''\in\mathfrak{H}_0$, $v_\lambda\in V_\lambda$, 其中 $\lambda\in\Phi$, 有

$$\begin{aligned}&\widetilde{\rho}(h'+\sqrt{-1}h'')\sigma(v_\lambda)=\rho(h')\sigma(v_\lambda)+\sqrt{-1}\rho(h'')\sigma(v_\lambda)\\=&\sigma((\rho(h')-\sqrt{-1}\rho(h''))(v_\lambda))=\sigma((\lambda(h'-\sqrt{-1}h''))(v_\lambda))\\=&\overline{\lambda(h'-\sqrt{-1}h'')}\sigma(v_\lambda)=\overline{\lambda\sigma_0(h'+\sqrt{-1}h'')}\sigma(v_\lambda),\end{aligned}$$

即证明了 $\sigma(V_\lambda)\subset V_{\overline{\lambda\circ\sigma_0}}$. 所以 $\overline{\lambda\circ\sigma_0}\in\Phi$, 其中 $\mathfrak{G}=(\mathfrak{G}^C,\sigma_0)$. 由于 $\sigma^{-1}=\sigma$, 同理可证 $\sigma(V_{\overline{\lambda\circ\sigma_0}})\subset V_\lambda$, 即 $\sigma(V_\lambda)=V_{\overline{\lambda\circ\sigma_0}}$. 由于 σ_0 为一一映射, 这证明了 $\lambda\to\overline{\lambda\circ\sigma_0}$ 给出权系 Φ 到自身上的一一对应. 所以 $\Phi_2=\{\overline{\lambda\circ\sigma_0}\mid\forall\lambda\in\Phi_1\}$, 且 $\Phi_1\cup\Phi_2=\Phi$. 定理证完.

定理 2.3.9 实半单李代数的表示必完全可约.

证 设 $\mathfrak{G}$ 为实半单李代数, $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$ 为其复化. 实形式 $\mathfrak{G}$ 决定了复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的半对合 σ, 即有 $\mathfrak{G}=(\mathfrak{L},\sigma)$. 设 (ρ_0,V_0) 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的实表示, 其复化记作 (ρ_0,V). 于是实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的复表示 (ρ_0,V) 可自然地扩充为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示 (ρ,V). 由定义

$$\rho(x+\sqrt{-1}y)=\rho_0(x)+\sqrt{-1}\rho_0(y),\quad \forall x,y\in\mathfrak{G}.$$

已知复半单李代数的复表示完全可约，即表示空间 V 分解为极小不变子空间直接和

$$V = V_1 + \cdots + V_s.$$

由于 $\rho(x)V_i \subset V_i, \forall x \in \mathfrak{G}^C = \mathfrak{L}$, 推出 $\rho_0(x)V_i \subset V_i, \forall x \in \mathfrak{G}$. 这证明了上述分解证明了实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的复表示 (ρ_0, V) 的表示空间 V 能分解为不变子空间 $V_1, \cdots, V_s$ 的空间直接和.

我们来证明 V_i 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的复表示 (ρ_0, V) 的极小不变子空间. 事实上, 若 V_i 不是极小不变子空间, 则 V_i 中有真不变子空间 $V_{i1} \neq 0$. 而 $\rho_0(X)V_{i1} \subset V_{i1}, \forall x \in \mathfrak{G}$ 蕴含 $\rho(x)V_{i1} \subset V_{i1}, \forall x \in \mathfrak{G}^C = \mathfrak{L}$. 这证明了子空间 V_i 不是复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的表示 (ρ, V) 的极小不变子空间, 所以导出矛盾. 因此断言成立.

下面证实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的实表示 (ρ_0, V_0) 完全可约. 考虑 (ρ_0, V), 上面已证复表示 (ρ_0, V) 完全可约, 即 $V = V_1 + \cdots + V_s$ 为关于复表示 (ρ_0, V) 的极小不变复子空间直接和, 有 $\rho_0(\mathfrak{G})V_i \subset V_i$, $1 \leq i \leq s$. 记 $V_0 = (V, \sigma)$, 其中 σ 为复线性空间 V 的半对合. 于是在复表示空间 V 上有

$$\rho_0(x) \circ \sigma = \sigma \circ \rho_0(x), \quad \forall x \in \mathfrak{G}.$$

因此关于半对合 σ 有下面三类,

(1) $\sigma(V_i) = V_i, \quad 1 \leq i \leq s;$

(2) $\sigma(V_i) = V_{i+1}, \quad i = s_1 + 2k - 1, \quad 1 \leq k \leq s_2;$

(3) $\sigma(V_i) \neq V_j, \quad s_1 + 2s_2 + 1 \leq i \leq s_1 + 2s_2 + s_3 = s$, $1 \leq j \leq s_1 + 2s_2 + s_3 = s$.

在情形 (1), 则 $V_{i0} = V_0 \cap V_i$ 为实表示 (ρ_0, V_0) 的不变子空间. 若 V_{i0} 不是极小不变子空间, 则在 V_{i0} 中取非零真不变子空间 V'_{i0}, 于是 $(V'_{i0})^C$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的复表示 (ρ_0, V) 的不变子空间. 今 $(V'_{i0})^C \subset V_i$, 由 V_i 的极小性便证明了 $(V'_{i0})^C = V_i$, 所以 $V'_{i0} = V_{i0}$. 这导出矛盾. 所以证明了实子空间 V_{i0} 为实表示 (ρ_0, V_0) 的极小不变子空间.

在情形 (2) 及 (3). 考虑子空间 $V_i+\sigma(V_i)$. 注意到 $\rho(x)\circ\sigma = \sigma\circ\rho(x)$, $\forall x\in\mathfrak{G}$, 所以由 $\rho(x)V_i\subset V_i$ 有 $\rho(x)(\sigma(V_i)) = \sigma(\rho(x)(V_i))\subset\sigma(V_i)$, $\forall x\in\mathfrak{G}$. 再由 $\sigma^2 = \mathrm{id}$ 可知 $\sigma(V_i)$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的复表示 (ρ_0, V) 的极小不变子空间. 今 $\sigma(V_i+\sigma(V_i)) = \sigma(V_i)+V_i$, 所以有实子空间 $V_{i0} = V_0\cap(V_i+\sigma(V_i))$, 且 $V_{i0}^C = V_i+\sigma(V_i)$. 注意到任取 $v\in V_i$, 则 $p = \dfrac{1}{2}(v+\sigma(v))$, $q = \dfrac{\sqrt{-1}}{2}(-v+\sigma(v))\in V_{i0}$. 所以 V_i 的元素 $v = p+\sqrt{-1}q$, 其中 $p, q\in V_{i0}$. 因此存在实线性空间 V_{i0} 上的线性变换 J 使得 $J^2 = -\mathrm{id}$, 且

$$V_i = \{v_1+\sqrt{-1}Jv_1 \mid \forall v_1\in V_{i0}\},$$
$$\sigma(V_i) = \{v_1-\sqrt{-1}Jv_1 \mid \forall v_1\in V_{i0}\}.$$

由于 V_i 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的复表示 (ρ_0, V) 的不变子空间, 因此有 $\rho_0(x)J = J\rho_0(x)$, $\forall x\in\mathfrak{G}$.

下面来证 V_{i0} 为实表示 (ρ_0, V_0) 的不变子空间. 事实上, 任取 $v\in V_{i0}$, 则 $\rho_0(x)v\in\rho_0(x)V_{i0} = \rho_0(x)(V_0\cap(V_i+\sigma(V_i)))\subset V_0\cap(V_i+\sigma(V_i)) = V_{i0}$, $\forall x\in\mathfrak{G}$. 这证明了 $\rho_0(x)V_{i0}\subset V_{i0}$, $\forall x\in\mathfrak{G}$, 即 V_{i0} 为不变子空间.

再证 V_{i0} 为实半单李代数的实表示 (ρ_0, V_0) 的极小不变子空间. 设若不然, 在 V_{i0} 中存在实表示 (ρ_0, V_0) 的非零真不变子空间 V_{i0}'. 考虑 V_{i0} 的实子空间 JV_{i0}'. 今 $\rho_0(x)(JV_{i0}') = J\rho_0(x)V_{i0}'\subset JV_{i0}'$, $\forall x\in\mathfrak{G}$. 这证明了 JV_{i0}' 仍为实表示 (ρ_0, V_0) 的不变子空间. 所以 $V_{i1} = V_{i0}'\cap JV_{i0}'$ 为实表示 (ρ_0, V_0) 的不变子空间.

当 $V_{i1}\neq 0$, 所以任取 $v\in V_{i1}$, 则 $v\in V_{i0}'$, $Jv\in JV_{i0}'$, 又 $v\in JV_{i0}'$, $Jv\in J^2V_{i0}' = V_{i0}'$. 这证明了 $Jv\in V_{i0}'\cap JV_{i0}' = V_{i1}$. 因此有 $JV_{i1} = V_{i1}$. 为方便起见, 我们无妨设 $JV_{i0}' = V_{i0}'$. 这时考虑复线性空间 V_i 的子集

$$V_i' = \{v_1+\sqrt{-1}v_1 \quad | \quad \forall v_1\in V_{i0}'\}\neq V_i.$$

显然 V_i' 为 V_i 的实子空间, 且任取 $v_1\in V_{i0}'$, 则

$$\sqrt{-1}(v_1+\sqrt{-1}Jv_1) = -Jv_1+\sqrt{-1}v_1 = -Jv_1+\sqrt{-1}J(-Jv_1)\in V_i'.$$

这证明了 V_i' 为复线性空间 V_i 的非零真子空间. 我们来证它为复表示 (ρ_0, V) 的不变子空间. 事实上, 任取 $x \in \mathfrak{G}$, $\rho_0(x)(v_1 + \sqrt{-1}Jv_1) = \rho_0(x)v_1 + \sqrt{-1}\rho_0(x)Jv_1 = \rho_0(x)v_1 + \sqrt{-1}J\rho_0(X)v_1$. 由于 $\rho_0(x)V_{i0}' \subset V_{i0}'$, 所以 $\rho_0(X)V_i' \subset V_i'$, $\forall x \in \mathfrak{G}$. 这证明了 V_i' 为复不变子空间. 但是 V_i 为复表示 (ρ_0, V) 的极小不变子空间, 所以 $V_i' = V_i$. 这和 $V_i' \neq V_i$ 矛盾. 至此证明了实线性空间 V_{i0} 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的实表示 (ρ_0, V_0) 的极小不变子空间.

至此, 对每个 V_i, 构造了实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的实表示 (ρ_0, V_0) 的实极小不变子空间 $V_{i0} \subset V_i$, 且 $\dim_R V_{i0} = \dim_C V_i$. 于是证明了

$$V = V_{10} + V_{20} + \cdots + V_{s0}$$

为极小不变子空间直接和. 因此实半单李代数的实表示完全可约. 证完.

作为应用, 现在回到实半单李代数的构造. 我们来考虑实李代数 $\mathfrak{G}$ 的伴随表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{G})$. 显然, 伴随表示的不变子空间为理想, 所以伴随表示不可约当且仅当实李代数 $\mathfrak{G}$ 为单李代数.

定义 2.3.10 实单李代数 $\mathfrak{G}$ 称为**第一类**(或**第二类**)**实单李代数**, 如果 $\mathfrak{G}$ 的伴随表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{G})$ 为第一类 (或第二类) 不可约表示.

和复的情形完全相同, 我们可以证明

定理 2.3.11 实半单李代数为实单理想的直接和, 且不计次序分解唯一.

定理 2.3.12 维数大于 1 的复单李代数的实形式必为实单李代数, 所以为第一类实单李代数.

证 记 $\mathfrak{L}$ 为复单李代数, $\mathfrak{G}$ 为其实形式. 今 $\dim \mathfrak{L} > 1$, 所以 $\mathfrak{L}$ 为复半单李代数. 因此其实形式半单. 由定理 2.3.12, $\mathfrak{G}$ 为单理想直接和. 若 $\mathfrak{G}$ 不半单, 则有 $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2$ 为两个非零理想的直接和, 于是 $[\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2] = 0$. 今 $\mathfrak{G}$ 的复化 $\mathfrak{G}^C = \mathfrak{G}_1^C + \mathfrak{G}_2^C = \mathfrak{L}$. 而 $\mathfrak{G}_i^C$ 为复线性空间 $\mathfrak{L}$ 的子空间, 且 $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}_1^C + \mathfrak{G}_2^C$ 为空间直接和.

今

$$[\mathfrak{G}_1^C,\mathfrak{G}_2^C]=[\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2]^C=0,\ [\mathfrak{G}_i^C,\mathfrak{G}_i^C]=[\mathfrak{G}_i,\mathfrak{G}_i]^C\subset\mathfrak{G}_i^C,\ i=1,2.$$

这证明了 $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}_1^C+\mathfrak{G}_2^C$ 为理想直接和. 由于复李代数 $\mathfrak{L}$ 单, 因此推出矛盾. 定理证完.

反之, 定理不成立. 事实上, 由于 $\mathfrak{G}$ 为实单李代数, 且维数大于 1, 则 $\mathfrak{G}$ 有伴随表示 $(\mathrm{ad},\mathfrak{G})$, 它不可约. 而它导出复表示 $(\mathrm{ad},\mathfrak{L})$, 其中 $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$ 为复李代数. 由于 $\mathfrak{G}$ 的维数大于 1, 所以 $\mathfrak{G}$ 实半单. 因此 $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$ 复半单. 当实表示 $(\mathrm{ad},\mathfrak{G})$ 为第一类表示时, 则复表示 $(\mathrm{ad},\mathfrak{L})$ 不可约, 因此 $\mathfrak{L}$ 为复单李代数; 当实表示 $(\mathrm{ad},\mathfrak{G})$ 为第二类表示时, 复表示 $(ad,\mathfrak{L})$ 可约, 且复表示空间 $\mathfrak{L}$ 分解为两个极小复不变子空间直接和. 确切地说, 在实李代数 $\mathfrak{G}$ 上存在线性变换 J, 适合 $J^2=-\mathrm{id}$, 且有 $(\mathrm{ad}(x))J=J\mathrm{ad}(x)$, $\forall x\in\mathfrak{G}$. 而记

$$\mathfrak{G}=(\mathfrak{L},\sigma),$$

则

$$\mathfrak{L}_1=\{x+\sqrt{-1}Jx\mid\forall x\in\mathfrak{G}\},\quad \sigma(\mathfrak{L}_1)=\{x-\sqrt{-1}Jx\mid\forall x\in\mathfrak{G}\}$$

为 $\mathfrak{L}$ 的极小不变子空间. 又有

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_1+\sigma(\mathfrak{L}_1)$$

为空间直接和. 由于表示为伴随表示, 所以不变子空间为理想. 因此有 $[\mathfrak{L}_1,\sigma(\mathfrak{L}_1)]\subset\mathfrak{L}_1\cap\sigma(\mathfrak{L}_1)=0$. 这证明了 $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_1+\sigma(\mathfrak{L}_1)$ 为两个单理想直接和.

另一方面, $\mathfrak{L}_1=\{x+\sqrt{-1}Jx\mid\forall x\in\mathfrak{G}\}$ 为复李代数, 因此任取 $x,y\in\mathfrak{G}$, 则

$$\begin{aligned}&[x+\sqrt{-1}Jx,y+\sqrt{-1}Jy]\\=&[x,y]-[Jx,Jy]+\sqrt{-1}([Jx,y]+[x,Jy])\in\mathfrak{L}_1.\end{aligned}$$

这证明了

$$J[x,y]-J[Jx,Jy]=[Jx,y]+[x,Jy].$$

由 $J^2 = -\mathrm{id}$，有

$$-[x,y] + [Jx,Jy] = J[Jx,y] + J[x,Jy],$$

即线性变换 J 适合条件

(1) $J^2 = -\mathrm{id}$;

(2) $[Jx,Jy] = [x,y] + J[Jx,y] + J[x,Jy], \ \forall x,y \in \mathfrak{G}$.

我们来证复单李代数 $\mathfrak{L}_1$ 和 $\sigma(\mathfrak{L}_1)$ 互相同构. 事实上，由于 $\mathfrak{L}_1$ 为单李代数，且半单，所以有紧实形式. 因此存在一组基 $e_1,\cdots,e_n$，使得其构造常数由实数构成，即有

$$[e_i,e_j] = \sum_k C_{ij}^k e_k, \quad 1 \leq i,j \leq n, \quad \forall C_{ij}^k \in \mathbb{R}.$$

令 $\sigma(x+\sqrt{-1}Jx) = x-\sqrt{-1}Jx$，且 σ 为复单李代数 $\mathfrak{L}$ 的半对合，所以有 $\sigma(e_1),\cdots,\sigma(e_n)$ 为复单李代数 $\sigma(\mathfrak{L}_1)$ 的基，且有

$$[\sigma(e_i),\sigma(e_j)] = \sigma([e_i,e_j]) = \sum_k C_{ij}^k \sigma(e_k).$$

这证明了复单李代数 $\mathfrak{L}_1$ 到 $\sigma(\mathfrak{L}_1)$ 上有李代数的同构对应

$$\sum \lambda_i e_i \to \sum \lambda_i \sigma(e_i), \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

注意，这个同构对应不是 σ，因为 $\sigma(\sum \lambda_i e_i) = \sum \overline{\lambda_i} \sigma(e_i)$.

所以，我们证明了

定理 2.3.13 设实单李代数 $\mathfrak{G}$ 的维数大于 1，记 $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C$ 为 $\mathfrak{G}$ 的复化，则 $\mathfrak{L}$ 为复半单李代数，且有

(1) $\mathfrak{G}$ 为第一类实单李代数，当且仅当 $\mathfrak{L}$ 为复单李代数;

(2) $\mathfrak{G}$ 为第二类实单李代数，当且仅当 $\mathfrak{L}$ 为两个互相同构的单理想的直接和.

定理 2.3.14 不同类型的实单李代数互不同构.

证 显然，两个实李代数 $\mathfrak{G}_i$ 的伴随表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{G})$, $i=1,2$ 等价，当且仅当实李代数 $\mathfrak{G}_1$ 和 $\mathfrak{G}_2$ 互相同构. 事实上，存在 $\mathfrak{G}_1$ 到 $\mathfrak{G}_2$ 上的线性同构 ρ, 使得

$$\rho \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{G}_1} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{G}_2} \circ \rho,$$

即任取 $x \in \mathfrak{G}_1$, 有 $\rho \mathrm{ad}\, x = (\mathrm{ad}(\rho(x)))\rho$, 因此任取 $y \in \mathfrak{G}_2$, 有 $\rho([x,y]) = [\rho(x), \rho(y)]$, 即 ρ 给出李代数 $\mathfrak{G}_1$ 到 $\mathfrak{G}_2$ 上的同构. 反之亦然. 证完.

前面我们提到，为了对实半单李代数作分类，要考虑紧半单李代数的对合自同构，且在紧李代数的共轭下先考虑对合自同构的分类. 由于标准对合自同构的特征根只有 ± 1, 于是关于对合自同构的不动点集为紧子代数，称为 **特征子代数**, 它在实半单李代数的分类中起了决定性作用. 事实上，我们有如下 Cartan 定理.

定理 2.3.15 设 $\mathfrak{G}$ 为维数大于 1 的实单李代数，θ 为 $\mathfrak{G}$ 上的对合自同构, 则 θ 的不动点集 $\mathfrak{K}$ 为紧子代数，θ 的特征根 -1 的特征向量构成的子空间记作 $\mathfrak{P}$, 则实单李代数 $\mathfrak{P}$ 的表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{P})$ 有如下性质：

(1) 实表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{P})$ 不可约.

(2) 实表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{P})$ 的复化若不可约，则特征子代数 $\mathfrak{K}$ 紧半单；若可约，则特征子代数 $\mathfrak{K}$ 非半单，且中心 $C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$ 为一维子空间.

证 先给出两个简单性质：

(a) $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] = \mathfrak{K}$;

(b) $B(x,y)$ 在 $\mathfrak{P}$ 上正定，$B(x, \sigma(y))$ 在 $\mathfrak{P}$ 的复化 $\mathfrak{P}^C$ 上正定，这里，σ 为 $\mathfrak{G}$ 的复化 $\mathfrak{L}$ 的由 $\mathfrak{G}$ 决定的半对合.

事实上，后一断言显然成立. 前一断言证明如下. 考虑 $\mathfrak{P} + [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$. 由于已知 $[\mathfrak{K}, \mathfrak{K}] \subset \mathfrak{K}$, $[\mathfrak{K}, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{P}$, $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{K}$, 可知

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{K}, \mathfrak{P} + [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]] &\subset [\mathfrak{K}, \mathfrak{P}] + [\mathfrak{K}, [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]] \\
&\subset [\mathfrak{K}, \mathfrak{P}] + [[\mathfrak{K}, \mathfrak{P}], \mathfrak{P}] + [\mathfrak{P}, [\mathfrak{K}, \mathfrak{P}]] \\
&\subset \mathfrak{P} + [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}],
\end{aligned}$$

又

$$[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}+[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]] \subset [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]+[\mathfrak{P}, \mathfrak{K}] \subset \mathfrak{P}+[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}].$$

因此 $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]+\mathfrak{P}$ 为单李代数 $\mathfrak{G}$ 的非零理想. 由于 $\mathfrak{G}$ 为单李代数, 所以证明了

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}=[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]+\mathfrak{P}.$$

因此有 $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]=\mathfrak{K}$.

先证定理的性质 (1), 即证李代数 $\mathfrak{K}$ 的实表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{P})$ 不可约. 设若不然, 则 $\mathfrak{P}$ 中有非零真不变子空间 $\mathfrak{P}_1$. 由于 Killing 型 $B(x, y)$ 在 $\mathfrak{P}$ 上正定, 所以 $\mathfrak{P}=\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_1^{\perp}$ 为子空间直接和. 我们来证这是不变子空间直接和. 事实上, 由 Killing 型的不变性, 有

$$B(\mathfrak{P}_1,[\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_1^{\perp}])=-B([\mathfrak{K}, \mathfrak{P}], \mathfrak{P}_1^{\perp})=0.$$

这证明了 $[\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_1^{\perp}] \subset \mathfrak{P}_1^{\perp}$. 所以断言成立.

现在考虑实单李代数 $\mathfrak{G}$ 的实子空间 $\mathfrak{G}'=\mathfrak{P}_1+[\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1]$. 我们来证 $\mathfrak{G}'$ 为 $\mathfrak{G}$ 的非零理想. 事实上

$$[\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_1+[\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1]] \subset [\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_1]+[[\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_1], \mathfrak{P}_1]+[\mathfrak{P}_1,[\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_1]] \subset \mathfrak{G}',$$

又

$$[\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1+[\mathfrak{P}_1 . \mathfrak{P}_1]] \subset [\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1]+[\mathfrak{P}_1, \mathfrak{K}] \subset \mathfrak{G}',$$

而

$$[\mathfrak{P}_1^{\perp}, \mathfrak{P}_1+[\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1]] \subset [\mathfrak{P}_1^{\perp}, \mathfrak{P}_1]+[[\mathfrak{P}^{\perp}, \mathfrak{P}_1], \mathfrak{P}_1]+[\mathfrak{P}_1,[\mathfrak{P}_1^{\perp}, \mathfrak{P}_1]].$$

今 $[\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1^{\perp}] \subset [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]=\mathfrak{K}$, 而 Killing 型在 $\mathfrak{K}$ 上负定. 但是

$$B(\mathfrak{K},[\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1^{\perp}])=-B([\mathfrak{P}_1, \mathfrak{K}], \mathfrak{P}_1^{\perp})=0.$$

这证明了 $[\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1^{\perp}]=0$. 总之, 我们推出 $\mathfrak{G}'$ 为实单李代数 $\mathfrak{G}$ 的非零理想, 所以 $\mathfrak{G}'=\mathfrak{G}$. 这证明了 $\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}$. 这又和 $\mathfrak{P}_1$ 为真子空间矛盾. 所以证明了表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{P})$ 不可约, 即性质 (1) 成立.

现在来证若复表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{P}^C)$ 不可约, 则特征子代数 $\mathfrak{K}$ 半单. 设若 $\mathfrak{K}$ 非半单, 则中心 $C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K}) \neq 0$. 取定 $A \in C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$, $A \neq 0$, 于是

$[\mathrm{ad}\,A, \mathrm{ad}\,\mathfrak{K}] = 0$. 由 Schur 引理便证明了 $\mathrm{ad}\,A$ 为 $\mathfrak{P}$ 上的纯量变换, 即有常数 λ, 使得 $[A,p] = \lambda p$, $\forall p \in \mathfrak{P}$. 由于 $[\mathfrak{P},\mathfrak{P}] = \mathfrak{K}$, $[A,\mathfrak{K}] = 0$, 任取 $m_1, m_2 \in \mathfrak{P}$, 使得 $[m_1, m_2] \neq 0$. 则有 $0 = [A,[m_1,m_2]] = 2\lambda[m_1,m_2]$. 这证明了 $\lambda = 0$. 所以 $[A,\mathfrak{P}] = 0$, $[A,\mathfrak{K}] = 0$, 即 $A \in \mathrm{C}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G})$. 由 $\mathfrak{G}$ 单且维数大于 1, 又推出矛盾. 至此证明了特征子代数 $\mathfrak{K}$ 半单.

最后证若 $\mathfrak{K}$ 的复表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{P}^C)$ 可约, 则特征子代数 $\mathfrak{K}$ 非半单. 设若不然, 则紧李代数 $\mathfrak{K}$ 半单. 由定理 2.3.8, 则 $\mathfrak{P}^C = V_1 + V_2$ 为极小复不变子空间直接和, 其中

$$V_1 = \{m + \sqrt{-1}Jm \mid \forall m \in \mathfrak{P}\},$$
$$V_2 = \{m - \sqrt{-1}Jm \mid \forall m \in \mathfrak{P}\}.$$

记 $\mathfrak{P} = (\mathfrak{P}^C, \zeta)$, 其中 ζ 为复线性空间 $\mathfrak{P}^C$ 上的半对合. 又对 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 的 Killing 型 $B(x,y)$, 由 B 在 $\mathfrak{K}$ 上负定, 在 $\mathfrak{P}$ 上正定. 因此 $B(x,\zeta(u))$, $\forall x,y \in \mathfrak{P}^C$ 为复线性空间 $\mathfrak{P}^C$ 上的内积, 且有 $V_2 = \zeta(V_1)$. 因此任取

$$m + \sqrt{-1}Jm \in V_1,\ m' - \sqrt{-1}Jm' \in V_2,$$

则

$$\begin{aligned}
&B(m + \sqrt{-1}Jm, \zeta(m' - \sqrt{-1}Jm')) \\
=&B(m + \sqrt{-1}Jm,\ m' + \sqrt{-1}Jm') \\
=&B(m,m') - B(Jm,Jm') + \sqrt{-1}(B(m,Jm') + B(Jm,m')) = 0,
\end{aligned}$$

所以 $B(m,m') = B(Jm,Jm')$, $\forall m,m' \in \mathfrak{P}$.

对实线性空间 $\mathfrak{P}$ 上的线性变换 J, 有 $J^2 = -\mathrm{id}$. 它扩充为实李代数 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 上的实线性变换, 使得 $J(\mathfrak{K}) = 0$. 我们来证 J 为实李代数 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 上的微分. 事实上, 由

$$[\mathfrak{K},\mathfrak{K}] \subset \mathfrak{K},\ [\mathfrak{K},\mathfrak{P}] \subset \mathfrak{P},\ [\mathfrak{P},\mathfrak{P}] \subset \mathfrak{K},$$

所以 $J[\mathfrak{P},\mathfrak{P}]=0$. 今 $J\mathrm{ad}\,k=(\mathrm{ad}\,k)J$ 在 $\mathfrak{P}$ 上成立，即有 $J[k,m]=[k,Jm]$, $\forall k\in\mathfrak{K}$, $m\in\mathfrak{P}$, 所以有

$$
\begin{aligned}
&J[k,m]=[Jk,m]+[k,Jm], \quad \forall k\in\mathfrak{K}, m\in\mathfrak{P},\\
&J[k_1,k_2]=[Jk_1,k_2]+[k_1,Jk_2], \quad \forall k_1,k_2\in\mathfrak{K}.
\end{aligned}
$$

今任取 $m_1,m_2\in\mathfrak{P}$, 则

$$
[m_1,m_2]-[Jm_1,Jm_2]\in\mathfrak{K},
$$

而任取 $k\in\mathfrak{K}$, 有

$$
\begin{aligned}
&B(k,[m_1,m_2]-[Jm_1,Jm_2])\\
=&-B([m_1,k],m_2)+B([Jm_1,k],Jm_2)\\
=&B([k,m_1],m_2)-B(J[k,m_1],Jm_2)=0.
\end{aligned}
$$

这证明了 $[Jm_1,Jm_2]=[m_1,m_2]$, 所以

$$
\begin{aligned}
&[Jm_1,m_2]+[m_1,Jm_2]=[Jm_1,m_2]-[J(Jm_1),J(m_2)]=0,\\
&J[m_1,m_2]=0.
\end{aligned}
$$

因此

$$
J[m_1,m_2]=[Jm_1,m_2]+[Jm_1,Jm_2].
$$

这证明了 J 为微分. 由于 $\mathfrak{G}$ 实半单，所以 $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$ 复半单. 已知 $\mathfrak{L}$ 上的微分为内微分，即存在 $X+\sqrt{-1}Y\in\mathfrak{L}$, 其中 $X,Y\in\mathfrak{G}$, 而 $J=\mathrm{ad}\,X+\sqrt{-1}\mathrm{ad}\,Y$. 但是 J 为实线性空间 $\mathfrak{G}$ 上的实线性变换，这证明了 $Y=0$. 所以存在 $X\in\mathfrak{G}$, 使得 $J=\mathrm{ad}\,X$. 今 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{M}$, 所以存在 $A\in\mathfrak{K}$, $B\in\mathfrak{P}$, 使得 $X=A+B$, $J=\mathrm{ad}\,A+\mathrm{ad}\,B$. 今 $J\mathfrak{K}=0$ 推出 $[A,\mathfrak{K}]+[B,\mathfrak{K}]=0$. 因此 $[A,\mathfrak{K}]=0$, $[B,\mathfrak{K}]=0$, 即 $A\in\mathrm{C}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$. 又 $B\in\mathrm{C}_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{K})$. 显然 $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{K})\mathrm{C}_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{K})=0$, 这证明了 $\mathrm{C}_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{K})$ 为 $\mathfrak{K}$ 的表示 $(\mathrm{ad},\mathfrak{P})$ 的不变子空间. 由于已证实表示 $(\mathrm{ad},\mathfrak{P})$ 不可约，且 $(\mathrm{ad},\mathfrak{P})$ 不是零表示，因此证明了 $\mathrm{C}_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{K})=0$, 即 $B=0$. 所以证明了 $J=\mathrm{ad}\,X$, 其中 $X\in\mathrm{C}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})\neq 0$, 换句话说，紧李代数 $\mathfrak{K}$ 不半单. 因此，若复表示 $(\mathrm{ad},\mathfrak{P}^C)$ 可约，则实李代数 $\mathfrak{K}$ 的中心 $\mathrm{C}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})\neq 0$.

我们来证当实李代数 $\mathfrak{K}$ 的复表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{P}^C)$ 不可约，则 $\mathfrak{K}$ 的中心为一维的. 事实上，若 $\dim C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K}) \geq 2$. 于是存在 $X, Y \in \mathfrak{K}$, X, Y 实线性无关，且 $[\mathrm{ad}\,\mathfrak{K}, \mathrm{ad}\,X] = 0$, $[\mathrm{ad}\,\mathfrak{K}, \mathrm{ad}\,Y] = 0$. 由 Schur 引理可知， $\mathrm{ad}\,X, \mathrm{ad}\,Y$ 都是实纯量线性变换. 这证明了存在 $Z \in C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$, 使得 $[Z, \mathfrak{P}] = 0$, 即 $Z \in C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G})$. 但是 $\mathfrak{G}$ 半单，所以推出矛盾. 定理证完.

为了给出 Hermite 对称空间的分类，由第五章可知，这类对称空间只和定理 2.3.15 的情形 (2) 有关. 我们来证明

定理 2.3.16 设实单李代数 $\mathfrak{G}$ 的维数大于 1, $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 为其 Cartan 分解. 设紧李代数 $\mathfrak{K}$ 的复表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{P}^C)$ 可约，则 $\mathfrak{G}$ 关于 Cartan 分解的最大紧 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_c \subset \mathfrak{K}$.

证 记 $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_c + \mathfrak{H}_v$ 为实单李代数 $\mathfrak{G}$ 关于 Cartan 分解 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 的最大紧 Cartan 子代数，其中 $\mathfrak{H}_c$ 为紧李代数 $\mathfrak{K}$ 的 Cartan 子代数. 由定理 2.3.15, 在 $\mathfrak{K}$ 中有一维中心，其中取基 Z, 则有 $[Z, \mathfrak{K}] = 0$. 考虑 $\mathfrak{P}$ 中子空间

$$\mathfrak{P}_0 = \{m \in \mathfrak{P} \mid [Z, m] = 0\},$$

于是 $\mathfrak{H}_v \subset \mathfrak{P}_0$. 今 $\mathfrak{P}_0$ 为紧李代数 $\mathfrak{K}$ 的表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{P})$ 的不变子空间. 事实上，任取 $m \in \mathfrak{P}_0$, 由 $[Z, m] = 0$, 所以任取 $k \in \mathfrak{K}$, 有

$$[Z, [k, m]] = [[Z, k], m] + [k, [Z, m]] = 0.$$

这证明了 $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{K})\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_0$. 由定理 2.3.15 的第一个断言可知表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{P})$ 不可约. 所以 $\mathfrak{P}_0 = 0$, 即 $\mathfrak{H}_v = 0$, $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_c \subset \mathfrak{K}$. 或者 $\mathfrak{P}_0 \neq 0$, $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{P}$. 即 $[Z, \mathfrak{P}] = 0$. 这证明了 $Z \in C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}) = 0$, 即导出矛盾. 至此证明了在定理条件下，最大紧 Cartan 子代数为特征子代数的 Cartan 子代数. 定理证完.

下面只考虑这种实单李代数 $\mathfrak{G}$ 的分类，使得 $\mathfrak{G}$ 有 Cartan 分解 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$, 且 $\mathfrak{K}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0$ 为 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数，又 $\dim C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K}) = 1$. 令相伴紧形式 $\mathfrak{G}_c = \mathfrak{K} + \sqrt{-1}\mathfrak{P}$. 复化 $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C$ 有 $\mathfrak{G} = (\mathfrak{L}, \sigma)$, $\mathfrak{G}_c = (\mathfrak{L}, \tau)$, 且 $\theta = \sigma\tau = \tau\sigma$ 为 Cartan 对合. 记 Δ_c

为 $\mathfrak{K}^C$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0$ 的根系，即

$$\mathfrak{K}^C = \mathfrak{H}_0^C + \sum_{\alpha\in\Delta_c} \mathfrak{L}_\alpha.$$

由 $[\mathfrak{K},\mathfrak{P}]\subset\mathfrak{P}$, $\mathfrak{H}_0\subset\mathfrak{K}$ 可知

$$(\mathfrak{P})^C = (\sqrt{-1}\mathfrak{P})^C = \sum_{\alpha\in\Delta_v} \mathfrak{L}_\alpha,$$

其中 Δ_c 为紧根系， Δ_v 为非紧根系. 又

$$\Delta_c\cup\Delta_v = \Delta, \qquad \Delta_c\cap\Delta_v = \emptyset.$$

再 $\mathfrak{H}_R = \sqrt{-1}\mathfrak{H}_0$, 而且

$$\mathfrak{K}+\sqrt{-1}\mathfrak{P} = \sqrt{-1}\mathfrak{H}_R + \sum_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}(e_\alpha - e_{-\alpha}) + \sum_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}\sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha}).$$

所以

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K} &= \sqrt{-1}\mathfrak{H}_R + \sum_{\alpha\in\Delta_c}\mathbb{R}(e_\alpha - e_{-\alpha}) + \sum_{\alpha\in\Delta_c}\mathbb{R}\sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha}),\\
\mathfrak{P} &= \sum_{\alpha\in\Delta_v}\mathbb{R}\sqrt{-1}(e_\alpha - e_{-\alpha}) + \sum_{\alpha\in\Delta_v}\mathbb{R}(e_\alpha + e_{-\alpha}).
\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G} = \sqrt{-1}\mathfrak{H}_R &+ \sum_{\alpha\in\Delta_c}\mathbb{R}(e_\alpha - e_{-\alpha}) + \sum_{\alpha\in\Delta_c}\mathbb{R}\sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha})\\
&+ \sum_{\alpha\in\Delta_v}\mathbb{R}(e_\alpha + e_{-\alpha}) + \sum_{\alpha\in\Delta_v}\mathbb{R}\sqrt{-1}(e_\alpha - e_{-\alpha}).
\end{aligned}$$

又由 $\mathfrak{H}_R = \sqrt{-1}\mathfrak{H}_0$ 可知 $\sigma(h_\alpha) = -h_\alpha$, $\tau(h_\alpha) = -h_\alpha$, $\forall\alpha\in\Delta$, 因此

$$\theta(h_\alpha) = h_\alpha, \quad \forall\alpha\in\Delta.$$

今 $\mathfrak{K}$ 为紧李代数，有一维中心，所以

$$\mathfrak{K} = C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K}) + [\mathfrak{K},\mathfrak{K}]$$

为理想直接和，其中 $[\mathfrak{K},\mathfrak{K}]$ 紧半单．而 $\mathfrak{K}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0 \supset C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$，所以 $\mathfrak{H}_0 \cap [\mathfrak{K},\mathfrak{K}] = \mathfrak{H}_1$ 为紧半单李代数 $[\mathfrak{K},\mathfrak{K}]$ 的 Cartan 子代数，它的维数 $\dim \mathfrak{H}_1 = \dim \mathfrak{H} - 1$．又

$$[\mathfrak{K},\mathfrak{K}]^C = \sqrt{-1}\mathfrak{H}_1 + \sum_{\alpha\in\Delta_c} \mathfrak{L}_\alpha.$$

由此可见，$C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$ 的元素 Z 有 $\alpha(Z)=0,\ \forall\alpha\in\Delta_c$，即 $B(h_\alpha,Z)=0,\ \forall\alpha\in\Delta_c$．这里 B 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型，它在 $\mathfrak{K}$ 上负定，在 $\mathfrak{P}$ 上正定．

我们如下确定正方向．先取 $0\neq Z_0\in C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$，则 $\sqrt{-1}Z_0\in\sqrt{-1}\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}_R$．再在 $\sqrt{-1}\mathfrak{H}_1$ 中取定基，于是在根系 Δ 中决定了一个单根系 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$，其中 $e_1=e_{\alpha_1}\in\mathfrak{P}^C$，$e_i=e_{\alpha_i}\in\mathfrak{K}^C$，$2\le i\le l$．所以

$$\Pi_1=\{\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$$

为紧半单李代数 $[\mathfrak{K},\mathfrak{K}]$ 的复化关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_1^C$ 的根系 Δ_c(即紧根系) 的单根系．这证明了

$$\Delta_c=\{\pm\sum_{i=2}^{l} m_i\alpha_i \mid m_2,\cdots,m_l\text{为非负整数}\}\cap\Delta.$$

我们来证

$$\Delta_v=\{\pm(\alpha_1+\sum_{i=2}^{l} m_i\alpha_i) \mid m_2,\cdots,m_l\text{为非负整数}\}\cap\Delta.$$

事实上，任取 $\alpha\in\Delta_v^+$，则在根系 Δ 中存在正根序列

$$\alpha_{i_1},\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_s}=\alpha.$$

于是

$$f_1=e_{i_1},f_{12}=[e_{i_1},e_{i_2}],\cdots,f_{12\cdots t}=[[e_{i_1},e_{i_2}],\cdots,e_{i_t}],\quad 1\le t\le s$$

为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的非零元素．由

$$[\mathfrak{K},\mathfrak{K}]\subset\mathfrak{K},\ [\mathfrak{K},\mathfrak{P}]\subset\mathfrak{P},\ [\mathfrak{P},\mathfrak{P}]\subset\mathfrak{K}$$

可知，若 $2 \leq i_1, \cdots, i_{t-1} \leq l$, $i_t = 1$, 则 $f_1, \cdots, f_{t-1} \in \mathfrak{K}^C$, $f_t \in \mathfrak{P}^C$. 若 $i_1, \cdots, i_t, i_{t+1}, \cdots, i_p$ 中出现两个 1, 则 $f_{12\cdots p} \in \mathfrak{K}^C$. 由此可知, $\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_p} \in \Delta_c$. 由 Δ_c 的表达式便导出矛盾. 至此证明了指标 $i_1, \cdots, i_s$ 中恰好出现一个指标 $i_j = 1$, 即给出了非紧根系 Δ_v 的表达式. 所以我们证明了

定理 2.3.17 设 $\mathfrak{G}$ 为实单李代数, 维数大于 1. 设 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 为 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 分解, 使得特征子代数 $\mathfrak{K}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0$ 为 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数, 且 $\mathfrak{K}$ 的中心为一维子代数. 则在 $\sqrt{-1}\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_R$ 中存在一组基, 使得由此确定的单根系 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 有 $\Pi_1 = \{\alpha_2, \cdots, \alpha_l\}$ 为紧半单李代数 $[\mathfrak{K}, \mathfrak{K}]$ 的复化的单根系, 且紧根系为

$$\Delta_c = \{\pm \sum_{i=2}^{l} m_1 \alpha_1 \mid \forall m_2, \cdots, m_l \text{为非负整数}\} \cap \Delta,$$

非紧根系为

$$\Delta_v = \{\pm(\alpha_1 + \sum_{i=2}^{l} m_1 \alpha_i) \mid \forall m_2, \cdots, m_l \text{为非负整数}\} \cap \Delta,$$

且

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{H}_0 + \sum_{\alpha \in \Delta_c} \mathbb{R}(e_\alpha - e_{-\alpha}) + \sum_{\alpha \in \Delta_c} \mathbb{R}\sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha}),$$

$$\mathfrak{P} = \sum_{\alpha \in \Delta_v} \mathbb{R}(e_\alpha + e_{-\alpha}) + \sum_{\alpha \in \Delta_v} \mathbb{R}\sqrt{-1}(e_\alpha - e_{-\alpha}),$$

又 $\Delta_v \cap \Delta_c = \emptyset$, $\Delta_v \cup \Delta_c = \Delta$.

进一步, 我们来证明

定理 2.3.18 条件同上定理. 则 Cartan 对合 $\theta = \exp \operatorname{ad} Z_0$, 其中 Z_0 为 $C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$ 中唯一的非零元素, 使得

$$B(h_i, Z_0) = 0, \quad 2 \leq i \leq l, \quad B(h_1, Z_0) = -\sqrt{-1}\pi.$$

证 令 Cartan 对合 θ 有 $\theta|_{\mathfrak{K}} = \mathrm{id}$, $\theta|_{\mathfrak{P}} = -\mathrm{id}$. 又 $\theta|_{\mathfrak{H}_R} = \theta|_{\sqrt{-1}\mathfrak{H}_0} = \mathrm{id}$, 所以 θ 诱导了对偶空间 $\mathfrak{H}_R^*$ 的线性同构, 仍记作 θ, 则有 $\theta|_{\mathfrak{H}_R^*} = \mathrm{id}$. 于是 $\theta(e_\alpha) = \nu_\alpha e_\alpha$. 由于 θ 为对合自同构, 即有 $\theta^2 = \mathrm{id}$, 因此 $\nu_\alpha = \pm 1$, 且由 $\theta|_{\mathfrak{K}} = \mathrm{id}$, $\theta|_{\mathfrak{P}} = -\mathrm{id}$ 可知

$$\theta(e_\alpha) = e_\alpha,\ \forall\, \alpha \in \Delta_c, \quad \theta(e_\alpha) = -e_\alpha,\ \forall\, \alpha \in \Delta_v.$$

令唯一存在 $X \in \mathfrak{H}_0$, 使得

$$B(h_i, X) = 0, \quad 2 \le i \le l, \quad B(h_1, X) = -\sqrt{-1}\pi.$$

于是记 $\theta_0 = \exp \mathrm{ad}\, X$, 则有 $\theta_0|_{\mathfrak{H}_R} = \mathrm{id}$, 又

$$\begin{aligned} \theta_0(e_i) &= \exp\left(B(X, \alpha_i)\right)e_i = e_i, \quad 2 \le i \le l, \\ \theta_0(e_1) &= \exp\left(B(X, \alpha_1)\right)e_i = \exp\left(-\sqrt{-1}\pi\right)e_1 = -e_1. \end{aligned}$$

因为复半单李代数由 $\mathfrak{H}_0$ 及 e_i, $1 \le i \le l$ 生成, 这证明了 $\theta_0 = \theta$. 另一方面, 由 $[X, e_i] = B(\alpha_i, X)e_i = 0$, $2 \le i \le l$ 可知 $[X, e_\alpha] = 0$, $\forall\, \alpha \in \Delta_c$. 显然 $[X, \mathfrak{H}_0] = 0$. 这证明了 $X \in C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$. 定理证完.

令

$$\mathfrak{P}^C = \sum_{\alpha \in \Delta_v} \mathfrak{L}_\alpha = \sum_{\alpha \in \Delta_v^+} \mathfrak{L}_\alpha + \sum_{\alpha \in \Delta_v^+} \mathfrak{L}_{-\alpha},$$

由 Δ_v 的表达式立即有

$$[\mathfrak{K}, \sum_{\alpha \in \Delta_v^+} \mathfrak{L}_\alpha] \subset \sum_{\alpha \in \Delta_v^+} \mathfrak{L}_\alpha, \quad [\mathfrak{K}, \sum_{\alpha \in \Delta_v^+} \mathfrak{L}_{-\alpha}] \subset \sum_{\alpha \in \Delta_v^+} \mathfrak{L}_{-\alpha}.$$

这证明了特征子代数 $\mathfrak{K}$ 的复表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{P}^C)$ 为至少两个不可约子表示的直接和. 由定理 2.3.15 可知特征子代数 $\mathfrak{K}$ 的复表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{P}^C)$ 为两个不可约复表示的直接和, 即记

$$(\mathfrak{P}^C)_\pm = \sum_{\alpha \in \Delta_v^\pm} \mathfrak{L}_\alpha,$$

则

$$\mathfrak{P}^C = (\mathfrak{P}^C)_+ + (\mathfrak{P}^C)_-$$

为极小复不变子空间直接和，且有

$$[(\mathfrak{P}^C)_+,(\mathfrak{P}^C)_+]=[(\mathfrak{P}^C)_-,(\mathfrak{P}^C)_-]=0,\quad [(\mathfrak{P}^C)_+,(\mathfrak{P}^C)_-]\subset\mathfrak{K}^C.$$

又复半单李代数 $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$ 的 Killing 型 $B(x,y)$ 有

$$B((\mathfrak{P}^C)_+,(\mathfrak{P}^C)_+)=B((\mathfrak{P}^C)_-,(\mathfrak{P}^C)_-)=0.$$

不可约表示 $\sum\limits_{\alpha\in\Delta_v^+}\mathfrak{L}_\alpha$ 的权系为 Δ_v^+，它的最高权为根系 Δ 的最高根；不可约表示 $\sum\limits_{\alpha\in\Delta_v^-}\mathfrak{L}_\alpha$ 的权系为 $\Delta_v^-=-\Delta_v^+$. 它的最高权为 $-\alpha_1$. 因此这两个表示互相不等价.

引理 2.3.19 复单李代数的最高根为

$A_l:\quad \varphi=\alpha_1+\cdots+\alpha_l;$

$B_l:\quad \varphi=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_l;$

$C_l:\quad \varphi=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_l;$

$D_l:\quad \varphi=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_{l-2}+\alpha_{l-1}+\alpha_l;$

$G_2:\quad \varphi=2\alpha_1+3\alpha_2;$

$F_4:\quad \varphi=2\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4;$

$E_6:\quad \varphi=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+2\alpha_6;$

$E_7:\quad \varphi=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+3\alpha_5+2\alpha_6+2\alpha_7;$

$E_8:\quad \varphi=2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+5\alpha_4+6\alpha_5+4\alpha_6+2\alpha_7+3\alpha_8.$

由定理 2.3.17 可知，只有情形 A_l,B_l,C_l,D_l,E_6,E_7 这六种情形才有可能适合条件. 由直接计算可给出特征子代数的结构如下：

定理 2.3.20 条件同定理 2.3.17, 则

(1) A_l:

$$\varphi = \alpha_1 + \cdots + \alpha_l,$$
$$\mathfrak{K} \cong T + (A_{i-1})_c + (A_{l-i})_c, \quad i = 1, 2, \cdots, \left[\frac{l+1}{2}\right];$$

(2) B_l:

$$\varphi = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_l,$$
$$\mathfrak{K} = T + (B_{l-1})_c;$$

(3) C_l:

$$\varphi = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_l,$$
$$\mathfrak{K} = T + (A_{l-1})_c;$$

(4) D_l:

$$\varphi = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l,$$
$$\mathfrak{K} = T + (D_{l-1})_c \quad 或 \quad \mathfrak{K} = T + (A_{l-1})_c;$$

(5) E_6:

$$\varphi = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6,$$
$$\mathfrak{K} = T + (D_5)_c;$$

(6) E_7:

$$\varphi = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7,$$
$$\mathfrak{K} = T + (E_6)_c,$$

其中 $(P_i)_c$ 表示复单李代数 P_i 的紧实形式.

证 在形式 (1), 取现在的 α_i 为定理 2.3.17 的 α_1, $i \in \{1, 2, \cdots, \frac{l+1}{2}\}$. 在情形 (2) 及 (3), α_1 的选取是确定的. 在情形 (4), 取现在的 α_1 为定理 2.3.17 的 α_1, 则有 $\mathfrak{K} = T + (D_{l-1})_c$. 取现在的 α_{l-1} 或 α_l 为 α_1, 则有 $\mathfrak{K} = T + (A_{l-1})_c$. 在情形 (5), 取现在的 α_1 或 α_5 为 α_1, 都有 $\mathfrak{K} = T + (D_5)_c$. 情形 (6) 中 α_1 的选取是确定的. 证完.

至此, 我们给出了分类. 至于实现, 将放在第六章讨论. 当然, 利用定理 2.3.17 及复单李代数的实现, 我们也能给出上面所讨论的这类实单李代数的实现.

第三章　李群理论

在这一章中，我们介绍李群、李变换群及齐性空间的基本概念.

§ 3.1　李群的基本概念

为了引进李群的定义，先给出实 (或复) 解析流形的定义和基本性质.

定义 3.1.1　取定自然数 m, 设 U 为 **Hausdorff 拓扑空间** M 中的开集，φ 为 U 到实 (或复)Euclid 空间 $\mathbb{R}^m$(或 $\mathbb{C}^m$) 中的同胚，则 U 称为 **坐标邻域**,φ 称为 **坐标系**, (U,φ) 称为 **标架**. 对开集 U 中任一点 p, $\varphi(p)=x=(x_1,\cdots,x_m)$ 称为点 p 的 **坐标**. 为方便起见，我们有时用 x 来记 p.

定义 3.1.2　取定自然数 m, 设 Hausdorff 拓扑空间 M 中有开覆盖 $\{U\}$, 使得对开覆盖中所有开子集 U, 有标架 (U,φ_v). 且任取两标架 (U,φ), (V,ψ), 只要 $U\cap V\neq\emptyset$, 若 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 及 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 分别在 $\varphi(U\cap V)$ 及 $\psi(U\cap V)$ 上实 (或复) 解析，则 M 称为由 **标架覆盖**$\mathfrak{S}=\{(U,\varphi_u)\mid\cup U=M\}$ 定义的 m 维 **实(或 复)解析流形**, 简称为 **实(或 复) 流形**.

定义 3.1.3　设流形 M 由标架覆盖 $\mathfrak{S}=\{(U,\varphi)\}$ 定义. 流形 M 中的标架 (O,ζ) 称为 **可容许标架**, 如果任取 $(U,\varphi)\in\mathfrak{S}$, 只要 $U\cap O\neq\emptyset$, 则 $\zeta\circ\varphi^{-1}$ 及 $\varphi\circ\zeta^{-1}$ 分别在 $\varphi(U\cap O)$ 及 $\zeta(U\cap O)$ 上实 (或复) 解析.

将所有可容许标架添加到标架覆盖 $\mathfrak{S}$ 中，得到的最大可容许标架覆盖称为流形 M 的 **解析结构**.

今后在给定流形后，所有标架都是指可容许标架．设 (U,φ) 为 (可容许) 标架，任取 $p\in U$，则 (U,φ) 也是点 p 的标架．

定义 3.1.4 设 M 和 N 分别为 m 维及 n 维实 (或复) 流形，M 到 N 内的连续映射 η 称为 **实(或复)解析映射**，如果任取 $p\in M$，则对流形 N 中点 $\eta(p)$ 的任一标架 (V,ψ)，存在点 p 的标架 (U,φ)，使得 $\eta(U)\subset V$，且

$$\psi\circ\eta\circ\varphi^{-1}:\quad \varphi(U)\longrightarrow\psi(V)$$

为到内的解析映射．

若 $m=n$，且 η 为流形 M 到 N 上的同胚映射，使得 η 及 η^{-1} 都是解析映射，则称 η 为 **双解析同胚**，或简称为 **解析同构**．

按习惯，在实流形情形称为 **解析同构**，在复流形情形称为 **全纯同构**．显然，解析同构为等价关系．解析流形理论的根本问题是在解析同构下的分类问题；全纯同构也为等价关系．复流形理论的根本问题是在全纯同构下的分类问题

定义 3.1.5 设 M 和 N 分别为 m 维及 n 维流形 (同时为实流形或同时为复流形)，且 N 为 M 中的子集，使得恒等映射 $\mathrm{id}: N\to M$ 为解析映射，且其 Jacobian 在 N 上点点满秩，则 N 称为流形 M 的 **子流形**．

由子流形的定义可知 $n\le m$．下面在子流形 N 中任一点附近来描述子流形和流形间的关系．任取 $p\in N$，作为 M 中点，任取点 p 的标架 (V,ψ)，则在流形 N 中存在点 p 的标架 (U,φ)，使得 $U\subset V$．对 U 中任一点 q，设点 q 作为 N 中点，在标架 (U,φ) 下的坐标为 $x=(x_1,\cdots,x_n)=\varphi(q)$，$q$ 作为 M 中点，在标架 (V,ψ) 下的坐标为 $y=(y_1,\cdots,y_m)=\psi(q)$．则恒等映射 id 的解析表达式为

$$\begin{aligned}y_1&=f_1(x_1,\cdots,x_n),\\&\cdots\\y_m&=f_m(x_1,\cdots,x_n),\end{aligned}$$

其中 $f_1,\cdots,f_m$ 在 $\varphi(U)$ 上解析，又 Jacobian 为

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

由 $U\subset V$ 可知 $n\leq m$. 所以 $\operatorname{rank}(\dfrac{\partial y}{\partial x})=n,\ \forall x\in\varphi(U)$.

本书约定在计算 Jacobian 时，上标总表示行，下标总表示列.

引理 3.1.6 符号同上. 设流形 $N\subset M$ 为流形 M 的子流形. 任取 $p\in N$, 则存在点 p 在流形 N 中的标架 (U,φ) 及在流形 M 中的标架 (V,ψ), 使得 $U\subset V$, 且

$$\varphi(U)=\{(y_1,\cdots,y_n)\mid |y_1|<\varepsilon,\cdots,|y_m|<\varepsilon\},$$
$$\psi(U)=\{(y_1,\cdots,y_n,\ 0,\cdots,0)\mid |y_1|<\varepsilon,\cdots,|y_m|<\varepsilon\}.$$

即 $\varphi(U)$ 为 $\mathbb{R}^m$(或 $\mathbb{C}^m$) 中的开子集 $\psi(V)$ 与超平面

$$y_{n+1}=0,\cdots,y_m=0$$

的截面.

证 由子流形的定义，可知 Jacobian $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ 的秩为 n. 考虑流形 M 中标架 (V,ψ) 的坐标的次序，于是无妨缩小 U 及 V, 使得

$$\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}\neq 0,\quad \forall\ |x_1|<\varepsilon_1,\cdots,|x_n|<\varepsilon_1,$$

其中 $\varphi(U)=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid |x_1|<\varepsilon_1,\cdots,|x_n|<\varepsilon_1\}$. 由隐函数存在定理，所以无妨设存在 $\varepsilon_2>0$, 使得当 $|y_1|<\varepsilon_2,\cdots,|y_n|<\varepsilon_2$ 时，有

$$x_1=g_1(y_1,\cdots,y_n),$$
$$\cdots$$
$$x_n=g_n(y_1,\cdots,y_n),$$

其中 $g_1,\cdots,g_n$ 在 $\psi(U)$ 中解析. 所以 $(y_1,\cdots,y_n)\to(x_1,\cdots,x_n)$ 为解析同构. 因此在流形 N 中存在点 p 的可容许标架, 使得

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}=\delta_{ij},\ 1\le i,j\le n.$$

而且恒等映射 $\mathrm{id}: N\to M$ 的坐标表达式为

$$\begin{aligned}&y_i=x_i,\ 1\le i\le n,\\&y_{n+i}=f_{n+i}(x_1,\cdots,x_n),\ i=1,2,\cdots,m-n.\end{aligned}$$

又在流形 M 中存在点 p 的可容许标架 (U,φ),U 中的点坐标为

$$(z_1,\cdots,z_m),\quad |z_1|<\varepsilon_2,\cdots,|z_m|<\varepsilon_2,$$

使得

$$\begin{aligned}&z_i=y_i,\ 1\le i\le n,\\&z_{n+i}=y_{n+i}-f_{n+i}(y_1,\cdots,y_n),\ 1\le i\le m-n.\end{aligned}$$

所以子流形 N 中有点 p 的标架 (U,φ) 及流形 M 中有点 p 的标架 (V,ψ), 使得 $\mathrm{id}: N\to M$ 在 U 上的坐标表达式为

$$\begin{aligned}&y_i=x_i,\ 1\le i\le n,\\&y_{n+i}=0,\ 1\le i\le m-n,\end{aligned}$$

其中 $|x_1|<\varepsilon,\cdots,|x_n|<\varepsilon$. 证完.

注意, 子流形 N 本身作为 Hausdorff 拓扑空间, 它不一定是 Hausdorff 拓扑空间 M 的诱导拓扑. 我们有

定义 3.1.7 设 N 为 m 维流形 M 的子流形, N 称为 M 的正则子流形, 如果 N 的拓扑为 M 的诱导拓扑.

为了进一步研究流形, 需要引进张量场以及研究张量场在解析映射下的改变, 其目的在于寻找流形在解析同构下的不变量.

定义 3.1.8 设 M 为实 (或复) 流形, M 到 $\mathbb{R}$(或 $\mathbb{C}$) 内的映射 f 称为流形 M 上的 **解析函数**, 如果在流形 M 中任取可容许标架 (U,φ), 则 $f\circ\varphi^{-1}$ 为 $\varphi(U)$ 上的解析函数.

显然，流形 M 上的所有解析函数构成的函数空间 $\mathfrak{F}(M)$ 为无限维线性空间，且在函数的普通乘法下构成结合代数.

设 σ 为流形 M 到 N 上的解析映射. 于是任取 $f \in \mathfrak{F}(N)$, 则 $f \circ \sigma \in \mathfrak{F}(M)$. 所以我们定义了线性空间 $\mathfrak{F}(N)$ 到 $\mathfrak{F}(M)$ 内的映射

$$\sigma^*: \quad f \to f \circ \sigma, \quad \forall f \in \mathfrak{F}(N).$$

显然 σ^* 为结合代数的同态，且 $\sigma^*(\mathfrak{F}(N))$ 为 $\mathfrak{F}(M)$ 中的结合子代数. 由 $\sigma(M) = N$ 可知同态核为零，所以 σ^* 实际上是结合代数 $\mathfrak{F}(N)$ 到 $\mathfrak{F}(M)$ 内的结合代数同构.

下面给出坐标表达式. 令对流形 M 中的点 p, 则 $\sigma(p) \in N$. 对流形 N 中点 $\sigma(p)$ 的标架 (V, ψ), 则存在流形 M 中点 p 的标架 (U, φ), 使得 $\sigma(U) \subset V$.

设点 p 的坐标为 x, $\sigma(p)$ 的坐标为 y, 则有 $\sigma: y = F(x)$, 其中 $F(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$ 在 $\varphi(U)$ 上解析. 任取 $f \in \mathfrak{F}(N)$, 则

$$f = f(y_1, \cdots, y_m) = f(y) = f(F(x)) = g(x).$$

所以映射 σ^* 的坐标表达式为 $\sigma^*(f) = g$.

特别地，当 σ 为流形 M 到 N 上的解析同构时， $\sigma^*(\mathfrak{F}(N)) = \mathfrak{F}(M)$, 且 $(\sigma^{-1})^* = (\sigma^*)^{-1}$.

定义 3.1.9 设 M 为流形， $\mathfrak{F}(M)$ 为流形 M 上的解析函数空间， $\mathfrak{F}(M)$ 上的线性算子 X 称为 **向量场**, 如果

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg), \quad \forall\ f, g \in \mathfrak{F}(M).$$

换句话说，向量场是结合代数 $\mathfrak{F}(M)$ 上的 **微分算子**.

引理 3.1.10 流形上的所有向量场构成线性空间，在换位运算

$$[X, Y] = XY - YX$$

下构成无限维李代数，记作 $T(M)$.

证 今任取 $X,Y\in T(M)$, $f,g\in\mathfrak{F}(M)$, 则有

$$\begin{aligned}[X,Y](fg)&=(XY-YX)(fg)\\&=X(Y(fg))-Y(X(fg))\\&=X(gYf+fYg)-Y(gXf+fXg)\\&=(Xg)Yf+gXYf+(Xf)Yg+fXYg\\&\quad-(Yg)Xf-gYXf-(Yf)Xg-fYXg\\&=f[X,Y]g+g[X,Y]f.\end{aligned}$$

这证明了 $[X,Y]\in T(M)$. 证完.

任取流形 M 到 N 上的解析映射, 任取 $f\in\mathfrak{F}(N)$, 则 $\sigma^*(f)=f\circ\sigma\in\mathfrak{F}(M)$. 今任取 $X\in T(M)$, 则 $X(\sigma^*(f))\in\mathfrak{F}(M)$. 于是 $(X\circ\sigma^*)\mathfrak{F}(N)\subset\mathfrak{F}(M)$. 今 $\sigma^*:\mathfrak{F}(N)\to\mathfrak{F}(M)$ 为到内的同构. 考虑 $\mathfrak{F}(M)$ 中结合子代数 $\sigma^*(\mathfrak{F}(N))$, 则在 $\sigma^*(\mathfrak{F}(N))$ 上有结合代数同构 $(\sigma^*)^{-1}:\sigma^*(\mathfrak{F}(N))\to\mathfrak{F}(N)$. 假设 $X(\sigma^*(\mathfrak{F}(N)))\subset\sigma^*(\mathfrak{F}(N))$, 则有 $(\sigma^*)^{-1}X\sigma^*:\mathfrak{F}(N)\to\mathfrak{F}(N)$. 记 $Y=(\sigma^*)^{-1}X\sigma^*$, 我们有 $Y\in T(N)$. 事实上, 任取 $f,g\in\mathfrak{F}(N)$, 则

$$\begin{aligned}Y(fg)&=(\sigma^*)^{-1}X\sigma^*(fg)=(\sigma^*)^{-1}X(f\circ\sigma)(g\circ\sigma)\\&=(\sigma^*)^{-1}((f\circ\sigma)X(g\circ\sigma)+(g\circ\sigma)X(f\circ\sigma))\\&=f((X(g\circ\sigma))\sigma^{-1})+g((X(f\circ\sigma))\sigma^{-1})=fYg+gYf.\end{aligned}$$

这证明了断言. 我们称适合条件 $X(\sigma^*(\mathfrak{F}(N))\subset\sigma^*(\mathfrak{F}(N))$ 的向量场 $X\in T(M)$ 为关于解析映射 σ 的**可容许向量场**. 而 $Y=(\sigma^*)^{-1}X(\sigma^*)$ 记作 $Y=\sigma_*(X)$.

由坐标表达式, 我们可以清楚地看出可容许向量场的含义. 事实上, 任取 $X\in T(M)$, 在局部坐标系 (U,φ) 中可表示为

$$X=\sum_{i=1}^m a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

其中 $a_1(x),\cdots,a_m(x)$ 在 $\varphi(U)$ 中解析. 记 $\sigma:y=f(x)$, 则

$$\sigma_*(X)=\sum_{i=1}^m a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^m a_i(x)\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j}=\sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial}{\partial y_j}.$$

注意到函数 $b_1(x),\cdots,b_n(x)$ 在 $\varphi(U)$ 上解析，但是 σ 不一定是解析同构，所以 $b_1(x),\cdots,b_n(x)$ 不一定能写成坐标 y 的解析函数. 所谓可容许向量场，即存在 y 的解析函数 $c_1(y),\cdots,c_n(y)$, 使得

$$c_j(y)=c_j(f(x))=b_j(x),\quad 1\leq j\leq n.$$

所以

$$\sigma_*(\sum_{i=1}^m a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i})=\sum_{j=1}^n c_j(y)\frac{\partial}{\partial y_j}.$$

由此可见，当 σ 为 m 维流形 M 到 N 上的解析同构，即 $\sigma: y=f(x)$, $\sigma^{-1}: x=g(y)$ 都解析时，任意向量场都是可容许向量场.

引理 3.1.11 设 σ 为流形 M 到 N 上的解析映射，则关于 σ 的可容许向量场全体构成无限维李代数 $T(M)$ 的子代数，且 σ_* 为李代数同态.

证 今若 X,Y 为可容许向量场，即有

$$X(\sigma^*(\mathfrak{F}(N)))\subset\sigma^*(\mathfrak{F}(N)),\quad Y(\sigma^*(\mathfrak{F}(N)))\subset\sigma^*(\mathfrak{F}(N)).$$

显然，任取 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$(或 $\mathbb{C}$), 则 $(\lambda X+\mu Y)(\sigma^*(\mathfrak{F}(N)))\subset\sigma^*(\mathfrak{F}(N))$, 又 $[X,Y](\sigma^*(\mathfrak{F}(N)))\subset\sigma^*(\mathfrak{F}(N))$. 这证明了前一断言.

再由 $\sigma_*(X)=(\sigma^*)^{-1}X(\sigma^*)$, 所以

$$\begin{aligned}\sigma_*([X,Y])&=(\sigma^*)^{-1}(XY-YX)\sigma^*\\&=((\sigma^*)^{-1}X(\sigma^*))((\sigma^*)^{-1}Y(\sigma^*))\\&\quad-((\sigma^*)^{-1}Y(\sigma^*))((\sigma^*)^{-1}X(\sigma^*))\\&=[\sigma_*(X),\sigma_*(Y)].\end{aligned}$$

引理证完.

设 M 为流形，取定点 $p\in M$, 任取含点 p 的标架 (U,φ) 及 (V,ψ). $U\cap V$ 上的两解析函数 f,g 如果有 $f=g$, 则称 f 和 g 等价，记作 $f\sim g$. 考虑所有点 p 的标架 (U,φ) 及 U 上的解析函数，于是在等价关系下分成等价类，记作 $\mathfrak{F}_p(M)$. 显然， $\mathfrak{F}_p(M)$ 为结合代数. 对 $\mathfrak{F}_p(M)$ 上的线性算子 X_p, 若有 $X_p(\widetilde{f}\widetilde{g})=\widetilde{f}X_p\widetilde{g}+$

$\widetilde{g}X_p\widetilde{f}$, $\forall\,\widetilde{f},\widetilde{g}\in\mathfrak{F}_p(M)$, 则 X_p 称为点 p 的切向量. 它们全体构成点 p 的切空间 $T_p(M)$. 显然, $\dim T_p(M)=\dim M$.

显然有 $X\in T(M)$, 则 $X|_p\in T_p(M)$, 且显然有

引理 3.1.12 设 M 为流形, 则 $X\in T(M)$, 当且仅当 $X|_p\in T_p(M)$, $\forall\,p\in M$, 且 $p\to X_p$ 在 M 上解析.

用坐标来表达可知, 取定点 $p\in M$ 的标架 (U,φ), 记点 p 的坐标为 $x_0=\varphi(p)$, 则

$$T_p(M)=\Big\{\ \sum_{i=1}^{m}a_i\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_{x_0}\ |\ \forall\,(a_1,\cdots,a_m)\in\mathbb{R}^m\ (\text{或}\ \mathbb{C}^m)\ \Big\}.$$

定义 3.1.13 记 $T(M)$ 为流形 M 上的所有向量场构成的无限维结合代数. $T(M)$ 上的线性函数称为 **1- 形式** 或 **一阶共变张量场**. 它们的全体构成线性空间 $T(M)$ 的对偶空间 $T(M)^*$, 改记为 $\wedge(M)$.

下面用坐标来刻画 1- 形式. 在流形 M 上取定一个标架 (U,φ). 对 U 中点的坐标 x, 有 $\dfrac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x_m}$, 于是有 $\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_m$, 它定义为

$$\mathrm{d}x_i(\frac{\partial}{\partial x_j})=\delta_{ij},\quad 1\le i,j\le m.$$

则 1- 形式的表达式为

$$\sum_{i=1}^{m}a_i(x)\mathrm{d}x_i,$$

其中 $a_1(x),\cdots,a_m(x)$ 在 $\varphi(U)$ 上解析.

定义 3.1.14 关于 $T(M)$ 为 r 重线性, 关于 $T(M)^*$ 为 s 重线性的多重线性函数称为 **r-阶共变,s-阶反变张量场**. 特别地, 流形 M 上的 r 阶共变张量场称为 **r-形式**.

由定义可知, 在标架 (U,φ) 上, **2-形式** 可表示为

$$\omega=\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}(x)\mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_j,$$

其中 $a_{ij}(x)$ 在 $\varphi(U)$ 上解析. 如果在流形 M 上存在 2- 形式 ω, 使得任取标架 (U,φ), 在 (U,φ) 上 $m\times m$ 方阵 $(a_{ij}(x))$ 为正定对称方阵, 则 w 称为流形 M 上的 **Riemann 度量**, 这时流形 (M,ω) 称为 **Riemann 流形**.

关于流形, 最后讨论实流形和复流形之间的关系.

设 M 为 m 维复流形. 取定标架 (U,φ), 其中 $\varphi(U)$ 的点坐标为 $z=(z_1,\cdots,z_m)$. 记

$$z_i = x_i + \sqrt{-1}x_{m+i} = x_i + \sqrt{-1}y_i, \quad 1\le i\le m,$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_{2m})\in\mathbb{R}^{2m}$. 我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}z_i = \mathrm{d}x_i + \sqrt{-1}\mathrm{d}y_i, \quad \overline{\mathrm{d}z_i} = \mathrm{d}x_i - \sqrt{-1}\mathrm{d}y_i,\\ &\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}).\end{aligned}$$

而

$$\mathrm{d}z_i(\frac{\partial}{\partial z_j}) = \overline{\mathrm{d}z_i}(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}) = \delta_{ij}, \quad \mathrm{d}z_i(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}) = \overline{\mathrm{d}z_i}(\frac{\partial}{\partial z_j}) = 0.$$

所以复流形 M 作为实流形, 在线性空间 $T(M)$ 上有线性算子 I, 它在标架 (U,φ) 上可表示为

$$I = \sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x_{m+i}}\otimes \mathrm{d}x_i - \frac{\partial}{\partial x_i}\otimes \mathrm{d}x_{m+i}).$$

易证它与标架选取无关, 且有

(1) $I^2 = -\mathrm{id}$;

(2) $[X,Y] + I[IX,Y] + I[X,IY] = [IX,IY], \ \forall X,Y\in T(M)$.

所以 I 可作为流形 M 上的一阶共变、一阶反变张量场, 也可作为线性空间 $T(M)$ 上的线性同构.

将 I 用复坐标表示，则有

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial x_{m+i}} \otimes \mathrm{d}x_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \mathrm{d}x_{m+i}) \\
&= \sqrt{-1}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial z_i} \otimes \mathrm{d}z_i - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i} \otimes \overline{\mathrm{d}z}_i).
\end{aligned}
$$

显然，f 为复流形 M 上的全纯函数，当且仅当

$$I \circ f_* = f_* \circ I.$$

反之，给定 $2m$ 维实流形 M，我们希望 M 成为复流形，使得复可容许标架作为实标架，为实流形 M 上的可容许标架. 为此，在 $2m$ 维实流形 M 上任取一个一阶共变、一阶反变的张量场 I. 在 M 中任取标架 (U,φ). 任取 $p \in U$，记 $\varphi(p) = x = (x_1,\cdots,x_{2m})$. 则 I 在 (U,φ) 上有坐标表达式

$$I = \sum_{i,j=1}^{2m} a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \mathrm{d}x_j.$$

记

$$A(x) = (a_{ij}(x))$$

为 $2m \times 2m$ 实矩阵，其中 $a_{ij}(x)$ 在 $\varphi(U)$ 上解析. 显然，I 作为线性空间 $T(M)$ 上的线性同构，则为

$$I(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \sum_{i=1}^{2m} a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

为了使得实流形 M 为 m 维复流形，我们需要从标架 (U,φ) 出发，寻找实流形 M 的可容许标架 (U',ψ)，$U' \subset U$，使得在标架 (U',ψ) 上，I 的坐标表达式为

$$I = \sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial u_{m+i}} \otimes \mathrm{d}u_i - \frac{\partial}{\partial u_i} \otimes \mathrm{d}u_{m+i}),$$

其中 $\psi(U')$ 中点坐标为 $u=(u_1,\cdots,u_{2m})$. 再引进复坐标 $z_i=u_i+\sqrt{-1}u_{m+i}$, $1\le i\le m$, 希望证明这时 M 为 m 维复流形.

今若

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i,j=1}^{2m} a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\otimes \mathrm{d}x_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{2m} a_{ij}(x)\sum_{k=1}^{2m}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial u_k}\otimes\sum_{l=1}^{2m}\frac{\partial x_j}{\partial u_l}\mathrm{d}u_l \\ &= \sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial}{\partial u_{m+i}}\otimes \mathrm{d}u_i-\frac{\partial}{\partial u_i}\otimes \mathrm{d}u_{m+i}), \end{aligned}$$

因此有

$$\sum_{i,j=1}^{2m} a_{ij}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_j}{\partial u_l}=0,\quad \sum_{i,j=1}^{2m} a_{ij}(x)\frac{\partial u_{m+k}}{\partial x_i}\frac{\partial x_j}{\partial u_{m+l}}=0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{2m} a_{ij}(x)\frac{\partial u_{m+k}}{\partial x_i}\frac{\partial x_j}{\partial u_l}=\delta_{kl},\quad \sum_{i,j=1}^{2m} a_{ij}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_j}{\partial u_{m+l}}=-\delta_{kl},$$

其中 $1\le k,l\le m$.

于是有矩阵表达式

$$\frac{\partial u}{\partial x}A(x)(\frac{\partial u}{\partial x})^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

其中 E 为 $2m\times 2m$ 单位方阵. 即

$$\sum_{i=1}^{2m} a_{ik}(x)\frac{\partial u_{m+j}}{\partial x_i}=\frac{\partial u_j}{\partial x_k},\quad \sum_{i=1}^{2m} a_{ik}(x)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=-\frac{\partial u_{m+j}}{\partial x_k},$$

其中 $1\le j\le m$, $1\le k\le 2m$. 因此, 为了 (U,ψ) 为可容许标架, 我们要求出上面线性偏微分方程组有解析解的必要且充分条件, 使得解有

$$\det\frac{\partial u}{\partial x}\neq 0.$$

在 1957 年，Newlandet 和 Nirenberg 证明了有解析解的必要且充分条件为

$$\sum_{p=1}^{2m} a_{pj}(x)(\frac{\partial a_{ip}(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial a_{ik}(x)}{\partial x_p}) = \sum_{p=1}^{2m} a_{pk}(x)(\frac{\partial a_{ip}(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_p}).$$

此即

$$[X,Y] + I[IX,Y] + I[X,IY] = [IX,IY], \quad \forall X,Y \in T(M).$$

因此，我们可以证明

引理 3.1.15 设 $\mathfrak{S}_0 = \{(U,\psi)\}$ 为 $2m$ 维实流形 M 上的可容许标架覆盖. 实流形 M 由标架覆盖 $\mathfrak{S}_0$ 定义了 m 维复流形，当且仅当在 M 上存在一阶共变，一阶反变实张量场 I(称为 **复结构**)，使得 I 作为线性空间 $T(M)$ 上的线性算子，适合条件

(1) **殆复结构条件**

$$I^2 = -\mathrm{id};$$

(2) **可积条件**

$$[X,Y] + I[IX,Y] + I[X,IY] = [IX,IY], \quad \forall X,Y \in T(M).$$

证 在 $2m$ 维实流形 M 中取定两标架 (U,φ), (V,ξ). 设 $U \cap V \neq 0$. 记 $U \cap V$ 中点 p 的坐标为 $\varphi(p) = x$, $\xi(p) = y$. 在 $U \cap V$ 上的一阶共变、一阶反变张量场 I 的坐标表达式为

$$I = \sum a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \mathrm{d}x_j = \sum b_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial y_i} \otimes \mathrm{d}y_j.$$

记坐标变换为 $y = F(x)$, 其 Jacobian 约定上标表示行，下标表示列，即

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_{2m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_{2m}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_{2m}}{\partial x_{2m}} \end{pmatrix}.$$

记

$$A(x)=(a_{ij}(x)),\quad B(y)=(b_{ij}(y)),$$

其中前指标表示行，后指标表示列．于是有

$$B(y)=\frac{\partial y}{\partial x}A(x)(\frac{\partial y}{\partial x})^{-1}.$$

取可容许标架 (U,ψ) 及 (U,η), $\psi(p)=u$, $\eta(p)=v$, 则

$$\begin{aligned}I&=\sum_i(\frac{\partial}{\partial u_{m+i}}\otimes\mathrm{d}u_i-\frac{\partial}{\partial u_i}\otimes\mathrm{d}u_{m+i})\\&=\sum_i(\frac{\partial}{\partial v_{m+i}}\otimes\mathrm{d}v_i-\frac{\partial}{\partial v_i}\otimes\mathrm{d}v_{m+i}),\end{aligned}$$

它们对应 $2m\times 2m$ 方阵

$$C(u)=D(v)=\begin{pmatrix}0&-E\\E&0\end{pmatrix},$$

其中， E 为 m 阶单位方阵．注意到可积条件与坐标选取无关，于是存在坐标变换 $u=u(x)$, $v=v(y)$. 同理有

$$C(u)=\frac{\partial u}{\partial x}A(x)(\frac{\partial u}{\partial x})^{-1},\quad D(v)=\frac{\partial v}{\partial y}B(y)(\frac{\partial v}{\partial y})^{-1}.$$

因此

$$\begin{pmatrix}0&-E\\E&0\end{pmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}A(x)(\frac{\partial u}{\partial x})^{-1}=\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}A(x)(\frac{\partial y}{\partial x})^{-1}(\frac{\partial v}{\partial y})^{-1}.$$

即

$$A(x)=(\frac{\partial u}{\partial x})^{-1}\begin{pmatrix}0&-E\\E&0\end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}=(\frac{\partial v}{\partial x})^{-1}\begin{pmatrix}0&-E\\E&0\end{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

所以

$$\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\begin{pmatrix}0&-E\\E&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-E\\E&0\end{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u},$$

即有

$$\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial u} \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

这证明了

$$\frac{\partial v_i}{\partial u_i} = \frac{\partial v_{m+i}}{\partial u_{m+i}}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial u_{m+i}} = -\frac{\partial v_{m+i}}{\partial u_i}, \quad 1 \le i \le m.$$

而且 $u = (u_1, \cdots, u_{2m})$ 为实自变量, $v = (v_1, \cdots, v_{2m})$ 为实值函数. 这证明了 v_{m+i} 为 v_i 的共轭调和函数, 且关于复自变量 $u_1 + \sqrt{-1}u_{m+1}, \cdots, u_m + \sqrt{-1}u_{2m}$, 则函数 $v_1 + \sqrt{-1}v_{m+1}, \cdots, v_m + \sqrt{-1}v_{2m}$ 为全纯函数. 即视 $\xi(U) \subset \mathbb{C}^m$, $\eta(V) \subset \mathbb{C}^m$, 则 $\mathfrak{S}_1 = \{(U, \psi)\}$ 作为坐标覆盖, M 为 m 维复流形. 引理证完.

现在开始讨论李群.

定义 3.1.16 设 G 为普通的群 (有限或无限), 且 G 为 **拓扑流形**. G 称为 **李群**, 如果映射 $(x, y) \to xy^{-1}$, $\forall x, y \in G$ 为 $G \times G$ 到 G 内的 **连续映射**. 当 G 为实拓扑流形时称为 **实李群**, 为复拓扑流形时称为 **复李群**.

在 1900 年 Hilbert 提出了著名的 23 个问题, 其中第 5 个问题是问上面定义的李群是否可以推出 G 为实 (或复) 解析流形, 且映射 $(x, y) \to xy^{-1}$, $\forall x, y \in G$ 为解析映射. 这个问题在 1952 年由 Gleason, Montgomery 及 Zippen 合作解决. 因此, 今后我们只需要按照最强的条件来理解李群, 即有下面的等价定义:

定义 3.1.17 设 G 为普通的群, 且 G 为流形 (按前面约定, 流形是指实 (或复) 解析流形). G 称为李群, 如果映射

$$(x, y) \to xy^{-1}, \forall x, y \in G$$

为 $G \times G$ 到 G 内的解析映射.

着手研究李群, 必须先引进下面 3 种映射: **左平移** $L_g : x \to gx$, $\forall x \in G$; **右平移** $R_g : x \to xg$, $\forall x \in G$; 映射 $\operatorname{ad}(g) = L_g R_g^{-1} = R_g^{-1} L_g : x \to gxg^{-1}$, $\forall x \in G$. 这里, g 为李群 G 中的任意固定

元素. 由李群的定义可知, 左平移、右平移都是流形 G 的解析同构, 即为双解析同胚, 且有

$$(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}, \quad (R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}, \quad \forall g \in G.$$

又

$$(\mathrm{ad}\, g)^{-1} = \mathrm{ad}\, g^{-1}, \quad \forall g \in G.$$

所以 $\mathrm{ad}\,(g)$ 为普通群 G 的普通同构, 又是流形 G 的双解析同胚. 对群 G 中元素 x, y, 若有 $(\mathrm{ad}\, g)x = gxg^{-1} = y$, 则称元素 x 和 y**互相共轭**. 一般地对群 G 中的集合 S, S_1. 若有 $g \in G$, $(\mathrm{ad}\, g)S = S_1$, 则称子集合 S 和 S_1**互相共轭**.

定义 3.1.18 李群 G_1 到李群 G_2 上的普通群同构若为流形的双解析同胚, 则称为 (李群的)**同构**. 若 $G_2 = G_1$, 则称为 (李群的)**自同构**. 任取 $g \in G_1$, 则李群 $G_2 = G_1$ 的自同构 $\mathrm{ad}(g)$ 称为 **内自同构**.

显然, 李群的同构为等价关系. 在此等价关系下的分类理论是李群理论的根本问题, 但是这个问题远未解决. 下面我们先建立它的基础理论, 即将局部性质化为李代数问题, 再讨论整体性质和局部性质之间的关系, 并且引进大量代数概念: (李群的李) 子群、(李群的李) 正规子群、(李群的李) 商群、(李群的) 同态、(李群的) 同构, 等等.

任取李群 G 中的子集合 S_1 及 S_2, 记

$$S_1 S_2 = \{s_1 s_2 \mid \forall s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2\}.$$

由李群的定义可知李群 G 有单位元素 e, 于是 $e^m = e$, $m = 1, 2, \cdots$, $e^{-1} = e$. 利用 $(x, y) \to xy^{-1}$ 为解析 (因此连续) 映射, 而 $(e, e) \to ee^{-1} = e$, 于是立即有

引理 3.1.19 在李群 G 中存在 **单位坐标邻域组** $\mathfrak{S}$, 使得

(1) $\bigcap\limits_{(U,\varphi)\in\mathfrak{S}} U = \{e\}$;

(2) 任取 (U, φ), $(V, \psi) \in \mathfrak{S}$, 则存在 $(W, \xi) \in \mathfrak{S}$, 使得

$$W \subset U \cap V;$$

(3) 任取 $(U,\varphi)\in\mathfrak{S}$, $x\in G$ ，则存在 $(V,\psi)\in\mathfrak{S}$ ，使得 $(\mathrm{ad}\,x)V=xVx^{-1}\subset U$;

(4) 任取 $(U,\varphi)\in\mathfrak{S}$, 则存在 $(V,\psi)\in\mathfrak{S}$, 使得 $V^{-1}\subset U$;

(5) 任取 $(U,\varphi)\in\mathfrak{S}$ 和自然数 m, 则存在 $(V,\psi)\in\mathfrak{S}$, 使得 $V^m\subset U$, 其中

$$xVx^{-1}=\{xvx^{-1}\mid\forall v\in V\};$$

(6) 在李群 G 中任意取定一点 g, 则点 g 有 **基本邻域组**

$$g\mathfrak{S}=\{(gU,\varphi\circ L_g^{-1})\mid\forall(U,\varphi)\in\mathfrak{S}\},$$

也有基本邻域组

$$\mathfrak{S}_g=\{(Ug,\varphi\circ R_g^{-1})\mid\forall(U,\varphi)\in\mathfrak{S}\}.$$

由引理 3.1.19, 立即有

引理 3.1.20 取定自然数 m, $(U,\varphi)\in\mathfrak{S}$, 则存在 $(V,\psi)\in\mathfrak{S}$, 使得

$$V^{-1}=V,\quad V^m\subset U,\quad \overline{V}\subset U,$$

其中 $\overline{V}$ 为 V 的闭包.

证 今 $g\to g^{-1}$ 为李群 G 的双解析同胚，所以由 $e=e^{-1}$ 可知，任取 $(U,\varphi)\in\mathfrak{S}$, 则存在 $V_1\subset U$, 使得 $(V_1,\varphi),(V_1^{-1},\varphi)\in\mathfrak{S}$, 且 V_1, $V_1^{-1}\subset U$. 于是， $V=V_1\cap V_1^{-1}$, 有 $(V,\varphi)\in\mathfrak{S}$, 且 $V^{-1}=V$. 再由 G 为流形，所以 G 为局部 Euclid 空间，因此可取 V_1 如上，使得 $\overline{V}_1\subset U$. 至于证存在适合引理要求的 $(V,\varphi)\in\mathfrak{S}$, 这只要再用 $e^m=e$ 即可. 证完.

引理 3.1.21 李群 G 为正则拓扑空间，即任取一点 p 及闭子集 F, 只要 $p\notin F$, 则存在两个不相交的开集 O_1,O_2, 使得 $p\in O_1$, $F\subset O_2$.

证 由于左平移为双解析同胚，所以无妨取点 $p=e$. 今 F 为闭子集，所以 $e\in G-F=O$ 为 G 中的开子集. 由引理 3.1.20 可知，存在单位邻域 V, 使得 $V^{-1}=V$, $V^2\subset O$, $\overline{V}\subset O$. 于是，李群 G 有开子集 $O_0=G-\overline{V}$, 使得 $F\subset O_0$, $e\in V$, $V\cap O_0=\emptyset$. 证完.

引理 3.1.22 连通李群由单位邻域生成. 确切地说, 任取单位邻域 U, 则有

$$G=\bigcup_{m=1}^{\infty}U^m.$$

证 任取连通李群 G 的单位邻域 U, 由引理 3.1.20, 有单位标架 (V,φ), 使得 $V^{-1}=V$, $\overline{V}\subset U$. 于是

$$O=\bigcup_{m=-\infty}^{\infty}V^m=\bigcup_{m=1}^{\infty}V^m\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}U^m\subset G.$$

显然, V^m 为李群 G 中开集, 所以 O 为 G 中开集. 利用连通性, 为了证明 $O=G$, 只要证明 O 闭即可. 在开集 O 的闭包 $\overline{O}$ 中任取一元素 g, 于是点 g 的邻域 gV 有性质 $gV\cap O\neq\emptyset$, 即存在自然数 n, 使得 $gV\cap V^n\neq\emptyset$. 在 $gV\cap V^n$ 中任取一元素 $ga=b$, 其中 $a\in V$, $b\in V^n$. 因此有 $g=ba^{-1}\in V^nV^{-1}=V^nV=V^{n+1}\subset O$. 这证明了开集 O 闭, 所以证明了 $G=\bigcup_{m=1}^{\infty}U^m$. 证完.

引理 3.1.23 连通李群 G 的拓扑适合第二可数公理, 即在 G 中存在 **可数稠密子集**, 所以具有 **可数基**.

证 在连通李群 G 中取定单位标架 $(U,\varphi)\in\mathfrak{S}$. 由于 U 同胚于 Euclid 空间, 所以在 U 中有可数稠密子集 D, 即有 $D\subset U\subset\overline{D}$. 因此

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}D^m\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}U^m\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}\overline{(D^m)}.$$

注意到李群的乘法是连续的, 所以有

$$\overline{(D^m)}=(\overline{D})^m,\quad \bigcup_{m=1}^{\infty}(\overline{D})^m\subset\overline{(\bigcup_{m=1}^{\infty}D^m)}.$$

因此

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}D^m\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}U^m\subset\overline{(\bigcup_{m=1}^{\infty}D^m)}.$$

令 $\bigcup_{m=1}^{\infty} D^m$ 为可数集，由引理 3.1.22 便证明了连通李群 G 有可数稠密子集 $\bigcup_{m=1}^{\infty} D^m$. 证完.

这个引理告诉我们，在连通李群中，收敛序列必有可数收敛子序列. 所以对李群而言，其收敛可按通常序列收敛来理解. 对于不连通李群，我们有

引理 3.1.24 李群 G 的含单位元素 e 的最大连通块 (称为**单位连通分支**) G_e 按李群的诱导拓扑为连通李群，且为 G 的又开又闭子流形，其群结构为普通正规子群. 又在任一连通分支中取定一元素 g, 则该连通分支为 $gG_e = G_e g$.

证 记 G_g 为李群 G 中含元素 g 的连通分支. 由于李群的左平移及右平移都是李群的双解析同胚，所以 $g^{-1}G_g$, $G_g g^{-1}$ 都是李群 G 的连通分支. 由于 $g \in G_g$, 可知单位元素 $e \in g^{-1}G_g$, $e \in G_g g^{-1}$. 这证明了

$$G_g = gG_e = G_e g.$$

现在来考虑单位分支 G_e. 由最大连通性可知 G_e 在李群 G 中又开又闭，所以 G_e 按诱导拓扑为开子流形. 另一方面，任取 $g \in G$, 则 $gG_e g^{-1}$ 仍为连通分支. 由 $e \in gG_e g^{-1}$ 可知 $G_e = gG_e g^{-1}$, $\forall g \in G$. 又任取 $g \in G_e$, 则由 $e = g^{-1}g$ 可知 $e \in g^{-1}G_e$. 这证明了 $g^{-1}G_e = G_e$. 由 g 任取可知 $G_e^{-1}G_e = G_e$, 即 G_e 为普通正规子群.

最后证 G_e 为李群. 事实上，由 $G_e \times G_e \subset G \times G$, 所以 $(x, y) \to xy^{-1}$, $\forall x, y \in G_e$ 为解析映射，即 G_e 为连通李群. 引理证完.

推论 具有至多可数分量的李群适合第二可数公理.

为了进一步展开李群的结构的研究，需要弄清李群的单位标架的代数结构. 注意到在给定李群 G 后，任取单位标架 (U, φ), 任取一元素 $g \in G$, 则 $(gU, \varphi \circ L_{g^{-1}})$ 为点 g 的可容许标架. 所以李群 G 有标架覆盖 $\{(gU, \varphi \circ L_{g^{-1}} \mid \forall g \in G\}$, 而李群的流形结构可用这个标架覆盖来定义. 另一方面，引理 3.1.22 告诉我们，连通李群由单位坐标邻域生成. 这些都说明了首先需要研究单位标架的代数结构.

定义 3.1.25 李群 G 上的向量场 X 称为**左不变向量场**, 如果 $(L_g)_*(X) = X$, $\forall g \in G$.

引理 3.1.26 李群 G 上的所有左不变向量场构成 $\dim G$ 维李代数, 称为**李群 G 的李代数**.

证 记 $\mathfrak{G}$ 为实 (或复) 李群 G 上的所有左不变向量场构成的集合. 任取 $X, Y \in \mathfrak{G}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$(或$\mathbb{C}$), 则由

$$(L_g)_*(\lambda X + \mu Y) = \lambda (L_g)_* X + \mu (L_g)_* Y = \lambda X + \mu Y, \quad \forall g \in G$$

以及

$$(L_g)_*([X, Y]) = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y] = [X, Y], \quad \forall g \in G$$

可知 $\mathfrak{G}$ 为李代数.

下面来计算李代数 $\mathfrak{G}$ 的维数. 实际上, 我们给出利用单位元素的切空间中的向量来构造唯一的左不变向量场的方法.

今任取 $X \in \mathfrak{G}$, $g \in G$, 则由 $(L_g)_* X = X$ 可知 $(L_g)_* X_{g_1} = X_{gg_1}$, $\forall g_1 \in G$, 且 $X_e \in T_e(G)$, $X_g \in T_g(G)$. 这证明了 $X \to X_e$ 给出李代数 $\mathfrak{G}$ 到李群 G 的 e 点切空间 $T_e(G)$ 内的单值映射. 我们来证这是到上的线性同构. 事实上, 任取 $X, Y \in \mathfrak{G}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$(或$\mathbb{C}$), 则 $\lambda X + \mu Y \to (\lambda X + \mu Y)_e = (\lambda X + \mu Y)|_e = \lambda X|_e + \mu Y|_e = \lambda X_e + \mu Y_e$, 即此映射为线性映射. 再任取 $X_e \in T_e(G)$, 定义 $X_g = (L_g)_*(X_e)$, $\forall g \in G$, 于是定义了一个向量场 X. 先证它左不变. 事实上, 任取 $h \in G$, 则 $(L_h)_* X_g = (L_h)_*(L_g)_* X_e = (L_{hg})_* X_e = X_{hg}$, 这证明了 X 左不变. 为了证 $X \in \mathfrak{G}$, 只要证 $g \to X_g$ 解析就够了. 注意到 L_g 为李群 G 上的双解析同胚, 所以它的 Jacobian 矩阵中的元素为流形上的解析函数, 因此 $g \to X_g$ 为李群 G 上的解析映射. 至此证明了 $X \in \mathfrak{G}$. 由 X 的定义可知 $X|_e = X_e$, 这证明了 $X \to X_e$ 给出线性空间 $\mathfrak{G}$ 到 $T_e(G)$ 上的线性同构. 所以

$$\dim \mathfrak{G} = \dim T_e(G) = \dim G.$$

引理证完.

实际上，引理证明还给出

引理 3.1.27 记 $\mathfrak{G}$ 为李群 G 的李代数，$T_e(G)$ 为李群 G 的单位元素 e 的切空间. 在 $T_e(G)$ 中引进换位运算

$$[X_e, Y_e] = ([X, Y])_e, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{G},$$

且 $X|_e = X_e$, $Y|_e = Y_e$, 则 $T_e(G)$ 为李代数，它在对应 $X_e \to X$ 下和李代数 $\mathfrak{G}$ 同构.

下面具体刻画李群的局部性质，即李群的单位标架的代数性质. 首先，由引理 3.1.20 可知，对李群 G 中任意给定的单位标架 (U, φ), 存在单位标架 (V, φ), 使得 $V = V^{-1}$, $V^3 \subset U$. 我们取 $\varphi(e) = 0$, 任取 $\sigma, \tau, \xi \in V$, 则 $\sigma^{-1}, \sigma\tau, \tau\xi, (\sigma\tau)\xi, \sigma(\tau\xi) \in U$, 因此都有坐标. 记 $\varphi(\sigma) = x$, $\varphi(\tau) = y$, $\varphi(\xi) = z$, 记 $\sigma\tau$ 的坐标为 $f(x, y)$, 我们称函数 f 为 **乘法函数**. 又 σ^{-1} 的坐标为 $g(x)$, 我们称函数 g 为 **取逆函数**. 由于 G 为普通的群，因此有

(1) 结合律

$$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)), \quad \forall x, y, z \in \varphi(V);$$

(2) 有单位元素 e, 坐标为 0, 即有

$$f(x, 0) = f(0, x) = x, \quad \forall x \in \varphi(V);$$

(3) 每个元素必有逆元素，取 $\sigma \in V$, 由 $V^{-1} = V$, 所以 $\sigma^{-1} \in V$, 且有

$$f(x, g(x)) = f(g(x), x) = 0, \quad \forall x \in \varphi(V).$$

函数

$$l_i^j(x) = \frac{\partial f_j(x, y)}{\partial y_i}\Big|_{y=0}, \quad 1 \le i, j \le n$$

称为 **辅助函数**, 它有

$$l_i^j(0) = \delta_{ij}, \quad 1 \le i, j \le n.$$

记 $n\times n$ 矩阵

$$L(x)=\begin{pmatrix} l_1^1(x) & \cdots & l_n^1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ l_1^n(x) & \cdots & l_n^n(x) \end{pmatrix}.$$

由 $L(0)=I$ 为 $n\times n$ 单位方阵，所以 $\det L(0)=1$. 于是无妨取单位标架 (V,φ), 使得 $\det L(x)>0$, $\forall x\in\varphi(V)$. 这时记

$$L(x)^{-1}=\begin{pmatrix} \widetilde{l}_1^1(x) & \cdots & \widetilde{l}_n^1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \widetilde{l}_1^n(x) & \cdots & \widetilde{l}_n^n(x) \end{pmatrix}.$$

引理 3.1.28 设 $\mathfrak{G}$ 为李群 G 的李代数. 记 (U,φ) 为李群 G 的单位标架，使得 $\varphi(e)=0$. 取单位标架 (V,φ), 使得 $V^{-1}=V$, $V^3\subset U$, $\det L(x)>0$, $\forall x\in\varphi(V)$, 其中

$$L(x)=(l_i^j(x))=\left(\frac{\partial f_j(x,y)}{\partial y_i}\Big|_{y=0}\right),$$

又 $f=(f_1,\cdots,f_n)$ 为乘法函数，则 $\mathfrak{G}$ 有一组基 $X_1,\cdots,X_n$, 使得在标架 (V,φ) 中基元素 X_i 有坐标表达式

$$X_i=\sum_{j=1}^n l_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j},\quad 1\le i\le n.$$

证 我们来计算李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 中任一元素 X 在单位标架 (U,φ) 中的坐标表达式. 今任取 $\sigma,\tau\in V,\sigma,\tau$ 的坐标分别记作 x,y, 于是 $L_\sigma(\tau)$ 的坐标为 $f(x,y)$. 即 L_σ 作为双解析同胚，它有坐标表达式 $z=f(x,y)$. 任取 $T_e(G)$ 中元素 $X_e=\sum\limits_{i=1}^n a_i(\dfrac{\partial}{\partial y_i})_{y=0}$, 于是

$$X_\sigma=(L_\sigma)_*(X_e)=\sum_i a_i\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{y=0}$$

$$=\sum_{i=1}^n a_i\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_j(x,y)}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial z_j}\right)_{y=0}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i\, l_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i.$$

由于 $a_1,\cdots,a_n$ 可任取，所以证明了 $X_1,\cdots,X_n$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的一组基．证完．

定理 3.1.29(S. Lie 的三个基本定理)　设 $(U,\varphi),(V,\varphi)$ 为李群 G 的单位标架，使得 $V^{-1}=V, V^3\subset U, \overline{V}\subset U$. 设李群 $\mathfrak{G}$ 的单位元素 e 有坐标 0, 记乘法函数为 $f(x,y)$, 辅助函数构成的方阵为 $L(x)=(l_j^i)$, $\det L(x)>0$, $\forall x\in\varphi(V)$. 则有

(1)　$f(x,0)=x$, 且乘法函数 f 适合偏微分方程

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = L(f(x,y))L(y)^{-1};$$

(2)　辅助函数

$$l_i^j(x) = \frac{\partial f_j(x,y)}{\partial y_i}\Big|_{y=0}, \quad 1\le i,j\le n$$

适合

$$l_i^j(0)=\delta_i^j, \quad 1\le i,j\le n$$

及偏微分方程组

$$\sum_{k=1}^{n}\left(l_i^k(x)\frac{\partial l_j^p(x)}{\partial x_k} - l_j^k(x)\frac{\partial l_i^p(x)}{\partial x_k}\right) = \sum_{k=1}^{h} C_{ij}^k l_k^p(x), \quad 1\le i,j,p\le n;$$

(3)　C_{ij}^k, $1\le i,j,k\le n$ 为常数，它们有

$$C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0,$$
$$\sum_p (C_{ij}^p C_{pk}^q + C_{ki}^p C_{pj}^q + C_{jk}^p C_{pi}^q) = 0.$$

证　由 $f(x,f(y,z)) = f(f(x,y),z)$, 对 z 求导数，再取 $z=0$, 则有

$$\frac{\partial f_j(x,f(y,z))}{\partial z_i}\Big|_{z=0} = \frac{\partial f_j(f(x,y),z)}{\partial z_i}\Big|_{z=0} = l_i^j(f(x,y)).$$

于是有

$$l_i^j(f(x,y)) = \sum_k \frac{\partial f_j(x,y)}{\partial y_k}\frac{\partial f_k(y,z)}{\partial z_i}\Big|_{z=0} = \sum_k \frac{\partial f_j(x,y)}{\partial y_k} l_i^k(y).$$

注意到 Jacobian 的上标表示行，下标表示列，所以证明了

$$L(f(x,y)) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} L(y).$$

这证明了 (1).

由引理 3.1.28 可知，李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 有基 $X_1,\cdots,X_n$，这里 $X_i = \sum l_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$，$1 \le i \le n$. 而 C_{ij}^k，$1 \le i,j,k \le n$ 为构造常数，即有

$$[X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k.$$

这证明了 (3) 成立. 而且

$$[\sum_k l_i^k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}, \sum_p l_j^p(x)\frac{\partial}{\partial x_p}] = \sum_{k,p} C_{ij}^k l_k^p(x)\frac{\partial}{\partial x_p},$$

即有

$$\sum_{k,p} l_i^k(x)\frac{\partial l_j^p(x)}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_p} - \sum_{k,p} l_j^p(x)\frac{\partial l_i^k(x)}{\partial x_p}\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{k,p} C_{ij}^k l_k^p(x)\frac{\partial}{\partial x_p}.$$

比较 $\frac{\partial}{\partial x_p}$ 的系数，便证明了 (2) 成立. 定理证完.

关键是 S.Lie 的 3 个基本定理的逆定理，因为这可以使我们从李代数出发构造出一个李群的单位标架. 其证明方法是利用含参数的 Pfaff 方程的求解技术，仅叙述结果如下：

定理 3.1.30 (S.Lie 三个基本定理的逆) 任给一个李代数 $\mathfrak{G}$，在 $\mathfrak{G}$ 中取定基 $e_1,\cdots,e_n$，记乘法表为

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k e_k, \quad 1 \le i,j \le n,$$

则构造常数 C_{ij}^k, $1 \le i,j,k \le n$ 适合条件

$$C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0,$$
$$\sum_p (C_{ij}^p C_{pk}^q + C_{ki}^p C_{pj}^q + C_{jk}^p C_{pi}^q) = 0.$$

这时偏微分方程组

$$\sum_k \left(l_i^k(x) \frac{\partial l_j^p(x)}{\partial x_k} - l_j^k(x) \frac{\partial l_i^p(x)}{\partial x_k} \right) = \sum_k C_{ij}^k l_k^p(x), \quad 1 \le i,j,p \le n$$

有适合初值

$$l_i^j(0) = \delta_{ij}, \quad 1 \le i,j \le n$$

及条件

$$\sum_p x_p l_p^j(x) = x_j, \quad 1 \le j \le n$$

的唯一解析解

$$L(x) = (l_i^j(x)) = (\int_0^1 \exp tA(x) \mathrm{d}t)^{-1},$$

其中

$$A(x) = \begin{pmatrix} A_1^1(x) & \cdots & A_n^1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^n(x) & \cdots & A_n^n(x) \end{pmatrix}, \quad A_i^j(x) = \sum_p x_p C_{ip}^j,$$

$1 \le i,j \le n$, $\det A(x) > 0$, $|x| < \varepsilon$.

又偏微分方程组

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = L(f(x,y))L(y)^{-1}$$

有适合初值

$$f(x,0) = 0$$

的唯一解析解 $f(x,y)$, 其中 $|y|<\varepsilon$, 且在 $|x|<\varepsilon$, $|y|<\varepsilon$ 时 $f(x,y)$ 解析, 又有性质

$$f(x,0)=f(0,x)=x, \quad f(x,f(y,z))=f(f(x,y),z)$$

在 $|x|<\varepsilon$, $|y|<\varepsilon$, $|z|<\varepsilon$, $|f(x,y)|<\varepsilon$, $|f(y,z)|<\varepsilon$ 时成立, 且唯一存在解析函数 $g(x)$, $|x|<\varepsilon$, 使得 $|g(x)|<\varepsilon$, 且

$$f(x,g(x))=f(g(x),x)=0.$$

由 S.Lie 的 3 个基本定理的逆定理, 我们找到 $\mathbb{R}^n$(或 $\mathbb{C}^n$) 中有以原点为中心、半径为 $\varepsilon>0$ 的开超球 $\widetilde{V}$, 在其上有乘法函数 $f(x,y)$, 辅助函数 $l_i^j(x)$ 及取逆函数 $g(x)=x^{-1}$. 下面从 $\widetilde{V}$ 出发构造一个连通李群如下:

作 m 次张量积

$$\widetilde{V}^m=\widetilde{V}\otimes\cdots\otimes\widetilde{V}.$$

记

$$\widetilde{G}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\widetilde{V}^m.$$

在 $\widetilde{G}$ 中引进等价关系: $u,v,uv=f(u,v)\in\widetilde{V}$, 则 (u,v) 和 uv 等价. 对 $\widetilde{G}$ 中任意两个元素 $(u_1,\cdots,u_m)$ 和 $(v_1,\cdots,v_s)$, 若从前一个元素出发, 按照 u_i,u_{i+1}, 有 $w_i=f(u_i,u_{i+1})\in\widetilde{V}$, 则 $(u_1,\cdots,u_m)$ 和 $(u_1,\cdots,u_{i-1},w_i,u_{i+2},\cdots,u_m)$ 等价; 又 $u_i,w_i,w_i'\in\widetilde{V}$, 有 $u_i=f(w_i,w_i')$, 则 $(u_1,\cdots,u_m)$ 和 $(u_1,\cdots,u_{i-1},w_i,w_i',u_{i+1},\cdots,u_m)$ 等价. 如果从 $(u_1,\cdots,u_m)$ 按照上面方法经过有限步变为 $(v_1,\cdots,v_s)$, 则称为 $(u_1,\cdots,u_m)$ 和 $(v_1,\cdots,v_s)$ 等价. 易证这是等价关系, 等价类集记作 G, 其中含 $(u_1,\cdots,u_m)$ 的等价类用 $(u_1,\cdots,u_m)^*$ 表示.

今在集合 $\widetilde{G}$ 中引进乘法:

$$(u_1,\cdots,u_m)(v_1,\cdots,v_t)=(u_1,\cdots,u_m,\ v_1,\cdots,v_t).$$

显然, 乘法定义和等价类的代表元素选取无关. 它适合结合律, 且它诱导了等价类集 G 的乘法, 自然也适合结合律. 显然, 集合

$\widetilde{V}$ 中元素属于等价类集 G 中的不同元素，这些元素构成等价类集 G 中的子集 V. 于是 $u \to u^*$ 给出 $\widetilde{V}$ 到 V 上的一一对应. 注意到 $\widetilde{V} = \{x \in \mathbb{R}^n(\text{或}\mathbb{C}^n) \mid |x| < 1\}$, 对应 $\varphi: \ u^* \ \to \ u$, $\forall u^* \in V$ 为一一对应，于是可在 V 中引进拓扑，使得 φ 为到上的同胚. 因此，(V, φ) 为一个自然的标架.

我们来证 G 为普通的群. 事实上，由于 $f(x,0) = f(0,x) = x$, 所以 $\widetilde{V}$ 中的元素 0 在同胚 φ 下的原像 $e = \varphi^{-1}(0)$, 有 $ue = eu = u$, $\forall u \in V$. 由归纳法不难证明 e 为 G 中的单位元素. 再任取 $(u_1, \cdots, u_m)^* \in G$, 则 $(u_m^{-1}, \cdots, u_1^{-1})^* \in G$, 其中 $u_j^{-1} = g(u_j)$. 不难证明

$$(u_1, \cdots, u_m)^*(u_m^{-1}, \cdots, u_1^{-1})^* = (u_m^{-1}, \cdots, u_1^{-1})^*(u_1, \cdots, u_m) = e.$$

即 G 中每个元素 $(u_1, \cdots, u_m)^*$ 都有逆元素. 至此，证明了集合 G 为普通的群.

现在在 G 中引进解析结构如下：上面已经证明了 (V, φ) 为 G 中单位元素 e 的标架. 对 G 中任一元素 g, 考虑集合 $gV = \{gv \mid \forall v \in V\}$, 易证

$$gV \ \to \ V \ \xrightarrow{\varphi} \ \widetilde{V}$$

为到上的一一对应，于是在 gV 中引进拓扑可使它为同胚. 此同胚记作 φ_g, 于是 (gV, φ_g) 为一个标架，$\forall g \in G$.

我们来证明

$$\mathfrak{S} = \{(gV, \varphi_g) \mid \forall g \in G\}$$

作为标架覆盖，在集合 G 上定义了解析流形结构.

事实上，由于在集合 G 中任取一点 g, 由 V 的原点基本邻域组，自然地给出了点 g 的基本邻域组. 我们来证它使得 G 为 Haudorff 空间. 因为任取 $g_1, g_2 \in G$, $V_1, V_2 \subset V$ 为原点基本邻域组中的两邻域，则 g_1V_1, g_2V_2 分别为点 g_1, g_2 的基本邻域组中的邻域. 设 $g_1V_1 \cap g_2V_2 \neq \emptyset$. 任取 $h \in g_1V_1 \cap g_2V_2$, 存在 $v_i \in V_i$, $i = 1, 2$, 且 $h = g_1v_1 = g_2v_2$. 由于普通群 G 中的子集 V 中两元素的乘法可

用解析函数表示，因此乘法连续．再由 $v_ie=v_i$ 可知存在单位基本邻域组中的一邻域 V_0, 使得 $v_iV_0\subset V_i$. 于是

$$hV_0=g_iv_iV_0\subset g_iV_i,\quad i=1,2.$$

即证明了 $hV_0\subset g_1V_1\cap g_2V_2$. 这证明了普通群 G 为拓扑空间．由于 G 中每点有一个邻域 gV 同胚于 Euclid 空间中的超球，所以 G 为局部 Euclid 空间．因此， G 为 Hausdorff 空间，且有标架覆盖 $\mathfrak{S}=\{(gV,\varphi_g)\mid\forall g\in G\}$, 使得 G 成为拓扑流形．

现在，我们来证普通群 G 实际上是解析流形．事实上，在 V 中取子集 (V_0,φ), 使得 $\varphi(V_0)$ 为单位超球中的连通开集，则 (V_0,φ) 为可容许标架．且显然可取 V_0, 有 $V_0^{-1}=V_0$, $V_0^3\subset V$, V_0 的闭包 $\overline{V}_0\subset V$. 因此任取 $g_1,g_2\in G$, 则 (g_iV_0,φ_{g_i}) 仍为可容许标架．设 $g_1V_0\cap g_2V_0\neq\emptyset$. 任取 $h\in g_1V_0\cap g_2V_0$, 则存在 $v_i\in V_0$, 使得 $h=g_1v_1=g_2v_2$. 记 h 在标架 (g_iV_0,φ_{g_i}) 中的坐标为 $x^{(i)}$, 由 φ_{g_i} 的定义可知 V_0 中点 v_i 的坐标为 $x^{(i)}$, $i=1,2$, 即有

$$\varphi(v_i)=x^{(i)},\quad i=1,2.$$

注意到 $v=g_2^{-1}g_1=v_2v_1^{-1}\in V_0V_0^{-1}=V_0^2\subset V$, 于是

$$v_2=g_2^{-1}g_1v_1=vv_1\in V_0.$$

记 v 的坐标 $\varphi(v)=a$, 因此 $x^{(2)}=f(a,x^{(1)})$, 其中 f 解析，所以 $x^{(2)}$ 是 $x^{(1)}$ 的解析函数．再记 v^{-1} 的坐标为 b, 由 $v_1=u^{-1}v_2$ 可知 $x^{(1)}=f(b,x^{(2)})$, 即 $x^{(1)}$ 为 $x^{(2)}$ 的解析函数．至此证明了普通群 G 为解析流形．

最后，我们来证 G 为连通李群．今任取 $g_1,g_2\in G$, 有 g_i 的可容许标架 (g_iV,φ_{g_i}), $i=1,2$. 因此存在单位坐标邻域 $V_i\subset V$, 使得 $V_1^{-1}=V_1$, $V_1^2\subset V_2, g_2V_2g_2^{-1}\subset V$. 对可容许标架 (V_i,φ), $i=1,2,3$, 有

$$\begin{aligned}(g_1V_1)(g_2V_1)^{-1}=g_1V_1V_1^{-1}g_2^{-1}&=g_1V_1^2g_2^{-1}\\&\subset g_1g_2^{-1}(g_2V_2g_2^{-1})\subset g_1g_2^{-1}V.\end{aligned}$$

在 g_iV_1 中任取一点 g_iv_i, 它有坐标 $x^{(i)}=\varphi(v_i)$, $i=1,2$. 令

$$(g_1v_1)(g_2v_2)^{-1}=g_1v_1v_2^{-1}g_2^{-1}=g_1g_2^{-1}(g_2v_1v_2^{-1}g_2^{-1})=g_1g_2^{-1}v_3,$$

其中 $v_3=g_2v_1v_2^{-1}g_2^{-1}\in V$, 它有坐标 $\varphi(v_3)=z$. 于是，记 g_2 的坐标为 a, g_2^{-1} 的坐标为 b, 则

$$z=\varphi(v_3)=\varphi(g_2v_1v_2^{-1}g_2^{-1})=f(a,f(f(x^{(1)},g(x^{(2)})),b)).$$

这证明了 z 为 $x^{(1)}$ 及 $x^{(2)}$ 的解析函数. 所以证明了映射

$$(g_1v_1,g_2v_2)\to(g_1v_1)(g_2v_2)^{-1}$$

为解析映射，即 G 为李群. 所以它的单位连通分支 G_e 由含单位连通开集生成. 由 G 的定义可知 G 由 V 生成，而 G_e 是连通开集，且含单位元素. 因此证明了 $G=G_e$, 即 G 为连通李群.

对 G 中单位元素的可容许标架 (V,φ) 的乘法函数 $f(x,y)$ 利用 S.Lie 的 3 个基本定理，可知连通李群 G 的李代数的构造常数和已给的李代数的构造常数相同，即这两个李代数互相同构. 至此，我们证明了

定理 3.1.31 任给李代数 $\tilde{\mathfrak{G}}$, 则存在连通李群 G, 使得李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 和 $\tilde{\mathfrak{G}}$ 同构. 且此李群 G 中有可容许单位标架 (V,φ), 使得如果 $g\in G$ 有

$$g=u_1u_2\cdots u_s=v_1v_2\cdots v_t,$$

其中 $u_i,v_j\in V$, 则按照 $u,v,w=uv\in V$ 可改记 uv 为 w 或改记 w 为 uv 这一步骤，经过有限次，可将 $u_1u_2\cdots u_s$ 变为 $v_1v_2\cdots v_t$.

给定李代数 $\tilde{\mathfrak{G}}$, 如何决定所有的连通李群，使得其李代数 $\mathfrak{G}$ 和 $\tilde{\mathfrak{G}}$ 同构？这个问题将放在下一节解决.

为了进一步研究李群，从群论角度，要寻找适当的子群. 最重要的是一维李子群，也称为单参数子群. 下面来决定所有一维李子群.

定义 3.1.32 李群 G 的普通子群又是子流形，若是李群，则称为 **李子群**. 当 G 的李子群作为普通子群为正规子群时，称为 **李正规子群**.

引理 3.1.33 李群 G 的普通子群 H 又是子流形，则必为李群，即为李群 G 的李子群.

证 由子流形的定义可知，在子流形 H 中任取一点 p, 在流形 G 中存在点 p 的标架 (V,ψ), 有

$$\psi(V)=\{(y_1,\cdots,y_n)\mid \forall\ |y_1|<\varepsilon,\cdots,|y_n|<\varepsilon\},$$

在子流形 H 中存在点 p 的标架 (U,φ), 使得

$$\varphi(U)=\{(y_1,\cdots,y_m)\mid |y_1|<\varepsilon,\cdots,|y_m|<\varepsilon\},$$

且 $U\subset V$, 又

$$\psi(U)=\{(y_1,\cdots,y_m,0,\cdots,0)\mid |y_1|<\varepsilon,\cdots,|y_m|<\varepsilon\}.$$

今任取 $q_1,q_2\in U\subset V$, 作为李群 G 中元素，有

$$\psi(q_1)=(x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0),\quad \psi(q_2)=(y_1,\cdots,y_m,0,\cdots,0),$$

若 $q_1q_2^{-1}=q_3\in U$, $\psi(q_3)=(z_1,\cdots,z_m,0,\cdots,0)$, 则 $z_1,\cdots,z_m$ 为 $x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m$ 的解析函数. 注意

$$\varphi(q_1)=(x_1,\cdots,x_m),\ \varphi(q_2)=(y_1,\cdots,y_m),\ \varphi(q_3)=(z_1,\cdots,z_m),$$

所以证明了关于子流形 H 的流形结构，$(q_1,q_2)\to q_1q_2^{-1}$ 解析. 再利用李群的左平移为双解析同胚，便证明了引理. 证完.

今设 G 为连通李群. 取定单位标架 (U,φ), 乘法函数 f, 辅助函数 $l_i^j(x)$, $1\le i,j\le n$. 设 H 为一维李子群. H 作为 G 中过单位元素 e 的单参数曲线 $\sigma(t),t\in\mathbb{R}$, 有

$$\sigma(h(t_1,t_2))=\sigma(t_1)\sigma(t_2),\quad h(t_1,0)=t_1,\ h(0,t_2)=t_2.$$

考虑过 e 点的小连通曲线段 $\sigma(t),|t|<\epsilon$. 这里，单位元素 e 的坐标为 0, 即有 $\sigma(0)=e$. 于是有 $\sigma(h(t_1,t_2))=f(\sigma(t_1),\sigma(t_2))$. 为方

便起见，我们仍用 $\sigma(t)$ 来表达李群 G 中点 $\sigma(t)$ 在单位标架 (U,φ) 中的坐标 $\varphi(\sigma(t))$. 于是有

$$\frac{\partial\sigma_j(h(t_1),t_2)}{\partial t_2}\Big|_{t_2=0}=\sum_i\frac{\partial f_j(\sigma(t_1),y)}{\partial y_i}\Big|_{y=0}\frac{\mathrm{d}\sigma_i(t_2)}{\mathrm{d}t_2}\Big|_{t_2=0}.$$

记

$$\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma_1(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0},\cdots,\frac{\mathrm{d}\sigma_n(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\Big)=(a_1,\cdots,a_n),$$

它是曲线 $\sigma(t)$ 在 $t=0$ 时的切向量. 于是方程为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_j(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\frac{\partial h(t_1,t_2)}{\partial t_2}\Big|_{t_2=0}=\sum_i l_i^j(\sigma(t_1))a_i.$$

考虑连通李群 G 中单参数曲线 $\sigma(t)$, 有

$$\sigma(t_1)\sigma(t_2)=\sigma(t_2)\sigma(t_1)=\sigma(t_1+t_2),\forall t_1,t_2\in\mathbb{R},$$

这时， $h(t_1,t_2)=t_1+t_2$, 因此有 $\sigma(0)=0$. $\sigma(t)$ 称为 **单参数子群**. 在 $|t|<\varepsilon$ 时，适合常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_j(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_i a_i l_i^j(\sigma(t)),\quad |t|<\varepsilon,\ 1\le j\le n.$$

且单参数子群 $\sigma(t)$ 中任一点 $\sigma(t_0)$, 这点的曲线段 $\sigma(t)$ 的切向量为 $X_{\sigma(t_0)}$, 其中 $X=\sum_{i=1}^n a_i l_i^j(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\in\mathfrak{G}$. 反之，我们有

引理 3.1.34 设 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数. 任取 $0\ne X\in\mathfrak{G}$, 则在 G 中存在且只存在一条单参数曲线段 $\sigma(t)$, $|t|<\varepsilon$, 其中 $\sigma(0)=e$, 且对曲线段 $\sigma(t)$ 中任一点 $\sigma(t_0)$, 这点的曲线段 $\sigma(t)$ 的**切向量**为 $X_{\sigma(t_0)}$.

证 在 G 中取定单位标架 (U,φ), 记乘法函数为 f, 辅助函数为 $l_i^j(x)$, $1\le i,j\le n$, 取 $X\in\mathfrak{G}$, $X\ne 0$, 其中

$$X=\sum_{ij}a_i l_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

如果曲线 $\sigma(t) \in U$ 存在，其中 $|t| < \varepsilon$, 则 $\sigma(t)$ 有坐标 $\varphi(\sigma(t)) = (\sigma_1(t), \cdots, \sigma_n(t))$, 它在点 $\sigma(t_0)$ 处的切向量为

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\sigma_j(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{x=\sigma(t_0)}. \tag{3.1.1}$$

由条件，此切向量应等于 $X_{\sigma(t_0)}$, 其中

$$X = \sum_{i,j} a_i l_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{3.1.2}$$

所以有

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_j(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_i a_i l_i^j(\sigma(t)), \quad |t| < \varepsilon. \tag{3.1.3}$$

因此导出微分方程组 (3.1.3). 由于 $\sigma(0) = 0$, 这给出初值. 由常微分方程组理论可知存在 $\varepsilon > 0$, 且有唯一解析解 $\sigma(t)$ 存在, $|t| < \varepsilon$. 证完.

下面用算子来表达此解析解. 首先，由引理 3.1.34 给出的解析解 $\sigma(t)$ 在 $t = 0$ 处的 Taylor 展开式为

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{\mathrm{d}^k \sigma(t)}{\mathrm{d}t^k}\Big|_{t=0}, \quad |t| < \varepsilon.$$

令

$$X_{\sigma(t)} = \sum_{i,j} a_i l_i^j(\sigma(t)) \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_{x=\sigma(t)}.$$

由 (3.1.3) 式有

$$X_{\sigma(t)} = \sum_j \frac{\mathrm{d}\sigma_j(t)}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \sigma_j(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^k \sigma(t)}{\mathrm{d}t^k} = X_{\sigma(t)}^k \sigma(t).$$

注意到初值 $\sigma(0)=0$, 因此有

$$\sigma(t)=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}X^k\Big)(x)_{x=0},\quad |t|<\varepsilon. \tag{3.1.4}$$

记偏微分算子

$$\operatorname{Exp} tX=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}X^k, \tag{3.1.5}$$

则有

$$\sigma(t)=(\operatorname{Exp} tX)(x)\big|_{x=0},\quad |t|<\varepsilon. \tag{3.1.6}$$

引进符号

$$\exp tX=(\operatorname{Exp} tX)(x)\big|_{x=0},\quad |t|<\varepsilon, \tag{3.1.7}$$

则有

$$\sigma(t)=\exp tX,\quad |t|<\varepsilon. \tag{3.1.8}$$

引理 3.1.35 (3.1.8) 式给出的常微分方程组 (3.1.3) 的唯一解析解 $\sigma(t)=\exp tX$ 有性质

$$\sigma(t_1+t_2)=\sigma(t_1)\sigma(t_2)=\sigma(t_2)\sigma(t_1), \tag{3.1.9}$$

其中 $|t_1|<\varepsilon$, $|t_2|<\varepsilon$, $|t_1+t_2|<\varepsilon$, 以及

$$\sigma(t)^{-1}=\sigma(-t),\quad |t|<\varepsilon. \tag{3.1.10}$$

证 记

$$\begin{aligned}&q_j(t)=\sigma_j(t+t_1),\ p_j(t)=f_j(\sigma(t_1),\sigma(t)),\ 1\le j\le n,\\&q(t)=(q_1(t),\cdots,q_n(t)),\ p(t)=(p_1(t),\cdots,p_n(t)),\end{aligned}$$

其中 f 为乘法函数. 于是

$$q(0)=\sigma(t_1),\quad p(0)=\sigma(t_1).$$

又

$$\frac{\mathrm{d}q_j(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\sigma_j(t+t_1)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\sigma_j(s)}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t+t_1}$$

$$=\sum_i a_i l_i^j(\sigma(t+t_1))=\sum_i a_i l_i^j(q(t)),$$

$$\frac{\mathrm{d}p_j(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_k \frac{\partial f_j(\sigma(t_1),y)}{\partial y_k}\Big|_{y=\sigma(t)}\frac{\partial\sigma_k(t)}{\mathrm{d}t}.$$

由 S.Lie 第一基本定理，有

$$\frac{\partial f_j(\sigma(t_1),y)}{\partial y_k}\Big|_{y=\sigma(t)}=\sum_v l_v^j(f(\sigma(t_1),\sigma(t)))\widetilde{l}_k^v(\sigma(t)),$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}p_j(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{i,k,v} l_v^j(f(\sigma(t_1),\sigma(t)))\widetilde{l}_k^v(\sigma(t))a_i l_i^k(\sigma(t))$$

$$=\sum_i a_i l_i^j(p(t)),\quad 1\le j\le n.$$

这证明了当 $|t|<\varepsilon$ 时，关于 t 的解析函数向量 $p(t)$, $q(t)$ 适合同样的常微分方程组和同样的初值. 由常微分方程组在原点附近解析解的存在唯一性, 可知 $p(t)=q(t)$, $|t|<\varepsilon_1$. 因此证明了 $\sigma(t+t_1)=\sigma(t_1)\sigma(t)$. 由 $\sigma(t_1+t)=\sigma(t+t_1)$ 可知 $\sigma(t_1+t_2)=\sigma(t_1)\sigma(t_2)=\sigma(t_2)\sigma(t_1)$ 对适当的 $\varepsilon>0$, $|t_1|<\varepsilon$, $|t_2|<\varepsilon$, $|t_1+t_2|<\varepsilon$ 成立.

取 $t_1=-t$, 则有 $0=\sigma(0)=\sigma(t-t)=\sigma(t)\sigma(-t)=\sigma(-t)\sigma(t)$. 这证明了当 $|t|<\varepsilon$ 时有 $\sigma(t)^{-1}=\sigma(-t)$. 证完.

利用引理 3.1.35, 我们可将 $\exp tX$, $|t|<\varepsilon$ 开拓到 $\mathbb{R}$ 上. 事实上，我们可证

引理 3.1.36 记 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数, 任取 $0\neq X\in\mathfrak{G}$, 则在李群 G 中存在且只存在一条单参数解析曲线 $\sigma(t)$, $\forall\ t\in\mathbb{R}$. 记

$$\sigma(t)=\exp tX,\quad \forall\ t\in\mathbb{R},\tag{3.1.11}$$

则有

(1)

$$\sigma(0) = e; \tag{3.1.12}$$

(2)

$$\sigma(t_1 + t_2) = \sigma(t_1)\sigma(t_2) = \sigma(t_2)\sigma(t_1), \quad \forall\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.1.13}$$

证　由引理 3.1.34 和 3.1.35, 我们已知存在 $\varepsilon > 0$, 当 $|t| < \varepsilon$ 时有适合性质 (3.1.12) 和 (3.1.13) 的唯一解析解 (3.1.11) 存在. 今任取自然数 N, 定义

$$\sigma(Nt) = \sigma(t)^N, \quad |t| < \varepsilon. \tag{3.1.14}$$

我们来证明此定义实际上与自然数 N 无关. 事实上, 若有 $t_1, t_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 和自然数 N_1, N_2, 使得

$$N_1 t_1 = N_2 t_2.$$

今 $|t_2| = |\frac{N_1 t_1}{N_2}| < \varepsilon$, 因此 $|\frac{k t_1}{N_2}| < \varepsilon$, $k = 1, 2, \cdots, N_1$. 所以

$$\sigma(\frac{t_1}{N_2})^{N_1} = \sigma(\frac{N_1 t_1}{N_2}) = \sigma(t_2),$$

而

$$\sigma(t_2)^{N_2} = (\sigma(\frac{t_1}{N_2})^{N_1})^{N_2} = (\sigma(\frac{t_1}{N_2})^{N_2})^{N_1} = \sigma(t_1)^{N_1}.$$

这证明了定义 (3.1.14) 的合理性.

今任取实数 t, 则存在自然数 N, 使得 $|\frac{t}{N}| < \varepsilon$, 所以

$$\sigma(t) = (\sigma(\frac{t}{N}))^N$$

有意义. 这样一来, 我们在李群 G 中定义了单参数曲线 $\sigma(t)$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$. 我们来证明这是解析曲线, 即 $\sigma(t)$ 关于 t 解析. 事实上, 取定 $t_0 \in \mathbb{R}$, 则存在自然数 N, 使得 $|\frac{t_0}{N}| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是当 $|t - t_0| < \varepsilon$ 时有 $|\frac{t}{N} - \frac{t_0}{N}| < \frac{\varepsilon}{2N}$, 因此 $|\frac{t}{N}| < \frac{\varepsilon}{2N} + |\frac{t_0}{N}| < \varepsilon$. 今 $\sigma(t) = \sigma(\frac{t}{N})^N$, 由

$\sigma(\frac{t}{N})$ 关于 t 解析，而李群乘法是解析的，所以证明了 $\sigma(t)$ 关于 t 解析. 这证明了断言.

显然 $\sigma(0)=e$. 最后证当 $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ 时，(3.1.13) 式成立. 事实上，存在自然数 N, 使得 $|\frac{t_1}{N}|<\varepsilon$, $|\frac{t_2}{N}|<\varepsilon$, $|\frac{t_1+t_2}{N}|<\varepsilon$, 因此有

$$\sigma(\frac{t_1+t_2}{N})=\sigma(\frac{t_1}{N})\sigma(\frac{t_2}{N})=\sigma(\frac{t_2}{N})\sigma(\frac{t_1}{N}).$$

即 $\sigma(\frac{t_1}{N})$ 和 $\sigma(\frac{t_2}{N})$ 可交换. 所以

$$\begin{aligned}\sigma(t_1+t_2)&=\sigma(\frac{t_1+t_2}{N})^N=(\sigma(\frac{t_1}{N})\sigma(\frac{t_2}{N}))^N\\&=\sigma(\frac{t_1}{N})^N\sigma(\frac{t_2}{N})^N=\sigma(t_1)\sigma(t_2).\end{aligned}$$

由 $\sigma(t_2+t_1)=\sigma(t_2)\sigma(t_1)$ 便证明了引理. 证完.

定理 3.1.37 设 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数, 任取 $0\neq X\in\mathfrak{G}$, 则唯一存在一个一维交换李子群 $\sigma(t)=\exp tX$, $\forall\ t\in\mathbb{R}$, 它有

$$\sigma(t_1)\sigma(t_2)=\sigma(t_2)\sigma(t_1)=\sigma(t_1+t_2),\quad \forall\ t_1,t_2\in\mathbb{R}. \tag{3.1.15}$$

证 由引理 3.1.36 可知，只要证 $\{\sigma(t)\mid\forall\ t\in\mathbb{R}\}$ 为流形 G 的一维子流形就行了. 由子流形的定义可知，只要证解析映射 $t\to\sigma(t)$ 的 Jacobian 的秩为 1. 由于 $\left.\frac{\mathrm{d}\sigma_j(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=0$, 可推出 $\sum\limits_i a_i l_i^j(\sigma(t))=0$, 这证明了 $(a_1,\cdots,a_n)=0$, 因此证明了 Jacobian 的秩为 1. 证完.

至此，我们在连通李群 G 中定义了一批一维实连通李群，即**单参数子群**, 它和李群 G 的李代数密切相关. 由于连通李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 中的元素由它在单位元素上的值唯一确定，即由单位元素 e 的切空间 $T_e(G)$ 中的元素唯一确定. 而且任给切空间 $T_e(G)$ 中一元素 α, 唯一存在一个单参数子群，使得它在单位元素上的切向量为 α. 事实上，我们要证

引理 3.1.38 记 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数. 任取 $0 \neq X \in \mathfrak{G}$, 则由 X 决定的单参数子群 $\exp tX$ 由单位切向量 X_e 唯一确定.

证 在李群 G 的单位元素 e 点的切空间 $T_e(G)$ 中取基

$$(\frac{\partial}{\partial x_1})_{x=0}, \cdots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_{x=0}.$$

于是任取 $X \in \mathfrak{G}$, 则 $X = \sum a_i l_i^j(x) \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, 其中 $l_i^j(x)$ 为辅助函数. 令 $\sigma(t) = \exp tX$ 适合微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_j(t)}{\mathrm{d}t} = \sum a_i l_i^j(\sigma(t)),\ 1 \leq j \leq n, |t| < \varepsilon.$$

于是 $\sigma(t)$ 实际上由常数 $a_1, \cdots, a_n$ 唯一确定, 证完.

定义 3.1.39 记 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数, 则存在 $\mathfrak{G}$ 到 G 内的映射

$$\exp : X \to \exp X,\ \forall X \in \mathfrak{G}$$

称为 **指数映射**. 这里, 约定 $\exp t0 = e$, 其中 0 为李代数 $\mathfrak{G}$ 中的零元素.

一般地说, $\exp \mathfrak{G} \neq G$. 但是我们有

定理 3.1.40 设 $\mathfrak{G}$ 为 n 维连通李群 G 的李代数, 则 n 维线性空间 $\mathfrak{G}$ 作为 n 维 Euclid 空间, 它也是解析流形, 且指数映射 exp 给出了 $\mathfrak{G}$ 到 G 内的解析映射, 它在 $\mathfrak{G}$ 的原点附近为局部双解析同胚.

证 由引理 3.1.36, $t \to \exp tX$ 解析. 在李群 G 中取定单位标架 (U, φ). 在李代数 $\mathfrak{G}$ 中取基

$$X_i = \sum_j l_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

任取 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 则 $\mathfrak{G}$ 中有元素 $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i X_i$. 构作常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_j(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_i x_i l_i^j(\sigma(t)), \quad 1 \leq j \leq n,$$

它适合初值 $\sigma(0)=0$. 则唯一解析解 $\sigma(t)=\exp t\sum_{i=1}^{n}x_iX_i$ 关于自变量 $x_1,\cdots,x_n$ 为解析函数, 其中 $|t|<\varepsilon(x_1,\cdots,x_n)$. 由李群乘法的解析性可知, $\sigma(t)$, $|t|<\varepsilon(x_1,\cdots,x_n)$ 能开拓到 $t\in\mathbb{R}$. 这时 $\sigma(t)$ 仍为 t 及参数 $x_1,\cdots,x_n$ 的解析函数. 这证明了 $\sigma(1)=\exp\sum_{i=1}^{n}x_iX_i$ 为 x 的解析函数. 所以 $X\to\exp X$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 到李群 G 内的解析函数.

最后证 $X\to\exp X$ 在原点附近为局部双解析同胚. 由隐函数存在定理可知, 只要它在原点的 Jacobian 不等于零即可. 今

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial(\exp\sum_{k}x_kX_k)_j}{\partial x_i}\right|_{x=0}&=\left.\frac{\partial(\exp x_iX_i)_j}{\partial x_i}\right|_{x_i=0}\\
&=l_i^j(\exp x_iX_i)\big|_{x_i=0}=\delta_{ij},
\end{aligned}
$$

所以它的 Jacobian 在原点的值等于 1. 证完.

推论 设 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数, 则 $\exp\mathfrak{G}$ 生成 G.

证 由引理 3.1.22 可知连通李群 G 由单位邻域生成, 但是由定理 3.1.40 可知 $\exp\mathfrak{G}$ 包含了连通李群 G 的一个单位邻域, 这证明了 $\exp\mathfrak{G}$ 生成 G. 证完.

利用定理 3.1.40, 我们可以在李群中引进一些极有用的可容许标架.

定理 3.1.41 记 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数. 在李代数 $\mathfrak{G}$ 中取定一组基 $X_1,\cdots,X_n$, 则在连通李群 G 中存在单位可容许标架 (U_i,φ_i), $i=1,2,3$, 使得

$$
\begin{aligned}
&U_1=\{\exp\sum_{i=1}^{n}x_iX_i\mid |x_1|<\varepsilon,\cdots,|x_n|<\varepsilon\},\\
&\varphi_1(\exp\sum_{i=1}^{n}x_iX_i)=(x_1,\cdots,x_n);\\
&U_2=\{\exp x_1X_1\exp x_2X_2\cdots\exp x_nX_n\mid |x_1|<\varepsilon,\cdots,|x_n|<\varepsilon\},\\
&\varphi_2(\exp x_1X_1\exp x_2X_2\cdots\exp x_nX_n)=(x_1,\cdots,x_n);
\end{aligned}
$$

$$U_3 = \{\exp \sum_{i=1}^{r} x_i X_i \exp \sum_{i=r+1}^{n} x_i X_i \mid |x_1| < \varepsilon, \cdots, |x_n| < \varepsilon\},$$

$$\varphi_3(\exp \sum_{i=1}^{r} x_i X_i \exp \sum_{i=r+1}^{n} x_i X_i) = (x_1, \cdots, x_n),$$

其中 (U_i, φ_i) 称为 **第 i 类标准标架**, $i = 1, 2, 3$.

证 由定理 3.1.40 可知 (U_1, φ_1) 为可容许单位标架.

记

$$\theta(x_1, \cdots, x_n) = (\exp x_1 X_1)(\exp x_2 X_2) \cdots (\exp x_n X_n),$$

则

$$\left.\frac{\partial \theta_j(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_i}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial (\exp x_i X_i)_j}{\partial x_i}\right|_{x=0} = \delta_{ij},$$

即 (U_2, φ_2) 为可容许标架.

再记

$$\theta(x_1, \cdots, x_n) = (\exp \sum_{i=1}^{r} x_i X_i)\, (\exp \sum_{i=r+1}^{n} x_i X_i),$$

则

$$\left.\frac{\partial \theta_j(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_i}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial (\exp x_i X_i)_j}{\partial x_i}\right|_{x=0} = \delta_{ij},$$

即 (U_3, φ_3) 为可容许标架. 证完.

于是有

引理 3.1.42 设 $\mathfrak{G}$ 为李群 G 的李代数, $X_1, \cdots, X_n$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的一组基. 记 (U_1, φ_1) 为李群 G 关于基 $X_1, \cdots, X_n$ 的第一类标准单位标架, 则对李代数 $\mathfrak{G}$ 中任一元素 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i$, 单参数子群 $\exp t \sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i$ 的坐标为

$$t(a_1, \cdots, a_n), \quad |t| < \frac{\varepsilon}{\max(|a_1|, \cdots, |a_n|)}.$$

为了讨论李群 G 的同态，我们需要用单参数子群的弱定义．即我们要证明

定理 3.1.43 李群 G 的连续曲线 $\sigma(t)$, $|t|<\varepsilon$ 若适合条件

$$\sigma(t_1+t_2)=\sigma(t_1)\sigma(t_2)=\sigma(t_2)\sigma(t_1),\quad \forall\ t_1,t_2\in\mathbb{R},$$

则 $\sigma(t)$ 为李群 G 的单参数子群.

证 令 $\sigma(0)=\sigma(0+0)=\sigma(0)^2$, 所以 $\sigma(0)=e$. 又 $\sigma(t)$ 关于 t 连续，所以在 G 中取定第一类标准单位标架 (U_1,φ_1), 则存在 $\varepsilon>0$, 使得 $\sigma(t)\in U_1$, $|t|<\varepsilon$. 取定 $t_0\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, $t_0\neq 0$. 记 $\sigma(t_0)$ 的坐标为 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$. 任取有理数 k, 使得 $|kt_0|<\varepsilon$, 则 $\sigma(kt_0)\in U$. 于是 $\sigma(kt_0)$ 的坐标为 $k\alpha$. 注意到 $\sigma(t)$ 关于 t 连续，所以可证任取实数 a, 只要 $|at_0|<\varepsilon$, 则 $\sigma(at_0)$ 的坐标为 $a\alpha$. 因此任取 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 记 $a=\dfrac{t}{t_0}$, 则 $\sigma(t)$ 的坐标为 $\dfrac{t}{t_0}\alpha$. 这证明了 $\sigma(t)$, $|t|<\varepsilon_1$ 关于 t 解析. 因此利用 $\sigma(Nt)=\sigma(t)^N$, $|t|<\varepsilon_1$ 可证 $\sigma(t)$, $\forall\ t\in\mathbb{R}$ 解析.

至此证明了 $\sigma(t)$ 为李群 G 中过单位元素 $\sigma(0)=e$ 的解析曲线. 为了证 $\sigma(t)$ 为单参数子群，我们要求 $\sigma(t)$ 适合的常微分方程组. 今

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_j(t+t_1)}{\mathrm{d}t_1}=\frac{\mathrm{d}f_j(\sigma(t),\sigma(t_1))}{\mathrm{d}t_1}=\sum_k l_k^j(\sigma(t))\frac{\mathrm{d}\sigma_k(t_1)}{\mathrm{d}t_1},$$

双方取 $t_1=0$, 有

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_j(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_k\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma_k(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\Big)l_k^j(\sigma(t)),$$

又有初值 $\sigma(0)=0$. 当 t 充分小时可知 $\sigma(t)$ 的坐标为 $\dfrac{t}{t_0}\alpha=\dfrac{t}{t_0}(a_1,\cdots,a_n)=t(b_1,\cdots,b_n)$. 所以证明了 $\sigma(t)=\exp t\sum b_jX_j$, 即证明了 $\sigma(t)$ 为单参数子群. 证完.

在结束这一节之前，我们给出一批重要的矩阵李群的例子，即给出若干常用的典型群．在这里，我们要用一个在 3.2 节中给出的定理 3.2.26, 即李群 G 的闭子集 H 若为普通子群，则按诱导拓扑为李子群．

在第 1 章中我们已经知道，对任意域 F, $\mathrm{gl}(n,F)$ 为一般线性李代数．显然取 $F=\mathbb{R}^n$ 或 $F=\mathbb{C}^n$, 则

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a_{11},\cdots,a_{1n},\cdots,a_{n1},\cdots,a_{nn}).$$

按照如此对应，我们可以理解 $\mathrm{gl}(n,F)$ 为 F^{n^2}. 由于矩阵 A 的行列式 $\det A$ 为 n^2 个元素的多元多项式，所以

$$\mathrm{GL}(n,F)=\{A\in \mathrm{gl}(n,F)\mid \det A\neq 0\}\subset \mathrm{gl}(n,F).$$

由于 $\{A\in \mathrm{gl}(n,F)\mid \det A=0\}$ 为 Euclid 空间 $\mathrm{gl}(n,F)$ 中的闭子集，所以 $\mathrm{GL}(n,F)=\mathrm{gl}(n,F)-\{A\in \mathrm{gl}(n,F)\mid \det A=0\}$ 为 Euclid 空间 $\mathrm{gl}(n,F)$ 中的开子集．按诱导拓扑， $\mathrm{GL}(n,F)$ 为解析子流形．另一方面，矩阵乘法使得 $\mathrm{GL}(n,F)$ 构成一个普通群．显然，任取 $A,B\in \mathrm{GL}(n,F)$, 则 $(A,B)\to AB^{-1}$ 关于矩阵 A 中元素及矩阵 B 中元素为自变量的解析函数．这证明了 $\mathrm{GL}(n,F)$ 为李群，称为 **一般矩阵群**. 现在考虑域 $F=\mathbb{R}$(或$\mathbb{C}$) 上的 n 维线性空间 $\mathfrak{L}$. 由于 $\mathfrak{L}$ 上的所有非异线性变换在 $\mathfrak{L}$ 中取定基后有非异方阵表示，所以我们自然地可在所有非异线性变换构成的集合 $\mathrm{GL}(\mathfrak{L})$ 中引进乘法及流形结构，使得它构成李群，称为 **一般线性群**. 由于一般线性群 $\mathrm{GL}(\mathfrak{L})$ 和一般矩阵群 $\mathrm{GL}(\dim\mathfrak{L},F)$ 同构，所以我们只考虑一般矩阵群 $\mathrm{GL}(n,F)$ 就够了．

定理 3.1.44 一般矩阵李群 $\mathrm{GL}(n,F)$ 当 $F=\mathbb{C}$ 时为连通李群；当 $F=\mathbb{R}$ 时双连通，这两个连通分支的代表元素可取 I 和 $\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1)$, 其中 I 为单位方阵．又 $\mathrm{GL}(n,F)$ 的李代数为一般矩阵李代数 $\mathrm{gl}(n,F)$, 且任取 $X\in \mathrm{gl}(n,F)$, 则由 X 唯一决定的单参数子群为 $\mathrm{e}^{tX}=\exp tX$, $\forall t\in F$.

证 当 $F=\mathbb{C}$ 时，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 为复一般矩阵李群. 任取 $A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, 考虑单参数曲线 $\mathrm{e}^{\sqrt{-1}t}A$. 今

$$\det \mathrm{e}^{\sqrt{-1}t}A=\mathrm{e}^{n\sqrt{-1}t}\det A\neq 0,\ \forall t\in\mathbb{R},$$

即 $\mathrm{e}^{\sqrt{-1}t}A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}),\ \forall t\in\mathbb{R}$. 显然 A 的特征根非零，所以存在实数 t_0, 使得 $\mathrm{e}^{\sqrt{-1}t_0}A$ 的特征根非实. 于是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 中有单参数曲线 $tA+(1-t)\mathrm{e}^{-\sqrt{-1}t_0}I,\ 0\leq t\leq 1$, 它连接 A 和 $\mathrm{e}^{-\sqrt{-1}t_0}I$. 再实连续曲线 $\mathrm{e}^{\sqrt{-1}t}(\mathrm{e}^{-\sqrt{-1}t_0}I)$ 连接 $\mathrm{e}^{-\sqrt{-1}t_0}I$ 和 I. 这证明了 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 连通. 当 $F=\mathbb{R}$ 时，我们可证明

$$\{A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\mid \det A>0\}$$

连通，且 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 双连通，另一连通分支为

$$\{A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\mid \det A<0\}.$$

下面来求 $\mathrm{GL}(n,F)$ 的李代数. 今 $\mathrm{GL}(n,F)$ 的乘法函数为：任取 $X=(x_{ij}),\ Y=(y_{ij})\in\mathrm{GL}(n,F)$, 则 $Z=XY=(z_{ij})$, 其中

$$z_{ij}=\sum_{k=1}^{n}x_{ik}y_{kj},\quad 1\leq i,j\leq n.$$

辅助函数也用双指标表示，即有

$$l_{ij}^{pq}(X)=\left.\frac{\partial z_{pq}}{\partial y_{ij}}\right|_{Y=0}=x_{pi}\delta_{qj},\quad 1\leq i,j,p,q\leq n.$$

于是，李群 $\mathrm{GL}(n,F)$ 的李代数 $\mathfrak{G}$ 有基

$$X_{ij}=\sum_{p,q}l_{ij}^{pq}(x)\frac{\partial}{\partial x_{pq}}=\sum_{p,q}x_{pi}\delta_{qj}\frac{\partial}{\partial x_{pq}}=\sum_{p}x_{pi}\frac{\partial}{\partial x_{pj}},$$

其中 $1\leq i,j\leq n$. 因此，李代数 $\mathfrak{G}$ 中的一般元素可表示为

$$A=\sum_{i,j}a_{ij}X_{ij}=\sum_{i,j,p}a_{ij}x_{pi}\frac{\partial}{\partial x_{pj}}.$$

在李代数 $\mathfrak{G}$ 中任取两元素

$$A=\sum_{i,j,p}a_{ij}x_{pi}\frac{\partial}{\partial x_{pj}},\quad B=\sum_{i,j,p}b_{ij}x_{pi}\frac{\partial}{\partial x_{pj}},$$

则有

$$[A,B]=\sum_{i,j,p}\Big(\sum_{k}(a_{ik}b_{kj}-b_{ik}a_{kj})\Big)x_{pi}\frac{\partial}{\partial x_{pj}}.$$

因此建立对应

$$A=\sum_{i,j,p}a_{ij}x_{pi}\frac{\partial}{\partial x_{pj}}\to(a_{ij}),\ B=\sum_{i,j,p}b_{ij}x_{pi}\frac{\partial}{\partial x_{pj}}\to(b_{ij}).$$

显然，这是李代数 $\mathfrak{G}$ 中元素关于基 X_{ij}，$1\le i,j\le n$ 的坐标．因此，上面的计算给出

$$[A,B]\ \to\ (a_{ij})(b_{ij})-(b_{ij})(a_{ij})=[(a_{ij}),(b_{ij})].$$

所以一般矩阵群 $\mathrm{GL}(n,F)$ 的李代数 $\mathfrak{G}$ 中的元素对应它的坐标，则坐标在一般矩阵李代数 $\mathrm{gl}(n,F)$ 中，且上面的讨论证明了李代数 $\mathfrak{G}$ 和李代数 $\mathrm{gl}(n,F)$ 同构．在这个意义下，今后我们也称 $\mathrm{gl}(n,F)$ 为李群 $\mathrm{GL}(n,F)$ 的李代数．

最后，我们任取 $A\in\mathrm{gl}(n,F)$，记 $A=(a_{ij})$，于是它唯一决定李代数 $\mathfrak{G}$ 中的元素仍用 A 表示，则 $A=\sum\limits_{i,j,p}a_{ij}x_{pi}\frac{\partial}{\partial x_{pj}}$．于是，$A$ 决定的单参数子群 $\sigma(t)=(\sigma_{ij}(t))$ 由常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{ij}(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{p}\sigma_{ip}(t)a_{pj},\quad 1\le i,j\le n$$

的适合初值 $\sigma_{ij}(0)=\delta_{ij}$，$1\le i,j\le n$ 的唯一解析解决定．写成矩阵形式，即为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}=\sigma(t)A,\quad \sigma(0)=I.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}^k\sigma(t)}{\mathrm{d}t^k}=\sigma(t)A^k,\quad k=0,1,2,\cdots.$$

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k\sigma(t)}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=0}=\sigma(0)A^k=A^k,\quad k=0,1,\cdots.$$

这证明了适合初值的唯一解析解为

$$\sigma(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left.\frac{\mathrm{d}^k\sigma(t)}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=0}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k=\mathrm{e}^{tA}.$$

这证明了由李代数 $\mathrm{gl}\,(n,\mathbb{R})$ 中元素 A 决定的单参数子群为

$$\exp tA=\mathrm{e}^{tA},\qquad \forall t\in\mathbb{R}.$$

证完.

下面给出一批重要的矩阵李群 (即 $\mathrm{GL}\,(n,F)$ 的子群) 的例子，它们主要都是闭子群. 也有一些不是闭子群.

例 1 在一般线性李代数 $\mathrm{gl}\,(n,F)$ 中，考虑子空间

$$\mathrm{sl}\,(n,F)=\{X\in\mathrm{gl}\,(n,F)\mid \mathrm{tr}\,X=0\}.$$

显然，任取 $X,Y\in\mathrm{gl}\,(n,F)$, 则 $\mathrm{tr}\,([X,Y])=\mathrm{tr}\,(XY-YX)=0$. 这证明了

$$[\mathrm{gl}\,(n,F),\mathrm{gl}\,(n,F)]\subset\mathrm{sl}\,(n,F).$$

由此可知， $\mathrm{sl}\,(n,F)$ 为李代数 $\mathrm{gl}\,(n,F)$ 的理想，且

$$\dim\mathrm{sl}\,(n,F)=n^2-1.$$

$\mathrm{sl}\,(n,F)$ 称为**特殊矩阵李代数**.

我们在一般矩阵李群 $\mathrm{GL}\,(n,F)$ 中计算由子代数 $\mathrm{sl}\,(n,F)$ 决定的连通李子群 $\mathrm{SL}\,(n,F)$ 如下:

由于

$$\det(\exp X)=\exp(\mathrm{tr}\,X),\quad\forall\ X\in\mathrm{gl}\,(n,F),$$

所以 $A\in \mathrm{sl}(n,F)$ 当且仅当 $\exp A\in\{X\in \mathrm{GL}(n,F)\mid \det X=1\}$. 因此构作集合

$$\mathrm{SL}(n,F)=\{X\in \mathrm{GL}(n,F)\mid \det X=1\}.$$

显然, $\mathrm{SL}(n,F)$ 为 $\mathrm{GL}(n,F)$ 中的普通子群, 又为 $\mathrm{GL}(n,F)$ 中的闭子集, 所以 $\mathrm{SL}(n,F)$ 为李子群. 称为**特殊矩阵李群**.

下面来证明 $\mathrm{SL}(n,F)$ 的李代数为 $\mathrm{sl}(n,F)$. 事实上, 记李代数为 $\mathfrak{G}$, 任取 $A\in\mathfrak{G}$, 则 $\exp tA\in \mathrm{SL}(n,F)$, 即 $\det(\exp tA)=\exp t\mathrm{tr}(A)=1$, $\forall t\in\mathbb{R}$. 双方对 t 求导数, 再令 $t=0$, 便证明了 $\mathrm{tr}\,A=0$, 即 $A\in\mathrm{sl}(n,F)$. 反之, 任取 $A\in\mathrm{sl}(n,F)$, 由 $\mathrm{tr}\,A=0$ 可知 $\det(\exp tA)=1$, $\forall t\in\mathbb{R}$. 这证明了 $\mathrm{sl}(n,F)$ 为 $\mathrm{SL}(n,F)$ 的李代数.

注意到域 $F=\mathbb{R}$ 或 $F=\mathbb{C}$, 任取域 F 上的 $n\times n$ 对称方阵 S, 考虑 $\mathrm{GL}(n,F)$ 中的子集

$$G(S)=\{X\in \mathrm{GL}(n,F)\mid XSX'=S\}.$$

显然, $G(S)$ 为一般矩阵群 $\mathrm{GL}(n,F)$ 中的普通子群, 且为闭子集, 因此 $G(S)$ 为李子群. 现在记李子群 $G(S)$ 的李代数 $g(s)\subset \mathrm{gl}(n,F)$. 任取 $X\in\mathrm{gl}(n,F)$. 设若 $\exp tX\in G(S)$, $\forall t\in\mathbb{R}$, 即有

$$(\exp tX)S(\exp tX')=S,\quad \forall\ t\in\mathbb{R}.$$

双方对 t 求导数, 再令 $t=0$, 则有

$$XS+SX'=0,$$

即 $\mathrm{gl}(n,F)$ 中子集

$$\tilde{g}(S)=\{X\in\mathrm{gl}(n,F)\mid XS+SX'=0\}\supset g(S).$$

显然, $\tilde{g}(S)$ 为 $\mathrm{gl}(n,F)$ 的子代数. 且任取 $X\in\tilde{g}(S)$, 即有 $XS+SX'=0$, 则不难证明

$$\sum_{k=0}^{m}C_m^kX^kS(X')^{m-k}=0.$$

于是可证 $(\exp tX)S(\exp tX)' = S$, $\forall t \in \mathbb{R}$. 这证明了 $\exp tX \in G(S)$. 因此闭子群 $G(S)$ 的李代数为 $g(S)$.

下面取各种不同的对称方阵 S, 可得一系列重要的典型群.

例 2 取 $S = I$ 为单位方阵, 则

$$G(I) = \mathrm{O}\,(n, F) = \{A \in \mathrm{GL}\,(n, F) \mid AA' = I\},$$

它称为域 F 上的 **正交群**. 当 $F = \mathbb{R}$ 时称为 **实正交群**, 用处较大; 当 $F = \mathbb{C}$ 时称为 **复正交群**, 用处较少. $\mathrm{O}\,(n, F)$ 中元素称为 **正交方阵**.

令 $G(I) = \mathrm{O}\,(n, F)$ 的李代数 $g(I) = \mathrm{o}\,(n, F)$ 为

$$\mathrm{o}\,(n, F) = \{X \in \mathrm{gl}\,(n, F) \mid X + X' = 0\}.$$

所以由 $\dim \mathrm{o}\,(n, F) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 可知

$$\dim \mathrm{O}\,(n, F) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

正交群不连通, 它的单位连通分支为

$$\mathrm{SO}\,(n, F) = \mathrm{O}\,(n, F) \cap \mathrm{SL}\,(n, F),$$

称为 **特殊正交群**. 正交群双连通, 它的两个分支代表元素分别为 I 及 $\mathrm{diag}\,(1, \cdots, 1, -1)$.

另一方面, 可证

$$\exp \mathrm{o}\,(n, F) = \mathrm{SO}\,(n, F).$$

例 3 取一般线性群 $\mathrm{GL}\,(2n, F)$ 中的反对称方阵

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I^{(n)} \\ -I^{(n)} & 0 \end{pmatrix},$$

则

$$G(S) = \mathrm{Sp}\,(n, F) = \{A \in \mathrm{GL}\,(2n, F) \mid ASA' = S\},$$

它称为 **辛群**. $G(S)$ 中元素称为 **辛方阵**. 它在辛几何中扮演了重要角色. 它的李代数为

$$g(S) = \mathrm{sp}\,(n, F) = \{A \in \mathrm{gl}\,(n, F) \mid AS + SA' = 0\}.$$

计算 $\mathrm{sp}\,(n, F)$ 的维数, 可知

$$\dim \mathrm{Sp}\,(n, F) = 2n^2 + n.$$

证明 $\mathrm{Sp}\,(m, F)$ 的连通性是一个较难的线性代数习题. 另一方面, 可证

$$\mathrm{Sp}\,(n, F) = \exp \mathrm{sp}\,(n, F).$$

例 4 取 p, q 为自然数, $p + q = n$, $p \geq q$. 记 $n \times n$ 对称方阵

$$S = \begin{pmatrix} I^{(p)} & 0 \\ 0 & -I^{(q)} \end{pmatrix}.$$

则

$$G(S) = \mathrm{O}\,(p, q; F) = \{A \in \mathrm{GL}\,(n, F) \mid ASA' = S\}$$

称为 **(p, q) 型 Lorentz 群**. 在实的情形, 且 $p = 3$, $q = 1$, 是 Einstein 用于相对论中的运动群.

$\mathrm{O}\,(p, q; F)$ 中元素称为 **(p, q) 型 Lorentz 方阵**, $\mathrm{O}\,(p, q; F)$ 的李代数 $\mathrm{o}\,(p, q; F) = \{X \in \mathrm{gl}\,(n, F) \mid XS + SX' = 0\}$. 计算 $\mathrm{o}\,(p, q; F)$ 的维数可知

$$\dim \mathrm{O}\,(p, q; F) = \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}(p+q)(p+q-1).$$

(p, q) 型 Lorentz 群双连通, 其单位连通分支由 $\exp \mathrm{o}\,(p, q; F)$ 生成, 另一连通分支有代表元素 $\mathrm{diag}\,(-1, 1, \cdots, 1)$.

现在在复李代数 $\mathrm{gl}\,(n, \mathbb{C})$ 中构造实李子代数. 实际上, 我们可以给出一个一般原则如下:

设 $\mathfrak{G}$ 为实李代数, $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C$ 为其复化. 在 $\mathfrak{G}$ 中取基 $e_1, \cdots, e_n$, 则有乘法表

$$[e_i, e_j] = \sum_k C_{ij}^k e_k,$$

其中 $C_{ij}^k \in \mathbb{R}$, $1 \leq i,j,k \leq n$. 我们知道复李代数 $\mathfrak{L}$ 有复基 $e_1,\cdots,e_n$, 在 $\mathfrak{L}$ 中考虑元素

$$e_1,\cdots,e_n,\sqrt{-1}e_1 = f_1,\cdots,\sqrt{-1}e_n = f_n.$$

显然它实线性无关, 所以 $\mathfrak{L}$ 作为 $2n$ 维实线性空间, 其中元素

$$x = \sum_{i=1}^n (a_i + \sqrt{-1}b_i)e_i = \sum_{i=1}^n a_i e_i + \sum_{i=1}^n b_i f_i,$$

其中 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. $\mathfrak{L}$ 作为 $2n$ 维实李代数, 记作 $\mathfrak{L}_R$, 它关于上述基有乘法表

$$\begin{aligned}
&[e_i, e_j] = \sum_k C_{ij}^k e_k,\\
&[e_i, f_j] = [e_i, \sqrt{-1}e_j] = \sum_k C_{ij}^k(\sqrt{-1}e_k) = \sum_k C_{ij}^k f_k,\\
&[f_i, f_j] = [\sqrt{-1}e_i, \sqrt{-1}e_j] = -\sum_k C_{ij}^k e_k.
\end{aligned}$$

今 $e_1,\cdots,e_n$ 是实线性空间 $\mathfrak{G}$ 的基, $f_1 = \sqrt{-1}e_1,\cdots,f_n = \sqrt{-1}e_n$ 是实线性空间 $\sqrt{-1}\mathfrak{G}$ 的基. 又

$$\mathfrak{L}_R = \mathfrak{G} + \sqrt{-1}\mathfrak{G}, \quad \mathfrak{G} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{G} = 0,$$

有

$$[\mathfrak{G},\mathfrak{G}] \subset \mathfrak{G}, \quad [\mathfrak{G},\sqrt{-1}\mathfrak{G}] \subset \sqrt{-1}\mathfrak{G}, \quad [\sqrt{-1}\mathfrak{G},\sqrt{-1}\mathfrak{G}] \subset \mathfrak{G}.$$

在实李代数 $\mathfrak{G}_R$ 中引进线性映射 J_0:

$$e_i \ \to \ \sqrt{-1}e_i = f_i, \quad f_i = \sqrt{-1}e_i \ \to \ -e_i.$$

则有

$$J_0^2 = -\mathrm{id}, \qquad J_0[x,y] = [J_0x, y], \quad \forall\ x,y \in \mathfrak{L}_R.$$

一般来说, 并不是对任意 $2n$ 维实李代数 $\mathfrak{G}_1$, 都存在一个 n 维实李代数 $\mathfrak{G}$, 使得 $\mathfrak{G}$ 的复化 $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C$ 作为实李代数 $\mathfrak{L}_R$, 同构于 $\mathfrak{G}_1$. 我们有

引理 3.1.45 设 $\mathfrak{G}_1$ 为 $2n$ 维实李代数，存在 n 维复李代数 $\mathfrak{L}$, 使得 $\mathfrak{L}_R$ 同构于 $\mathfrak{G}_1$ 的充分且必要条件为在 $\mathfrak{G}_1$ 上存在线性变换 J_0, 使得

(1) $J_0^2 = -\mathrm{id}$;

(2) $J_0[x,y] = [J_0 x, y], \quad \forall x, y \in \mathfrak{G}_1$;

(3) $\mathfrak{G}_1$ 中有 n 维实子代数 $\mathfrak{G}$, 使得

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G} + J_0(\mathfrak{G}), \quad \mathfrak{G} \cap J_0(\mathfrak{G}) = 0.$$

证 设 $\mathfrak{G}_1$ 为 $2n$ 维实李代数，$\mathfrak{G}_1$ 上有线性同构 J_0, 使得它适合条件 (1),(2),(3). 在实子代数 $\mathfrak{G}$ 中任取基 $e_1, \cdots, e_n$. 设 $f_i = J_0 e_i$, $1 \le i \le n$, 于是 $f_1, \cdots, f_n$ 为 $J_0(\mathfrak{G})$ 的基. 由 $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G} + J_0(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G} \cap J_0(\mathfrak{G}) = 0$ 可知 $e_1, \cdots, e_n$, $f_1, \cdots, f_n$ 为实李代数 $\mathfrak{G}_1$ 的基. 而 J_0 的条件 (1) 等价于

$$J_0 e_i = f_i, \quad J_0 f_i = -e_i.$$

代入条件 (2), 即有

$$\begin{aligned}
&J_0[e_i, e_j] = [J_0 e_i, e_j] = [f_i, e_j], \\
&J_0[e_i, f_j] = [J_0 e_i, f_j] = [f_i, f_j], \\
&J_0[f_i, f_j] = [J_0 f_i, f_j] = [-e_i, f_j] = -[e_i, f_j] = [f_j, e_i].
\end{aligned}$$

由于 $e_1, \cdots, e_n$ 为子代数 $\mathfrak{G}$ 的基，故乘法表有

$$[e_i, e_j] = \sum C_{ij}^k e_k.$$

于是

$$\sum C_{ij}^k f_k = J_0[e_i, e_j] = [f_i, e_j] = J_0[f_j, f_i].$$

所以

$$[f_i, f_j] = -J_0 \sum C_{ji}^k f_k = -\sum C_{ij}^k e_k.$$

但是 $J_0[e_i,f_j]=[f_i,f_j]$, 即有

$$[e_i,f_j]=-J_0[f_i,f_j]=J_0\sum C_{ij}^k e_k=\sum C_{ij}^k f_k.$$

现在考虑 $\mathfrak{G}^C=\mathfrak{L}$, 于是 $\mathfrak{L}_R$ 为实李代数, 它有基

$$e_1,\cdots,e_n,\ \sqrt{-1}e_1,\cdots,\sqrt{-1}e_n.$$

而

$$[e_i,e_j]=\sum C_{ij}^k e_k,\quad [e_i,\sqrt{-1}e_j]=\sum C_{ij}^k(\sqrt{-1}e_k),$$
$$[\sqrt{-1}e_i,\sqrt{-1}e_j]=-\sum C_{ij}^k e_k.$$

因此利用对应 σ:

$$e_i\to e_i,\quad f_i\to\sqrt{-1}e_i,$$

便建立了李代数 $\mathfrak{G}_1$ 到李代数 $\mathfrak{L}_R$ 上的李代数同构.

反之, 若李代数 $\mathfrak{G}_1$ 和 $\mathfrak{L}_R$ 同构. 由于 $\mathfrak{L}_R$ 是由 n 维实李代数 $\mathfrak{G}$ 的复化 $\mathfrak{L}$ 而得, 所以在同构意义下无妨设 $\mathfrak{L}_R=\mathfrak{G}_1$. 对 $\mathfrak{G}$ 中基 $e_1,\cdots,e_n$, 已知 $\mathfrak{L}_R$ 上有线性同构 J_0, 使得 $f_i=J_0e_i$, $1\le i\le n$, 因此 $\mathfrak{L}_R$ 有基 $e_1,\cdots,e_n$, $J_0e_1=f_1,\cdots,J_0e_n=f_n$, 于是有 $\mathfrak{L}_R=\mathfrak{G}+J_0(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G}\cap J_0(\mathfrak{G})=0$. 即条件 (3) 成立, 其中 $J_0^2=-\mathrm{id}$. 由于 $[e_i,e_j]=-[f_i,f_j]=-J_0[e_i,f_j]$, 所以有 $J_0[x,y]=[J_0x,y]$, $\forall\, x,y\in\mathfrak{L}_R$. 这证明了 (2) 成立. 引理证完.

今若 G 为 n 维复李群, 由复流形的定义可知, 在 G 中任取标架 (U,φ), 则 $z=\varphi(u)=(z_1,\cdots,z_n)$, $\forall u\in U$. 记 $z_i=x_i+\sqrt{-1}x_{n+i}$, $1\le i\le n$, 又 $x=(x_1,\cdots,x_n,\ x_{n+1},\cdots,x_{2n})$, 则 $u\to x$ 给出实标架 $(U,\tilde{\varphi})$. 因此, n 维复流形是一类特殊的 $2n$ 维实流形, 改记作 G_R, 且不难证明 G_R 为 $2n$ 维实李群.

反之, 并不是任意 $2n$ 维实李群都可作为 n 维复李群.

下面给出在一般线性复李群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 中寻找实李子群的一种构造方法.

在 $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ 中取定 Hermite 方阵 H, 在 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 中定义子集

$$G(H)=\{A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\mid AH\overline{A}'=H\}.$$

显然 $G(H)$ 为实李群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})_R$ 中的普通子群，且为闭子集，所以是闭李子群，它的李代数为

$$g(H)=\{X\in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})\mid XH+H\overline{X}'=0\}.$$

显然 $g(H)$ 为实李代数，而不是复李代数.

例 5 取 $H=I$，则

$$G(I)=\mathrm{U}(n)=\{A\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\mid A\overline{A}'=I\}.$$

$\mathrm{U}(n)$ 称为 **酉群**，其中元素称为 **酉方阵**. 它的李代数为

$$g(I)=\mathrm{u}(n)=\{X\in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})\mid X+\overline{X}'=0\}.$$

计算 $\mathrm{u}(n)$ 的实维数，可知

$$\dim_R \mathrm{U}(n)=n^2.$$

且可证 $\mathrm{U}(n)$ 为紧连通李群，又 $\exp \mathrm{u}(n)=\mathrm{U}(n)$.

例 6 $\mathrm{SU}(n)=\mathrm{U}(n)\cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 仍为实李群，称为 **特殊酉群**，它的李代数为

$$\begin{aligned}\mathrm{su}(n)&=\{X\in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})\mid X+\overline{X}'=0,\ \mathrm{tr}\,X=0\}\\&=\mathrm{u}(n)\cap \mathrm{sl}(n,\mathbb{C}).\end{aligned}$$

计算 $\mathrm{su}(n)$ 的实维数，可知

$$\dim_R \mathrm{SU}(n)=n^2-1.$$

且易证 $\mathrm{SU}(n)$ 为连通紧李群，又 $\exp \mathrm{su}(n)=\mathrm{SU}(n)$.

例 7 取自然数 p 及 q, $p+q=n$, $p\geq q$. 记

$$H=\begin{pmatrix} I^{(p)} & 0\\ 0 & -I^{(q)}\end{pmatrix},$$

则

$$G(H)=\mathrm{U}(p,q)=\{A\in \mathrm{GL}(p+q,n)\mid AH\overline{A}'=H\}$$

为实李群，称为 (p, q) 型酉群, 它的李代数为

$$\mathrm{u}(p,q)=\{X\in \mathrm{gl}(p+q,\mathbb{C})\mid XH+H\overline{X}'=0\}.$$

计算李代数 $\mathrm{u}(p,q)$ 的实维数，可知

$$\dim_R \mathrm{u}(p,q)=(p+q)^2.$$

易证 $\mathrm{U}(p,q)$ 为连通李群.

例 8 $\mathrm{SU}(p,q)=\mathrm{U}(p,q)\bigcap \mathrm{SL}(p+q,\mathbb{C})$ 仍为实李群，称为 (p, q) 型特殊酉群. 它的李代数为

$$\mathrm{su}(p,q)=\{X\in \mathrm{gl}(p+q,\mathbb{C})\mid XH+H\overline{X}'=0,\ \mathrm{tr}\,X=0\}.$$

计算 $\mathrm{su}(p,q)$ 的实维数，便证明了

$$\dim_R \mathrm{SU}(p,q)=(p+q)^2-1.$$

易证 $\mathrm{SU}(p,q)$ 为连通李群.

例 9 取 p,q 为非负整数， $p+q=n, p\le q$. 记

$$J=\begin{pmatrix} 0 & I^{(n)} \\ -I^{(n)} & 0 \end{pmatrix},\quad K_{p,q}=\mathrm{diag}\,(I^{(p)},-I^{(q)},I^{(p)},-I^{(q)}).$$

则

$$\mathrm{Sp}(p,q)=\{A\in \mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})\mid AJA'=J,\ AK_{pq}\overline{A}'=K_{pq}\}$$

为实李群，它是复辛群 $\mathrm{Sp}(p+q,\mathbb{C})$ 的实子群，称为 (p, q) 型辛群. 它的李代数为

$$\begin{aligned}\mathrm{sp}(p,q)=\{X\in \mathrm{gl}(p+q,\mathbb{C})\mid XJ+JX'=0,\\ XK_{pq}+K_{pq}\overline{X}'=0\}.\end{aligned}$$

计算 $\mathrm{sp}(p,q)$ 的实维数，可知

$$\dim_R \mathrm{Sp}(p,q)=2(p+q)^2-(p+q).$$

可以证明 $\mathrm{Sp}(p,q)$ 为连通李群. 当 $p=0$, $q=n$ 时, 有

$$\mathrm{Sp}(0,n)=\mathrm{Sp}(n),$$

称为 **酉辛群**.

例 10 $\mathrm{SO}^*(2n)=\{A\in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})\mid AJ\overline{A}'=J,\ AA'=I\}$ 为连通实李群, 它的李代数为

$$\mathrm{so}^*(2n)=\{X\in \mathrm{gl}(2n,\mathbb{C})\mid XJ+J\overline{X}'=0,\ X+X'=0\}.$$

计算 $\mathrm{so}^*(2n)$ 的实维数, 可知

$$\dim_R \mathrm{SO}^*(2n)=2n^2-n.$$

李群 $\mathrm{SO}^*(2n)$ 称为 **特殊正交星群**.

例 11 $\mathrm{U}^*(2n)=\{A\in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})\mid AJ=J\overline{A}\}$ 是实李群. 它的李代数为

$$\mathrm{u}^*(2n)=\{X\in \mathrm{gl}(2n,\mathbb{C})\mid XJ=J\overline{X}\}.$$

计算 $\mathrm{u}^*(2n)$ 的实维数, 可知

$$\dim_R \mathrm{U}^*(2n)=4n^2.$$

$\mathrm{U}^*(2n)$ 称为 **酉星群**. 它实连通.

例 12 $\mathrm{SU}^*(2n)=\mathrm{U}^*(2n)\cap \mathrm{SL}(2n,\mathbb{C})$ 是实连通李群. 它的李代数为

$$\mathrm{su}^*(2n)=\{X\in \mathrm{gl}(2n,\mathbb{C})\mid XJ=J\overline{X},\ \mathrm{tr}\,X=0\}.$$

计算李代数 $\mathrm{su}^*(2n)$ 的实维数, 可知

$$\dim_R \mathrm{SU}^*(2n)=4n^2-1.$$

李群 $\mathrm{SU}^*(2n)$ 称为 **特殊酉星群**.

§ 3.2　李群的同态

定义 3.2.1　李群 G_1 到 G_2 内的映射 σ 称为 (李群的)**同态映射**, 如果 σ 是普通群同态, 且是流形的连续映射. 这时称李群 G_1 和 G_2**同态**. 若 σ 为李群 G_1 到 G_2 上的普通同构, 且为流形的同胚, 则 σ 称为李群 G_1 到 G_2 上的 (李群的)**同构映射**. 这时称李群 G_1 和 G_2**互相同构**.

现在开始研究李群的同态.

定理 3.2.2　李群 G_1 到 G_2 上的同态映射 σ 为解析映射, 且**同态核**$\sigma^{-1}(0)$ 为李群 G_1 的闭正规 (李) 子群.

证　利用左平移为李群上的双解析同胚, 所以为了证同态映射 σ 为解析映射, 只要在单位元素的一个标架 (U,φ) 上证明解析就够了. 我们取 (U,φ) 为李群 G_1 的第二类标准单位标架, 于是 U 中的点可表示为

$$p=(\exp x_1X_1)(\exp x_2X_2)\cdots(\exp x_nX_n),$$

而 $\varphi(p)=x=(x_1,\cdots,x_n)$, $|x_1|<\varepsilon,\cdots,|x_n|<\varepsilon$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为李群 G_1 的李代数 $\mathfrak{G}_1$ 的一组基. 由 σ 为同态, 有

$$\sigma(p)=\sigma(\exp x_1X_1)\sigma(\exp x_2X_2)\cdots\sigma(\exp x_nX_n).$$

由李群的乘法的解析性可知, 问题化为任取 $X\in\mathfrak{G}_1$, 则 $\sigma(\exp tX)$ 关于 t 在 $|t|<\varepsilon$ 解析. 今 $\sigma(\exp 0X)=\sigma(e_1)=e_2$, 其中 e_i 为李群 G_i 的单位元素, $i=1,2$. 又

$$\exp(t_1+t_2)X=(\exp t_1X)(\exp t_2X)=(\exp t_2X)(\exp t_1X),$$

所以证明了

$$\sigma(\exp(t_1+t_2)X)=\sigma(\exp t_1X)\sigma(\exp t_2X)=\sigma(\exp t_2X)\sigma(\exp t_1X).$$

记 $\tau(t)=\sigma(\exp tX)$, $|t|<\varepsilon$, 它是李群 G_2 的过单位元素的单参数曲线, 且关于 t 连续. 又有

$$\tau(t_1+t_2)=\tau(t_1)\tau(t_2)=\tau(t_2)\tau(t_1),$$

由定理 3.1.43 可知它是李群 G_2 的单参数子群的穿过单位元素的曲线段. 这证明了 $\tau(t)$ 关于 t 解析. 至此证明了李群的同态为解析映射.

熟知同态核为普通正规子群, 且为李群 G_1 的闭子集, 所以同态核为李群 G_1 的闭李正规子群. 证完.

我们有下面两个重要推论:

推论 1 李群的同构为双解析同胚.

推论 2 若普通群 G 上能引进两种解析结构, 使得它们成为李群, 如果它们的拓扑相同, 则解析结构相同.

证 考虑恒等映射 id. 由于拓扑相同, 所以 id 为同胚. 由定理 3.2.2 可知 id 为双解析同胚, 即这两个李群的解析结构相同. 证完.

关于李群同态, 有下面的重要性质:

定理 3.2.3 设 σ 为李群 G_1 到 G_2 上的同态映射. 记 $\mathfrak{G}_i$ 为李群 G_i 的李代数, $i=1,2$. 则 σ_* 是李代数 $\mathfrak{G}_1$ 到 $\mathfrak{G}_2$ 上的同态映射, 且有

$$\sigma(\exp X)=\exp\sigma_*(X),\quad \forall\, X\in\mathfrak{G}_1.$$

证 任取李群 G_1 上的左不变向量场 X, 因此有

$$(L_g)_*X=X,\quad \forall\, g\in G_1.$$

任取 $g,x\in G_1$, 则 $\sigma(gx)=\sigma(g)\sigma(x)=L_{\sigma(g)}\circ\sigma(x)$, 即 $\sigma\circ L_g=L_{\sigma(g)}\circ\sigma$, $\forall g\in G_1$. 于是

$$(L_{\sigma(g)})_*\circ\sigma_*=\sigma_*\circ(L_g)_*,\quad \forall\, g\in G_1.$$

因此任取 $X\in\mathfrak{G}_1$, 则有

$$(L_{\sigma(g)})_*\circ\sigma_*(X)=\sigma_*\circ(L_g)_*(X)=\sigma_*(X),\quad \forall\ \in G_1.$$

令 $\sigma(G_1)=G_2$, 所以证明了 $\sigma_*(X)$ 为李群 G_2 上的左不变向量场, 即证明了 $\sigma_*(\mathfrak{G}_1)\subset\mathfrak{G}_2$. 已知 σ_* 为李代数同态, 下面来证 $\sigma_*(\mathfrak{G}_1)=\mathfrak{G}_2$, 即 σ_* 给出李代数 $\mathfrak{G}_1$ 到 $\mathfrak{G}_2$ 上的同态.

令 $\sigma(e_1)=e_2$, 所以 σ_* 诱导了切空间 $T_{e_1}(G_1)$ 到 $T_{e_2}(G_2)$ 内的线性映射. 但是 $\sigma(G_1)=G_2$, 所以映射 σ 的 Jacobian 在 e_1 点附近的秩等于 $\dim G_2$. 这证明了 $\sigma_*(T_{e_1}(G_1))=T_{e_2}(G_2)$. 因此

$$\dim\sigma_*(\mathfrak{G}_1)=\dim\sigma_*(T_{e_1}(G_1))=\dim T_{e_2}(G_2)=\dim\mathfrak{G}_2.$$

至此证明了 $\sigma_*(\mathfrak{G}_1)=\mathfrak{G}_2$.

下面证 $\sigma(\exp X)=\exp\sigma_*(X)$, $\forall\, X\in\mathfrak{G}_1$. 为此, 在李代数 $\mathfrak{G}_1$ 中取定一组基 $X_1,\cdots,X_n$, 在 G_1 中取关于这组基的第一类标准单位标架 (U,φ). 再在李代数 $\mathfrak{G}_2$ 中取定一组基 $Y_1,\cdots,Y_m$, 在 G_2 中取定关于这组基的第一类标准单位标架 (V,ψ), 使得 $\sigma(U)\subset V$.

设标架 (U,φ) 上的乘法函数为 f, 辅助函数为 $l_i^j(x)$, 标架 (V,ψ) 上的乘法函数为 F, 辅助函数为 $L_i^j(y)$. 于是李代数 $\mathfrak{G}_1$ 有基

$$X_i=\sum_j l_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j},\quad 1\leq i\leq n,$$

李代数 $\mathfrak{G}_2$ 有基

$$Y_i=\sum_j L_i^j(y)\frac{\partial}{\partial y_j},\quad 1\leq i\leq m.$$

令

$$\sigma_*(X_i)=\sum_j b_{ij}Y_j,$$

因此在李代数 $\mathfrak{G}_1$ 中任取一元素 $X=\sum a_iX_i$, 则

$$Y=\sigma_*(X)=\sum a_i\sigma_*(X_i)=\sum a_ib_{ij}Y_j.$$

所以由 $X=\sum a_iX_i=\sum a_il_i^j(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, σ 为 $y=h(x)$, 即

$$y_i=h_i(x_1,\cdots,x_n),\quad 1\leq i\leq m,$$

则

$$Y=\sum a_ib_{ij}L_j^k(y)\frac{\partial}{\partial y_k}=\sum a_il_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}=\sum a_il_i^j(x)\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_k}.$$

这证明了

$$\sum_{i,j}a_ib_{ij}L_j^k(y)=\sum_{i,j}a_il_i^j(x)\frac{\partial y_k}{\partial x_j},$$

即有

$$\sum_i a_i\Big(\sum_j l_i^j(x)\frac{\partial h_k(x)}{\partial x_j}-\sum_j b_{ij}L_j^k(h(x))\Big)=0,\quad 1\le k\le m.$$

取 $x=0$, 由 $l_i^j(0)=\delta_{ij}$, $h(0)=0$, $L_j^k(0)=\delta_{jk}$ 可知

$$\sum_i a_i\frac{\partial h_k(x)}{\partial x_i}\Big|_{x=0}=\sum_i a_ib_{ik},\quad 1\le k\le m.$$

今取 $\varepsilon_1>0$, 使得当 $|t|<\varepsilon_1$ 时, $\exp tX\in U$. 由于 σ 为李群同态, 所以 $\sigma(\exp tX)$ 为李群 G_2 中的单参数子群, 且 $\sigma(\exp tX)\in V$, $|t|<\varepsilon_1$. 因此存在 $Z\in\mathfrak{G}_2$, 使得

$$\sigma(\exp tX)=\exp tZ.$$

记 $Z=\sum c_jY_j$, 我们要证 $Z=Y=\sigma_*(X)$.

事实上, $\exp tX=\exp\sum(ta_i)X_i$ 的坐标为 $t(a_1,\cdots,a_n)$, 所以 $\sigma(\exp tX)$ 的坐标为 $h(ta_1,\cdots,ta_n)$. 因此, $\sigma(\exp tX)$ 在单位元素处的切向量为

$$(\cdots,\frac{\mathrm{d}h_i(ta_1,\cdots,ta_n)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0},\cdots).$$

而

$$\frac{\mathrm{d}h_i(ta_1,\cdots,ta_n)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=\sum\frac{\partial h_i(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_j}\Big|_{x=0}a_j=\sum_j a_jb_{ji},$$

其中 $1 \leq i \leq m$. 这证明了

$$Z = \sum \frac{\mathrm{d}h_i(ta_1, \cdots, ta_n)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} Y_i = \sum a_j b_{ji} Y_i = Y.$$

因此

$$\sigma(\exp tX) = \exp t\sigma_*(X), \quad |t| < \varepsilon_1.$$

由 $\exp tX$ 开拓的方式推出

$$\sigma(\exp tX) = \exp t\sigma_*(X), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

定理证完.

推论 连通李群 G_1 到 G_2 上的两个同态 σ_1, σ_2 若在李群 G_1 的李代数 $\mathfrak{G}_1$ 上有 $\sigma_{1*} = \sigma_{2*}$, 则有 $\sigma_1 = \sigma_2$.

证 由定理 3.2.3, 任取 $X \in \mathfrak{G}_1$, 则有

$$\sigma_1(\exp tX) = \exp t(\sigma_{1*})(X) = \exp t(\sigma_{2*})(X) = \sigma_2(\exp tX),$$

其中 $t \in \mathbb{R}$. 由于李群 G_1 连通, 所以 $\exp \mathfrak{G}_1$ 生成 G_1, 因此在生成元素上 $\sigma_1 = \sigma_2$. 这推出 $\sigma_1 = \sigma_2$ 在李群 G_1 上成立. 证完.

上面的定理给出李群的到上的同态诱导了它们的李代数的到上的同态. 反之, 则是一个比较复杂的问题. 即设 $\mathfrak{G}_i$ 为连通李群 G_i 的李代数, $i = 1, 2$. 设若李代数 $\mathfrak{G}_1$ 到 $\mathfrak{G}_2$ 上有一个李代数的同态 ρ, 一般地说, 不存在李群 G_1 到 G_2 上的同态 σ, 使得 $\sigma_* = \rho$. 但是就局部而言总存在, 即我们有

引理 3.2.4 设 $\mathfrak{G}_i$ 为连通李群 G_i 的李代数, $i = 1, 2$. 设 ρ 为李代数 $\mathfrak{G}_1$ 到 $\mathfrak{G}_2$ 上的同态, 则在 G_i 中存在第一类单位标准标架 (U_i, φ_i), $i = 1, 2$, 使得 U_1 到 U_2 内有解析映射 σ, 它适合 $(\sigma(U_1), \varphi_2)$ 为可容许标架, 又

(1) 若 $u, v, uv \in U_1$, 则 $\sigma(u), \sigma(v), \sigma(uv) \in U_2$, 且有

$$\sigma(uv) = \sigma(u)\sigma(v);$$

(2) $\sigma_* = \rho$ 在 U_1 上成立;

(3) 任取 $X \in \mathfrak{G}_1$, 则存在 $\varepsilon_1 > 0$, 使得当 $|t| < \varepsilon_1$ 时有 $\exp tX \in U_1$, 且

$$\sigma(\exp tX) = \exp t\rho(X).$$

证 在李代数 $\mathfrak{G}_1$ 中取基 $X_1, \cdots, X_n$, 在李代数 $\mathfrak{G}_2$ 中取基 $Y_1, \cdots, Y_m$. 李代数 $\mathfrak{G}_1$ 到 $\mathfrak{G}_2$ 上的同态 ρ 给出

$$\rho(X_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} Y_j, \quad 1 \le i \le n,$$

其中 $A = (a_{ij})$ 为 $n \times m$ 矩阵, ρ 为 $\mathfrak{G}_1$ 到 $\mathfrak{G}_2$ 上的映射. 因此, 矩阵 A 的秩为 $m (m \le n)$. 任取 $X \in \mathfrak{G}$, $X = \sum x_i X_i$, 则有

$$\rho(X) = \rho(\sum x_i X_i) = \sum x_i \rho(X_i) = \sum x_i a_{ji} Y_j = \sum y_j Y_j.$$

所以

$$y_j = \sum x_i a_{ji},$$

即

$$(y_1, \cdots, y_m) = (x_1, \cdots, x_n) A'.$$

在连通李群 G_i 中取第一类标准单位标架 (U_i, φ_i), $i = 1, 2$, 使得

$$\begin{aligned} U_1 = \{&\exp \sum x_i X_i \mid \varphi_1(\exp \sum x_i X_i) = x = (x_1, \cdots, x_n), \\ &|x_1| < \varepsilon_1, \cdots, |x_n| < \varepsilon_1\}, \\ U_2 = \{&\exp \sum y_j Y_j \mid \varphi_2(\exp \sum y_j Y_j) = y = (y_1, \cdots, y_m), \\ &|y_1| < \varepsilon_2, \cdots, |y_m| < \varepsilon_2\}. \end{aligned}$$

这里, 取 $\varepsilon_2 > 0$, 使得

$$|y_j| = |\sum_i a_{ji} x_i| < \varepsilon_2, \quad \forall\, |x_1| < \varepsilon_1, \cdots, |x_n| < \varepsilon_1.$$

注意到我们可以引进 U_1 到 U_2 内的解析映射 σ：

$$\exp X \to \exp \rho(X),$$

于是在已给标架下映射 σ 的坐标表达式为

$$x \to y = xA'.$$

因此，在坐标邻域 U_1 上的映射 σ 为解析映射. 显然，$V_1 = \sigma^{-1}(U_2) \cap U_1$ 为 U 中开集，由于 $n \times m$ 矩阵 A 的秩为 m，所以 $\dim \sigma(U_1) = m$，即在 U_2 中存在单位邻域 V_2，使得 (V_2, φ_2) 为李群 G_2 的可容许标架，这里 $V_2 \subset \sigma(U_1) \subset U_2$. 另一方面，在 U_1 上有 $\sigma_* = \rho$，即 (2) 成立. 再有

$$\sigma(\exp X) = \exp \sigma_*(X) = \exp \rho(X),$$

即 (3) 成立.

最后来证 (1) 成立. 记李群 G_1 关于标架 (U_1, φ_1) 的乘法函数为 f，辅助函数为 $l_i^j(x)$，$1 \le i, j \le n$. 于是

$$(\exp \sum x_i X_i)(\exp \sum \widetilde{x}_i X_i) = \exp \sum f_i(x, \widetilde{x}) X_i,$$

其中 $|x_i| < \varepsilon_1$，$|\widetilde{x}_i| < \varepsilon_1$，$1 \le i \le n$. 记 G_2 关于标架 (U_2, φ_2) 的乘法函数为 F，辅助函数为 $L_i^j(y)$，于是

$$(\exp \sum y_i Y_i)(\exp \sum \widetilde{y}_i \overline{Y}_i) = \exp \sum F_i(y, \widetilde{y}) Y_i,$$

其中 $|y_i| < \varepsilon_2$，$|\widetilde{y}_i| < \varepsilon_2$，$1 \le i \le m$. 又 $|F_i(y, \widetilde{y})| < \varepsilon_2$，$1 \le i \le m$. 由 $\sigma_* = \rho$ 及 $\rho(X_i) = \sum\limits_j a_{ji} Y_j$，则有

$$\sigma_*(X_i) = \rho(X_i) = \sum_j a_{ji} Y_j, \quad 1 \le i \le m.$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_k l_i^k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} &= \sum_{k,j} l_i^k(x) \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_j} \\ &= \sum_{k,j} a_{jk} l_i^k(x) \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{j,i} a_{ji} L_j^k(y) \frac{\partial}{\partial y_k}. \end{aligned}$$

这证明了

$$\sum_k a_{jk} l_i^k(x) = \sum_k a_{ki} L_k^j(y).$$

所以

$$\sum_k a_{ik} \widetilde{l_j^k}(x) = \sum_k \widetilde{L_k^i}(y) a_{kj},$$

这里

$$(\widetilde{l_i^j}(x)) = (l_i^j(x))^{-1}, \quad (\widetilde{L_i^j}(x)) = (L_i^j(x))^{-1}.$$

记

$$\widetilde{F}(y, \widetilde{y}) = \sum_j a_{ij} f_j(x, \widetilde{x}) = \sigma(x\widetilde{x}).$$

由 S.Lie 第一基本定理可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widetilde{F}_i(y,\widetilde{y})}{\partial \widetilde{x}_p} &= \sum_j a_{ij} \frac{\partial f_j(x,\widetilde{x})}{\partial \widetilde{x}_p} = \sum_{j,k} a_{ij} l_k^j(f(x,\widetilde{x})) \widetilde{l}_p^k(\widetilde{x}) \\ &= \sum_{j,k} a_{jk} L_j^i(\sigma(x\widetilde{x})) \widetilde{l}_p^k(\widetilde{x}) = \sum_{j,k} L_j^i(\sigma(x\widetilde{x})) \widetilde{L}_k^j(\sigma(\widetilde{x})) a_{kp}.\end{aligned}$$

另一方面, $y = xA'$, $\widetilde{y} = \widetilde{x}A'$, 所以

$$\frac{\partial \widetilde{F}_i(y,\widetilde{y})}{\partial \widetilde{x}_p} = \sum_k \frac{\partial \widetilde{y}_k}{\partial \widetilde{x}_p} \frac{\partial \widetilde{F}_i(y,\widetilde{y})}{\partial \widetilde{y}_k} = \sum_k a_{kp} \frac{\partial \widetilde{F}_i(y,\widetilde{y})}{\partial \widetilde{y}_k}.$$

因此有

$$\sum_k a_{kp} \Big(\frac{\partial \widetilde{F}_i(y,\widetilde{y})}{\partial \widetilde{y}_k} - \sum_j L_j^i(\sigma(x\widetilde{x})) \widetilde{L}_k^j(\sigma(\widetilde{x})) \Big) = 0.$$

由于 $n \times m$ 方阵 $A = (a_{ij})$ 的秩为 m, 这证明了

$$\frac{\partial \widetilde{F}_i(y,\widetilde{y})}{\partial \widetilde{y}_k} = \sum_j L_j^i(\widetilde{F}(y,\widetilde{y})) \widetilde{L}_k^j(\widetilde{y}).$$

初值为

$$\widetilde{F}_i(y,0)=\sum_j a_{ij}f_j(x,0)=\sum_j a_{ij}x_j=y_i,\quad 1\le i\le m.$$

至此，证明了 $F(y,\widetilde{y})$ 和 $\widetilde{F}(y,\widetilde{y})$ 适合相同的常微分方程组，且有相同的初值. 由解析解的唯一性可知 $\widetilde{F}(y,\widetilde{y})=F(y,\widetilde{y})$. 即有

$$\begin{aligned}&\sigma((\exp\sum x_iX_i)(\exp\sum \widetilde{x}_iX_i))\\&=\sigma(\exp f_i(x,\widetilde{x})X_i)=\exp\rho(\sum f_i(x,\widetilde{x})X_i)\\&=\exp\sum f_i(x,\widetilde{x})a_{ji}Y_j=\exp\sum F_j(y,\widetilde{y})Y_j\\&=(\exp\sum y_iY_i)(\exp\sum \widetilde{y}_iY_i)=\sigma(\exp\sum x_iX_i)\sigma(\exp\sum \widetilde{x}_iX_i).\end{aligned}$$

即若 $u,v,uv\in U_1$，则 $\sigma(u),\sigma(v),\sigma(uv)\in U_2$，而且 $\sigma(uv)=\sigma(u)\sigma(v)$. 这证明了 (1) 成立. 引理证完.

这个引理告诉我们，李代数的同态可以提升为李群的某个邻域上适合引理 3.2.4 条件 (1),(2),(3) 的解析映射. 它能否开拓为李群 G 的同态呢？由于连通李群由单位邻域生成，因此取定连通李群 G_1 的单位邻域 U_1，则李群 G_1 中元素可表示为 $g=u_1u_2\cdots u_s$，其中 $u_1,\cdots,u_s\in U_1$. 我们可取 $U_1^{-1}=U_1$，且 (U_1,φ_1) 为单位标架. 为了李代数 $\mathfrak{G}_1$ 的同态 ρ 可提升为李群 G_1 的同态，已知在 U_1 上的解析映射 σ，有 $\sigma_*=\rho$. 我们只要求 σ 为李群 G_1 的群同态，用李群左平移的双解析性便可证 σ 为李群同态. 所以，我们要求 $\sigma(g)=\sigma(u_1)\sigma(u_2)\cdots\sigma(u_s)$. 但是李群 G_1 中元素 g 表示为单位坐标邻域 U_1 中元素的乘积的表法不唯一. 设另有表法 $g=v_1v_2\cdots v_t$，其中 $v_1,v_2,\cdots,v_t\in U_1$，那么有 $\sigma(g)=\sigma(v_1)\sigma(v_2)\cdots\sigma(v_t)$. 因此，为了映射 σ 有意义，必须有 $u_1u_2\cdots u_s=v_1v_2\cdots v_t$ 蕴含 $\sigma(u_1)\sigma(u_2)\cdots\sigma(u_s)=\sigma(v_1)\sigma(v_2)\cdots\sigma(v_t)$. 由引理 3.2.4 的性质 (1)，当

$$u_i,u_{i+1},u_iu_{i+1},v_j,v_{j+1},v_jv_{j+1}\in U_1$$

时，则有

$$\sigma(u_iu_{i+1})=\sigma(u_i)\sigma(u_{i+1}),\sigma(v_j)\sigma(v_{j+1})=\sigma(v_jv_{j+1}).$$

因此要求 $u_1u_2\cdots u_s$ 经过：$u_1, u_{i+1}, u_iu_{i+1}\in U_2$, 用 $u_i'=u_iu_{i+1}\in U_1$ 代替 u_i, u_{i+1} 的乘积，或者对 $w_i, w_{i+1}, u_i=w_iw_{i+1}\in U_1$, 将 u_i 用 w_iw_{i+1} 代替. 按这样的步骤，经过有限次可将 $u_1u_2\cdots u_s$ 变为 $v_1v_2\cdots v_t$, 那么 $\sigma(g)$ 的定义是有意义的. 否则，将 σ 开拓到李群 G_1 上，则同一个元素 g 对应的是不同元素，即 σ 不单值. 这说明了为什么李代数的同态一般不能提升为李群的同态 σ, 使得 $\sigma_*=\rho$.

什么时候保证 ρ 提升为 σ 时得单值映射呢？为此，必须引进通用覆盖群.

定义 3.2.5 Hausdorff 拓扑空间 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{N}$ 上的连续映射 f 称为 **覆盖映射**, 如果任取 $p\in\mathfrak{N}$, $p'\in f^{-1}(p)$, 则存在点 p' 在空间 $\mathfrak{M}$ 中的开邻域 $V'_{p'}$ 及点 p 在空间 $\mathfrak{N}$ 中的开邻域 V_p, 使得 $f: V'_{p'}\to V_p$ 给出 $V'_{p'}$ 到 V_p 上的同胚. 这时称 $\mathfrak{M}$ 为 $\mathfrak{N}$ 的 **覆盖空间**, 而 $(\mathfrak{M}, f)$ 称为 $\mathfrak{N}$ 的 **覆盖**.

由定义可知，$V'_{p'}\cap f^{-1}(p)=\{p'\}$. 这证明了 $f^{-1}(p)$ 为 $\mathfrak{M}$ 中的完全不连通集，特别地，为离散子集.

定义 3.2.6 连通李群 G_1 到 G_2 上的同态 f 称为 (李群的)**覆盖同态**, 如果 (G, f) 为李群 G_2 的覆盖空间. 这时，李群 G_1 称为李群 G_2 的 **覆盖群**. 记 e 为李群 G_2 的单位元素，则 $\Gamma=f^{-1}(e)$ 为李群 G_1 的 **离散子群**, 称为覆盖群 (G, f) 关于 G_2 的 **Poincaré 群**. Poincaré 群的元素个数称为此覆盖群的 **叶数**.

关于 Poincaré 群有下面的性质：

引理 3.2.7 设 (G, f) 为连通李群 G_2 的覆盖群，则 (G, f) 关于 G_2 的 Poincaré 群 $\Gamma=f^{-1}(e)$ 为李群 G_1 的 **离散正规子群**, 且包含在李群 G_1 的中心 $C(G_1)$ 中. 又任取 $g\in G_2$, $g_1\in f^{-1}(g)$, 则

$$f^{-1}(g)=g_1\Gamma.$$

因此在李群 G_1 关于正规子群 Γ 的左旁集空间 $G_1/\Gamma=\{g\Gamma\mid\forall\, g\in G\}$ 中可引进李群结构，使得 G_1/Γ 和连通李群 G_2 同构.

证 由于 f 为李群 G_1 到 G_2 上的李群同态，记 e 为李群 G_2 的单位元素，则同态核 $f^{-1}(e)=\Gamma$ 为 G_1 中的普通正规子群.

我们来证 $\Gamma \subset C(G)$. 事实上, 任取 $r \in \Gamma$, $g \in G_1$, 则 $grg^{-1} \in \Gamma$. 显然 $\xi: g \to grg^{-1}$ 给出李群 G_1 到离散李子群 Γ 内的解析映射. 今点 r 构成的集合 $\{r\}$ 为李群 Γ 的开子集. 记 e_1 为李群 G_1 的单位元素. 熟知 $e_1 \in \Gamma$, 而 $\xi(e_1) = e_1 r e_1^{-1} = r$, 因此在李群 G_1 中存在单位标架 (V, ψ), 使得 $\xi(V) \subset \{r\}$, 即任取 $v \in V$, 有 $\xi(v) = r$. 所以 $vrv^{-1} = r$, 即 $vr = rv$, $\forall\, v \in V$. 但是李群 G_1 由单位邻域 V 生成, 这证明了 r 和李群 G_1 的生成元素可交换, 所以和李群 G_1 可交换. 所以 $r \in C(G_1)$, 即 $\Gamma \subset C(G_1)$.

今任取 $g \in G_1$, $g_1 \in f^{-1}(g)$. 由于 $f(g_1\Gamma) = f(g_1)f(\Gamma) = f(g_1)e = f(g_1) = g$, 所以 $g_1\Gamma \subset f^{-1}(g)$. 反之, 任取 $g' \in f^{-1}(g)$, 有 $f(g') = g$. 已知 $f(g_1) = g$, 所以 $f(g_1^{-1}g') = f(g_1)^{-1}f(g') = g^{-1}g = e$, 即 $g_1^{-1}g' \in \Gamma$. 这证明了 $g' \in g_1\Gamma$, 所以证明了 $f^{-1}(g) \subset g_1\Gamma$. 至此证明了 $f^{-1}(g) = g_1\Gamma$. 引理证完.

定义 3.2.8 设 G 为连通李群, (G_i, f_i) 为李群 G 的覆盖群, $i = 1, 2$. (G_1, f_1) 和 (G_2, f_2) 称为 **互相等价的**, 如果存在李群 G_1 到李群 G_2 上的李群同构 φ, 使得 $f_1 = f_2 \circ \varphi$.

引理 3.2.9 设连通李群 G 的两个覆盖群 (G_i, f_i) 互相等价, $i = 1, 2$, 即存在 G_1 到 G_2 上的同构 φ, 使得 $f_1 = f_2 \circ \varphi$. 记覆盖群 (G_i, f_i) 的 Poincaré 群 $\Gamma_i = f_i^{-1}(e)$, $i = 1, 2$, 其中 e 为李群 G 的单位元素, 则有 $\varphi(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

证 今 $f_1 = f_2 \circ \varphi$, 所以

$$\Gamma_1 = f_1^{-1}(e) = \varphi^{-1} \circ f_2^{-1}(e) = \varphi^{-1}(\Gamma_2),$$

即 $\varphi(\Gamma_1) = \Gamma_2$. 证完.

定义 3.2.10 Hausdorff 拓扑空间 $\mathfrak{M}$ 称为 **单连通的**, 如果它的任一闭道路 (即闭连续曲线) 可连续地收缩为一点, 即拓扑空间 $\mathfrak{M}$ 的闭道路同伦于零, 即一阶同伦群为零.

注意, 连通和单连通是两个毫不相干的概念. 设 $\mathfrak{M}$ 为连通流形, 由于 $\mathfrak{M}$ 是流形, 可知它弧连通. 而单连通是指在流形上任取两点 p, q, 任取以此两点为顶点的简单曲线 $s_1(t), s_2(t)$, $\forall\, t \in [0, 1]$,

则存在以此两点为顶点的含参数 $a \in [0,1]$ 的简单曲线族 $s(t,a)$, 使得

(1) $s(t,a)$ 关于 $t, a \in [0,1]$ 连续;
(2) $s(t,0) = s_1(t)$, $s(t,1) = s_2(t)$;
(3) $s(0,a) = p$, $s(1,a) = q$.

形象地说, 简单连续曲线 $s_1(t)$ 可以连续地变动为连续曲线 $s_2(t)$.

Schreier 给出了从一个 Hausdorff 拓扑空间 $\mathfrak{M}$ 构造单连通覆盖空间的办法. 为此无妨设 $\mathfrak{M}$ 连通. 在 $\mathfrak{M}$ 中取定一点 p, 考虑过点 p 的所有闭道路 (即闭简单连续曲线). 在这个集合中引进等价关系如下: 两条过点 p 的闭道路若可连续地互变, 则称为等价. 于是得等价类集 $\mathfrak{N}_p$. 记

$$\mathfrak{N} = \bigcup_{p \in \mathfrak{M}} \mathfrak{N}_p,$$

于是集合 $\mathfrak{N}$ 到 $\mathfrak{M}$ 上有自然的对应关系:

$$f: q \to p, \quad \forall\, q \in \mathfrak{N}_p,\ p \in \mathfrak{M},$$

因此 $f^{-1}(p) = \mathfrak{N}_p$. 在 $\mathfrak{N}$ 中可如下引进拓扑, 使得 f 为又开又闭的映射. 进一步, Schreier 证明了 $(\mathfrak{N}, f)$ 为 $\mathfrak{M}$ 的覆盖空间, f 为覆盖映射, 又 $\mathfrak{N}$ 连通且单连通. 将这个构造方法用到李群上, 便有

定理 3.2.11(Schreier) 连通李群 G 必有连通且单连通覆盖李群 $(\widehat{G}, f)$ 存在, 称为 G 的 **通用覆盖群**. 而覆盖映射 f 为李群同构当且仅当李群 G 本身为单连通李群, 这时 $f = \mathrm{id}$.

关于 Schreier 定理的证明, 我们在此略去. 由 Schreier 定理出发, 还可以进一步证明: 在通用覆盖群 $\widehat{G}$ 中存在单位邻域 U, 使得覆盖映射 f 限制在 U 上为同胚, 且有性质 (*): $u, v, uv \in U$ 当且仅当 $f(u), f(v), f(uv) \in f(U)$, 这时有

$$f(u)f(v) = f(uv).$$

实际上，我们也可以用 3.1 节中的定理 3.1.31 来构造通用覆盖群，即我们有

定理 3.2.12 任给李代数 $\mathfrak{L}$, 由定理 3.1.31 构造的连通李群 G 单连通，且李群 G 的李代数和 $\mathfrak{L}$ 同构.

证 今已知 G 为连通李群，记 $(\widehat{G}, f)$ 为其通用覆盖群. 为了证 G 单连通，只要证 $G = \widehat{G}$, $f = \mathrm{id}$. 换句话说，只要证通用覆盖群 $(\widehat{G}, f)$ 的 Poincaré 群 $\Gamma = \{\widehat{e}\}$, 其中 $\widehat{e}$ 为李群 $\widehat{G}$ 的单位元素.

记 e 为李群 G 的单位元素，显然存在 $\widehat{e}$ 的单位标架 $(\widehat{U}, \widehat{\varphi})$ 及 e 的单位标架 (U, φ), 使得 f 将 $\widehat{U}$ 映入 U, 且 f 为双解析同胚.

任取 $\widehat{g} \in \Gamma$, 因此 $f(\widehat{g}) = e$. 因为 $\widehat{G}$ 连通，所以由单位邻域 $\widehat{U}$ 生成. 于是 $\widehat{g} = \widehat{u}_1 \cdots \widehat{u}_s$, 其中 $\widehat{u}_1, \cdots, \widehat{u}_s \in \widehat{U}$. 另一方面，已知 f 为李群同态，所以有 $e = f(\widehat{g}) = f(\widehat{u}_1) \cdots f(\widehat{u}_s)$. 记 $u_i = f(\widehat{u}_i)$, $1 \leq i \leq s$. 因此 $e = u_1 u_2 \cdots u_s$, 其中 $u_1, \cdots, u_s \in f(\widehat{U}) = U$. 由定理 3.1.31 可知，从 $u_1 u_2 \cdots u_s$ 出发，按照 $u_i, u_{i+1}, u_i u_{i+1} \in U$, 可以用 $u_i' = u_i u_{i+1}$ 代替 $u_i u_{i+1}$; 或者若 $v_j, v_{j+1}, u_i = v_j v_{j+1} \in U$, 可以用 $v_j v_{j+1}$ 代替 u_i. 按如此步骤，从 $u_1 u_2 \cdots u_s$ 出发，经过有限步便变成 e. 注意整个步骤在 U 中进行，而 $f : \widehat{U} \to U$ 为到上的双解析同胚，所以这个步骤在 $f^{-1}(U) \cap \widehat{U} = \widehat{U}$ 中进行，于是将 $\widehat{u}_1 \widehat{u}_2 \cdots \widehat{u}_s$ 变为 $\widehat{e}$. 这证明了 $\widehat{g} = \widehat{e}$, 即 Poincaré 群 $\Gamma = \{\widehat{e}\}$. 定理证完.

由定理 3.2.12 的证明，同理可证

定理 3.2.13 设 G 为连通李群，则 G 的通用覆盖群 $(\widehat{G}, f)$ 有如下性质，在 $\widehat{G}$ 中存在单位标架 $(\widehat{U}, \widehat{\varphi})$, 使得 $\widehat{U} = \widehat{U}^{-1}$, 且任取 $\widehat{g} \in \widehat{G}$, 若有

$$\widehat{g} = \widehat{u}_1 \widehat{u}_2 \cdots \widehat{u}_s = \widehat{v}_1 \widehat{v}_2 \cdots \widehat{v}_t,$$

其中 $\widehat{u}_i, \widehat{v}_j \in \widehat{U}$, 则按照手续

(1) $\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{u}\widehat{v} = \widehat{w} \in \widehat{U}$, 则用 $\widehat{w}$ 代替 $\widehat{u}\widehat{v}$;

(2) $\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{u}\widehat{v} = \widehat{w} \in \widehat{U}$, 则用 $\widehat{u}\widehat{v}$ 代替 $\widehat{w}$,

可将 $\widehat{u}_1 \widehat{u}_2 \cdots \widehat{u}_s$ 经过有限次上述步骤变为 $\widehat{v}_1 \widehat{v}_2 \cdots \widehat{v}_t$.

利用通用覆盖群的概念，我们可以解决什么样的李群，其李代数的同态可提升为连通李群的同态. 我们有

定理 3.2.14 设 $\mathfrak{G}_i$ 为连通李群 G_i 的李代数. 设李群 G_1 单连通. 设 ρ 为李代数 $\mathfrak{G}_1$ 到 $\mathfrak{G}_2$ 上的同态. 则唯一存在李群 G_1 到 G_2 上的同态 σ, 使得

$$\sigma_* = \rho.$$

证 由引理 3.2.4 可知，在李群 G_i 中存在单位标架 (U_i, φ_i), 使得 ρ 可提升为 U_1 到 U_2 中含单位元素的开集上的解析映射 σ, 使得 $\sigma_* = \rho$, 且只要 $u, v, uv \in U_1$, 则 $\sigma(u), \sigma(v), \sigma(uv) \in U_2$, 且有

$$\sigma(u)\sigma(v) = \sigma(uv).$$

今任取 $g_1 \in G_1$, 若 $g_1 = u_1u_2\cdots u_s = v_1v_2\cdots v_t$, 其中 $u_i, v_j \in U_1$. 因为定理 3.2.13, 设李群 G_1 单连通，所以由 $u_1u_2\cdots u_s$ 经过定理 3.2.13 的步骤 (1) 及 (2), 经过有限步变为 $v_1v_2\cdots v_t$.

定义 $\sigma(g) = \sigma(u_1)\sigma(u_2)\cdots\sigma(u_s)$, 由于定理 3.2.13 的步骤 (1) 及 (2) 对作用 σ 后的元素也成立，所以经过有限步后，可变 $\sigma(g)$ 为 $\sigma(v_1)\sigma(v_2)\cdots\sigma(v_t)$. 这证明了 σ 的定义和 g 的分解为生成元素集 U_1 中元素乘积的方式无关, 即 σ 为单值映射. 显然，这也给出了 σ 为普通群同态. 由于李群 G_2 由单位邻域 U_2 生成. 因此也证明了这是到上的普通群同态. 利用左平移的双解析性，立即可证 σ 为流形的解析映射. 所以 σ 为李群 G_1 到 G_2 上的李群同态，且有 $\sigma_* = \rho$. 定理证完.

利用同态提升定理可以证明

定理 3.2.15 设 $(\widehat{G}_i, f_i)$ 为连通李群 G_i 的单连通覆盖群, $\mathfrak{G}_i$ 为李群 $\widehat{G}_i$ 的李代数， $i = 1, 2$. 设 ρ 为李代数 $\mathfrak{G}_1$ 到 $\mathfrak{G}_2$ 上的同构，则唯一存在李群 $\widehat{G}_1$ 到 $\widehat{G}_1$ 上的同构 $\widehat{\theta}$, 使得

$$(f_2)_* \circ \widehat{\theta}_* = \rho \circ (f_1)_*,$$

且 $(\widehat{G}_2, f_1 \circ \widehat{\theta}^{-1})$ 为连通李群 G_1 的单连通覆盖群，它和 $(\widehat{G}_1, f_1)$ 等价. 又 $(\widehat{G}_1, f_2 \circ \widehat{\theta})$ 为连通李群 G_2 的单连通覆盖群，它和 $(\widehat{G}_2, f_2)$ 等价.

证 记李群 $\widehat{G}_i$ 的李代数为 $\widehat{\mathfrak{G}}_i$. 于是 $(f_i)_*$ 给出李代数 $\widehat{\mathfrak{G}}_i$ 到 $\mathfrak{G}_i$ 上的李代数同构, 因此 $(f_2)_*^{-1}\circ\rho\circ(f_1)_*$ 给出李代数 $\widehat{\mathfrak{G}}_1$ 到 $\widehat{\mathfrak{G}}_2$ 上的李代数同构. 由同态提升定理, 因此存在李群 $\widehat{G}_1$ 到 $\widehat{G}_2$ 上的李群同态 $\widehat{\theta}$, 使得

$$\widehat{\theta}_* = (f_2)_*^{-1}\circ\rho\circ(f_1)_*,$$

即有 $(f_2)*\circ\widehat{\theta}_* = \rho\circ(f_1)_*$. 另一方面, $(f_1)_*^{-1}\circ\rho^{-1}\circ(f_2)_*$ 给出李代数 $\widehat{\mathfrak{G}}_2$ 到 $\widehat{\mathfrak{G}}_1$ 上的同构, 于是存在李群 $\widehat{G}_2$ 到 $\widehat{G}_1$ 上的同态 $\widehat{\tau}$, 使得

$$\widehat{\tau}_* = (f_1)_*^{-1}\circ\rho^{-1}\circ(f_2)_*,$$

即有 $(f_1)_*\circ\widehat{\tau}_* = \rho^{-1}\circ(f_2)_*$. 今 $\widehat{\theta}_*,\widehat{\tau}_*$ 都是李代数的同构, 所以我们证明了

$$\widehat{\theta}_*\widehat{\tau}_* = \widehat{\tau}_*\widehat{\theta}_* = \mathrm{id}.$$

这证明了 $\widehat{\theta}\circ\widehat{\tau} = \mathrm{id}$ 在李群 $\widehat{G}_2$ 的某个单位邻域上成立, 因此在 $\widehat{G}_2$ 上成立. 同理, $\widehat{\tau}\circ\widehat{\theta} = \mathrm{id}$ 在李群 $\widehat{G}_1$ 的某个单位邻域上成立, 因此在 $\widehat{G}_1$ 上成立. 所以证明了 $\widehat{\tau} = \widehat{\theta}^{-1}$, 即 $\widehat{\theta}$ 为李群的同构. 至此证明了前一断言. 后一断言是显然的. 证完.

定理 3.2.16 连通李群的连通且单连通覆盖群在等价意义下唯一.

证 设 $(\widehat{G},\widehat{f}_i)$ 为李群 G 的两个连通且单连通覆盖群. 在定理 3.2.15 中取 $G_1 = G_2 = G$, $\rho = \mathrm{id}$, 则证明了存在李群 $\widehat{G}_1$ 到 $\widehat{G}_2$ 上的同构映射 $\widehat{\theta}$, 它有

$$(f_1)_* = (f_2)_*\circ\widehat{\theta}_*,$$

所以 $f_1 = f_2\circ\widehat{\theta}$. 这证明了 $(\widehat{G}_1, f_1)$ 和 $(\widehat{G}_2, f_2)$ 等价. 证完.

所以, 今后我们称连通李群 G 的单连通覆盖群为 **通用覆盖群**. 它在等价意义下唯一.

在下面我们可以回答这样的问题, 即任给李代数 $\mathfrak{L}$, 决定所有连通李群 G, 使得 G 的李代数和 $\mathfrak{L}$ 同构. 为此, 我们先证明

引理 3.2.17 设 G 为李群，Γ 为 G 中离散正规子群. 则在普通商群 G/Γ 中可引进流形结构，使得自然映射 $\pi: G \to G/\Gamma$ 为到上的解析映射，且为开映射.

证 令 G/Γ 为普通群. 由 Γ 离散, 所以存在群 G 的单位元素 e 的邻域 U, 使得 $U \cap \Gamma = \{e\}$. 于是自然映射 $\pi: g \to g\Gamma, \forall\, g \in G$ 在单位邻域 U 上一一. 无妨设 (U, φ) 为单位标架，即 φ 在 U 上为同胚，所以 $(U/\Gamma, \varphi\circ\pi^{-1})$ 是群 G/Γ 的单位元素 $e\Gamma$ 的标架. 任取 $g \in G$, 则 $gU \cap g\Gamma = \{g\}$, 于是 $(gU/\Gamma, \varphi\circ L_{g^{-1}}\circ\pi^{-1})$ 是群 G/Γ 的元素 $g\Gamma$ 的标架. 易证这给出普通群 G/Γ 的流形结构，使得 G/Γ 构成李群. 由于拓扑空间 G/Γ 中点 $g\Gamma$ 有基本邻域组 gV/Γ, 其中 V 遍历 U 中单位基本邻域组，所以易证自然映射为开映射. 证完.

引理 3.2.18 设 $(\widehat{G}, f)$ 为连通李群 G 的通用覆盖群, (G_0, f_0) 为李群 G 的覆盖群，则存在李群 $\widehat{G}$ 到李群 G_0 上的同态映射 φ_0, 使得 $(\widehat{G}, \varphi)$ 为李群 G_0 的通用覆盖群，又 $f = f_0\circ\varphi_0$.

证 记 $(\widehat{G}_0, \varphi_1)$ 为李群 G_0 的通用覆盖群. 由于覆盖群的覆盖群为原来群的覆盖群，所以连通李群 G 有覆盖群 $(\widehat{G}_0, f_0\circ\varphi_1)$. 注意到 $\widehat{G}_0$ 为连通且单连通李群，由定理 3.2.15 可知存在李群 $\widehat{G}$ 到 $\widehat{G}_0$ 上的同构 $\widehat{\theta}$, 使得 $f_0\circ\varphi_1\circ\widehat{\theta} = f$. 记 $\varphi_0 = \varphi_1\circ\widehat{\theta}$, 显然 $(\widehat{G}, \varphi_0)$ 为李群 G_0 的通用覆盖群，又 $f = f_0\circ\varphi_0$. 证完.

定理 3.2.19 给定李代数 $\mathfrak{L}$. 设连通李群 G 和 $\widehat{G}$ 的李代数都和 $\mathfrak{L}$ 同构，且 $\widehat{G}$ 单连通. 则存在李群 $\widehat{G}$ 到 G 上的同态 f, 使得 $(\widehat{G}, f)$ 为李群 G 的通用覆盖群.

证 分别记 $\mathfrak{G}$ 及 $\widehat{\mathfrak{G}}$ 为李群 G 及 $\widehat{G}$ 的李代数. 记 ρ 为 $\mathfrak{G}$ 到 $\widehat{\mathfrak{G}}$ 上的同构. 在定理 3.2.15 中取 $\widehat{G}_2 = G_2 = \widehat{G}$. 记 G 的通用覆盖群为 $(\widehat{G}_1, f_1)$, 于是存在 $\widehat{G}_1$ 到 $\widehat{G}_2$ 上的同构 $\widehat{\theta}$, 使得 $\widehat{\theta}_* = \rho\circ(f_1)_*$, 且 $(\widehat{G}_2, f_1\circ\widehat{\theta}^{-1})$ 为李群 G 的通用覆盖群. 令 $\widehat{G}_2 = \widehat{G}$, 取 $f = f_1\circ\widehat{\theta}^{-1}$, 便证明了定理. 证完.

由上面一系列定理可知，任给李代数 $\mathfrak{L}$, 则在同构意义下唯一存在一个连通且单连通李群 $\widehat{G}$, 它的李代数 $\widehat{\mathfrak{G}}$ 和 $\mathfrak{L}$ 同构. 且任给

连通李群 G, 只要李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{L}$ 同构, 则存在李群 $\widehat{G}$ 到 G 上的同态 f, 使得 $(\widehat{G},f)$ 为李群 G 的通用覆盖群. 记同态核为 $\Gamma=f^{-1}(e)$, 其中 e 为李群 G 的单位元素, 则由引理 3.2.17 可知商空间 $\widehat{G}/\Gamma$ 为连通李群, 且易证 $\widehat{g}\Gamma\to f(\widehat{g})$ 给出李群 $\widehat{G}/\Gamma$ 到 G 上的李群同构.

反之, 给定李代数 $\mathfrak{L}$. 记 $\widehat{G}$ 为连通且单连通李群, 它的李代数 $\widehat{\mathfrak{G}}$ 和 $\mathfrak{L}$ 同构. 在李群 $\widehat{G}$ 的中心 $C(\widehat{G})$ 中任取离散子群 Γ, 则必为离散正规子群. 因此商空间 $\widehat{G}/\Gamma$ 为连通李群. 又自然映射 $f:\widehat{G}\to\widehat{G}/\Gamma$ 给出开同态对应, 使得 $(\widehat{G},f)$ 为连通李群 $\widehat{G}/\Gamma$ 的通用覆盖群. 至此我们证明了

定理 3.2.20 任给李代数 $\mathfrak{L}$. 在李群同构的意义下唯一存在连通且单连通李群 $\widehat{G}$, 它的李代数 $\widehat{\mathfrak{G}}$ 和 $\mathfrak{L}$ 同构. 且任一连通李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{L}$ 同构, 当且仅当在李群 $\widehat{G}$ 中存在离散正规子群 Γ, 使得李群 $\widehat{G}/\Gamma$ 和 G 同构. 确切地说, $(\widehat{G},f)$ 为李群 G 的通用覆盖群, $\pi:\widehat{G}\to\widehat{G}/\Gamma$ 为自然映射, $\sigma:\widehat{G}/\Gamma\to G$ 为到上的同构, 则有覆盖映射 $f=\sigma\circ\pi$.

注意到两连通李群若互相同构,则它们的李代数也互相同构. 反之, 在固定一个李代数 $\mathfrak{L}$ 时, 具有和 $\mathfrak{L}$ 同构的李代数的连通李群的分类化为首先求出连通且单连通李群 $\widehat{G}$, 使得其李代数 $\widehat{\mathfrak{G}}$ 和 $\mathfrak{L}$ 同构. 再求出 $\widehat{G}$ 中所有的离散正规子群 Γ, 于是商空间 $\widehat{G}/\Gamma$ 为连通李群, 它的李代数 $\mathfrak{G}$ 和李代数 $\mathfrak{L}$ 同构, 且分类问题化为所有这种连通李群 $\widehat{G}/\Gamma$ 的分类. 下面我们来证明, 化为连通且单连通李群 $\widehat{G}$ 中离散正规子群在 $\widehat{G}$ 的自同构下的分类. 即有

定理 3.2.21 设连通李群 G_i 的通用覆盖群为 $(\widehat{G}_i,f_i)$. 记 G_i 的单位元素为 e_i, Poincaré 群 $\Gamma_i=f_i^{-1}(e_i)$, $i=1,2$. 则有

(1) 李群 G_1 和 G_2 上的同构可提升为李群 $\widehat{G}_1$ 到 $\widehat{G}_2$ 上的唯一的同构 $\widehat{\theta}$, 它适合条件

$$\widehat{\theta}(\Gamma_1)=\Gamma_2,\quad \theta\circ f_1=f_2\circ\widehat{\theta};$$

(2) 李群 $\widehat{G}_1$ 到 $\widehat{G}_2$ 上的同构 $\widehat{\theta}$ 若有 $\widehat{\theta}(\Gamma_1)=\Gamma_2$, 则唯一存在

李群 G_1 到 G_2 上的同构 θ, 使得

$$\theta \circ f_1 = f_2 \circ \widehat{\theta}.$$

证　记 G_i 及 $\widehat{G}_i$ 的李代数分别为 $\mathfrak{G}_i$ 及 $\widehat{\mathfrak{G}}_i$, $i=1,2$. 我们先来证明 (1). 事实上, G_1 到 G_2 上的李群同构 θ 诱导了李代数 $\mathfrak{G}_1$ 到 $\mathfrak{G}_2$ 上的同构 θ_*. 于是 θ_* 可唯一地提升为李群 $\widehat{G}_1$ 到 $\widehat{G}_2$ 上的同构 $\widehat{\theta}$. 另一方面, $(f_i)_*$ 为李代数 $\widehat{\mathfrak{G}}_i$ 到 $\mathfrak{G}_i$ 上的同构, $i=1,2$, 所以有 $(f_2)_*\circ\widehat{\theta}_* = \theta_*\circ(f_1)_*$. 这证明了 $f_2\circ\widehat{\theta} = \theta\circ f_1$. 我们来证 $\widehat{\theta}(\Gamma_1) = \Gamma_2$. 这是因为记李群 G_i 的单位元素为 e_i, $i=1,2$, 则 $\Gamma_i = f_1^{-1}(e_1)$. 所以任取 $r\in\Gamma_1$, 则 $f_1(r) = e_1$, $\theta\circ f_1(r) = \theta(e_1) = e_2$. 因此 $f_2\circ\widehat{\theta}(r) = e_2$, 所以 $\widehat{\theta}(r)\in f_2^{-1}(e_2) = \Gamma_2$. 这证明了 $\widehat{\theta}(\Gamma_1)\subset\Gamma_2$. 同理考虑 $\widehat{\theta}^{-1}$, 便证明了 $\widehat{\theta}^{-1}(\Gamma_2)\subset\Gamma_1$. 因此 $\Gamma_2\subset\widehat{\theta}(\Gamma_1)\subset\Gamma_2$. 这证明了 $\Gamma_2 = \widehat{\theta}(\Gamma_1)$.

现在来证明 (2). 设李群 $\widehat{G}_1$ 到 $\widehat{G}_2$ 上的同构 $\widehat{\theta}$ 有 $\widehat{\theta}(\Gamma_1) = \Gamma_2$. 令 $\theta = f_2\circ\widehat{\theta}\circ f_1^{-1}$, 显然 $\theta(G_1)\subset G_2$. 我们来证 θ 为单值映射. 任取 $g\in G_1$, 于是存在 $g_1'\in\widehat{G}_1$, 使得 $f_1(g_1') = g_1$, 即 $f_1^{-1}(g_1) = g_1'\Gamma_1$. 因此

$$\widehat{\theta}(f_1^{-1}(g_1)) = \widehat{\theta}(g_1'\Gamma_1) = \widehat{\theta}(g_1')\widehat{\theta}(\Gamma_1) = \widehat{\theta}(g_1')\Gamma_2,$$

于是

$$\begin{aligned}\theta(g_1) &= f_2(\widehat{\theta}(f_1^{-1}(g_1))) = f_2(\widehat{\theta}(g_1')\Gamma_2) = f_2(\widehat{\theta}(g_1'))f_2(\Gamma_2)\\ &= f_2(\widehat{\theta}(g_1'))e_2 = f_2(\widehat{\theta}(g_1'))\in f_2(\widehat{\theta}(\widehat{G}_1)) = f_2(\widehat{G}_2) = G_2.\end{aligned}$$

注意到 $f_1(g_1') = g_1$, 所以 $g_1'\in f_1^{-1}(g_1) = g_1'\Gamma_1$. 如果改取 g_1' 为 $g_1'r$, 其中 $r\in\Gamma_1$, 则

$$\widehat{\theta}(g_1'r) = \widehat{\theta}(g_1')\widehat{\theta}(r)\in\widehat{\theta}(g_1')\widehat{\theta}(\Gamma_1) = \widehat{\theta}(g_1')\Gamma_2,$$

于是

$$\begin{aligned}f_2(\widehat{\theta}(g_1'r)) &= f_2(\widehat{\theta}(g_1')\widehat{\theta}(r)) = f_2(\widehat{\theta}(g_1'))f_2(\widehat{\theta}(r))\\ &= f_2(\widehat{\theta}(g_1'))e_2 = f_2(\widehat{\theta}(g_1')).\end{aligned}$$

这证明了 $g_2 = \theta(g_1)$ 与 g_1' 的选取无关，所以 θ 为李群 G_1 到 G_2 上的单值映射，因此为普通群同态. 注意到 Γ_1 为离散子群，所以任取 $g_1 \in \widehat{G}_1$，则存在李群 $\widehat{G}_1$ 的单位标架 (U_1, φ_1)，使得 $g_1\Gamma_1 \cap g_1U_1 = \{g_1\}$. 因此映射 $\widehat{\theta}$ 在标架 $(g_1U_1, \varphi_1 \circ L_{g_1^{-1}})$ 上解析，所以映射 θ 在李群 G_1 的邻域 $f_1(g_1U_1)$ 上解析. 这证明了 θ 为 G_1 上的解析映射，所以是李群同态.

同理，考虑李群 G_2 到 G_1 上的映射 $\tau = f_1 \circ \theta^{-1} \circ f_2^{-1}$，则可证 τ 为李群 G_2 到 G_1 上的同态. 但是易证 $\theta \circ \tau = \tau \circ \theta = \mathrm{id}$，即 θ 为李群 G_1 到 G_2 上的同构，且有 $\theta \circ f_1 = f_2 \circ \widehat{\theta}$.

最后证明唯一性，即证明由 $\widehat{\theta}$ 唯一决定 θ. 事实上，若存在李群 G_1 到 G_2 上的同构 θ 及 θ'，使得 $\theta \circ f_1 = f_2 \circ \widehat{\theta} = \theta' \circ f_1$. 在李群 $\widehat{G}_1$ 中取定单位标架 (U_1, φ_1)，使得 $U_1 \cap \Gamma_1 = \{e_1\}$，则 f_1 在 U_1 上为同胚映射，于是 $\theta = \theta'$ 在 $f_1(U_1)$ 上成立. 但是李群 G_1 由 $f_1(U_1)$ 生成，所以证明了 $\theta = \theta'$ 在 G_1 上成立. 定理证完.

因此，立即有

推论 记 Γ_i 为连通且单连通李群 $\widehat{G}$ 的离散正规子群，则李群 $\widehat{G}/\Gamma_1$ 和 $\widehat{G}/\Gamma_2$ 同构，当且仅当存在李群 $\widehat{G}$ 的自同构 $\widehat{\theta}$，使得 $\widehat{\theta}(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

下面来考虑连通李群 G 的自同构群及它的某些子群.

定义 3.2.22 设 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数，G 的所有 (李群的) 自同构构成的普通群 $\mathrm{Aut}\,(G)$ 称为 **李群 G 的 自同构群**. 李代数 $\mathfrak{G}$ 的所有 (李代数的) 自同构构成的普通群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$ 称为 **李代数 $\mathfrak{G}$的自同构群**.

由定义可知，任取 $\sigma \in \mathrm{Aut}\,(G)$，则 $\sigma_* \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$. 现在取定连通李群 G 的通用覆盖群 $(\widehat{G}, f)$. 记 $\Gamma = f^{-1}(e)$ 为通用覆盖群 $(\widehat{G}, f)$ 的 Poincaré 群，其中 e 为李群 G 的单位元素. 在定理 3.2.21 中取 $G_1 = G_2 = G$, $\widehat{G}_1 = \widehat{G}_2 = \widehat{G}$, $f_1 = f_2 = f$，于是自同构群 $\mathrm{Aut}\,(\widehat{G})$ 有普通子群

$$\mathrm{Aut}_{\Gamma}(\widehat{G}) = \{\widehat{\theta} \in \mathrm{Aut}\,(\widehat{G}) \mid \widehat{\theta}(\Gamma) = \Gamma\},$$

其中 Γ 为 Poincaré 子群. 由于任取 $\widehat{\theta}\in \mathrm{Aut}\,(\widehat{G})$, 则唯一决定 $\theta\in \mathrm{Aut}\,(G)$, 使得

$$\theta\circ f=f\circ\widehat{\theta}.$$

反之, 任取 $\theta\in\mathrm{Aut}\,(G)$, 则唯一存在 $\widehat{\theta}\in\mathrm{Aut}_{\Gamma}(\widehat{G})$, 使得 $\theta\circ f=f\circ\widehat{\theta}$. 因此证明了 $\xi:\widehat{\theta}\to\theta$ 为普通群 $\mathrm{Aut}_{\Gamma}(\widehat{G})$ 到 $\mathrm{Aut}\,(G)$ 上的同构. 于是有下面普通群的同态及包含关系:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{GL}\,(\widehat{\mathfrak{G}})\supset\mathrm{Aut}\,(\widehat{\mathfrak{G}})= & \mathrm{Aut}\,(\widehat{G})_*\supset & \mathrm{Aut}_{\Gamma}(\widehat{G})_* & \xrightarrow{\xi} & \mathrm{Aut}\,(G)_*\subset\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G}) \\
 & \uparrow * & \uparrow * & & \uparrow * \\
 & \mathrm{Aut}\,(\widehat{G}) & \mathrm{Aut}_{\Gamma}(\widehat{G}) & \xrightarrow{\xi} & \mathrm{Aut}\,(G)
\end{array}$$

这里, 对应 $*$ 为同构, 这是由定理 3.2.3 的推论导出的.

下面再引进一类在李群理论中起重要作用的自同构, 即所谓的内自同构.

定义 3.2.23 记 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数. 任取 $g\in G$, 则 $\mathrm{ad}\,g:x\to gxg^{-1}$ 称为 **李群 G 的内自同构**, 它们全体构成的集合 $\mathrm{ad}\,G$ 为普通群, 称为 **李群 G 的内自同构群**.

任给内自同构 $\mathrm{ad}\,g$, 则它的微分 $(\mathrm{ad}\,g)_*$ 改记为 $\mathrm{Ad}\,g$, 称为 **李代数 $\mathfrak{G}$ 的内自同构**. 它们全体构成的集合 $\mathrm{Ad}\,G$ 为普通群, 称为 **李代数 $\mathfrak{G}$ 的内自同构群**.

于是有普通群同构及包含关系如下:

$$\begin{array}{rl}
 & \mathrm{ad}\,G\subset\mathrm{Aut}\,(G) \\
 & \downarrow * \\
(\mathrm{ad}\,G)_*= & \mathrm{Ad}\,G\subset\mathrm{Aut}\,(G)_*\subset\mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}\subset\mathrm{GL}\,(\mathfrak{G}).
\end{array}$$

下面先给出李群理论中的重要公式, 再来考虑上面引进的一系列普通群的李群结构.

定理 3.2.24 设 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数, 则有

(1) 在李代数 $\mathfrak{G}$ 中取定基

$$X_i=\sum_j l_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j},\quad 1\le i\le n,$$

在这组基下李代数 $\mathfrak{G}$ 的内自同构 $\operatorname{Ad}(x) = (\operatorname{ad} x)_*$ 的矩阵表示为

$$R(x)^{-1}L(x);$$

(2)

$$\operatorname{Ad}(\exp X) = \exp(\operatorname{ad} X), \quad \forall\, X \in \mathfrak{G}.$$

证 在李群 G 中取定适合的单位标架 (U,φ). 记 $f(x,y)$ 为乘法函数，记

$$l_i^j(x) = \frac{\partial f_j(x,y)}{\partial y_i}\Big|_{y=0}, \quad r_i^j(x) = \frac{\partial f_j(y,x)}{\partial y_i}\Big|_{y=0}.$$

按上标为行、下标为列写成矩阵 $L(x) = (l_i^j(x))$, $R(x) = (r_i^j(x))$. 我们取单位标架 (U,φ), 使得 $\det L(x) > 0$, $\det R(x) > 0$, $\forall\, x \in \varphi(U)$.

为方便起见，将 U 中元素和 $\varphi(U)$ 中对应的元素用相同的符号表示. 任取 $x, y, z, xy, yz, (xy)z, x(yz) \in U$, 由结合律有

$$f(f(x,y),z) = f(x, f(y,z)).$$

下面分别对 x, y, z 求导数，再分别令 x, y, z 为零，我们有

$$\frac{\partial f(f(x,y),z)}{\partial z} = \frac{\partial f(x,\xi)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=f(y,z)} \frac{\partial f(y,z)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial f(\eta,z)}{\partial \eta}\Big|_{\eta=f(x,y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x,\zeta)}{\partial \zeta}\Big|_{\zeta=f(y,z)} \frac{\partial f(y,z)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f(\theta,z)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=f(x,y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,f(y,z))}{\partial x}.$$

因此有

$\partial f(x,y) \quad \partial f(x,z) \quad \partial f(x,z)$

所以记

$$B(x)=R(x)^{-1}L(x),$$

则有

$$B(f(x,y))=B(x)B(y),\quad \forall\ x,y\in U,\ xy\in U.$$

今在李代数 $\mathfrak{G}$ 中取定基

$$X_i=\sum_j l_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j},\quad 1\leq i\leq n.$$

我们计算在这组基下李代数 $\mathfrak{G}$ 的内自同构 $\mathrm{Ad}(x)=(\mathrm{ad}\,x)_*$ 的矩阵表示，这里 $x\in U$.

记 $x,x^{-1},y,xy,yx^{-1},xyx^{-1}\in U$, $z=(\mathrm{ad}\,x)y=xyx^{-1}$

$$(\mathrm{Ad}\,x)X_i=\sum_j a_{ji}(x)X_j,$$

即 $\mathrm{Ad}(x)$ 有方阵表示

$$A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{pmatrix},$$

因此有

$$(\mathrm{Ad}\,x)((X_i)_y)=\sum_j a_{ji}(x)(X_j)_{(\mathrm{ad}\,x)y}=\sum_j a_{ji}(x)(X_j)_z.$$

于是

$$\sum_{j,k}a_{ji}(x)l_j^k(z)\frac{\partial}{\partial z_k}=\sum_j l_i^j(y)\frac{\partial}{\partial y_j}=\sum_{j,k}l_i^j(y)\frac{\partial z_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial z_k}.$$

因此

$$\sum_j l_j^k(z)a_{ji}(x)=\sum_j\frac{\partial z_k}{\partial y_j}l_i^j(y).$$

即

$$L(z)A(x)=\frac{\partial z}{\partial y}L(y),$$

其中 $z=f(f(x,y),x^{-1})=f(x,f(y,x^{-1}))$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial f(\xi,x^{-1})}{\partial \xi}\Big|_{\xi=f(x,y)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\\&=R(z)R(f(x,y))^{-1}L(f(x,y))L(y)^{-1}.\end{aligned}$$

因此

$$A(x)=L(z)^{-1}\frac{\partial z}{\partial y}L(y)=B(z)^{-1}B(f(x,y)).$$

注意到由 $B(f(x,y))=B(x)B(y)$ 可以推出 $B(x^{-1})=B(x)^{-1}$, 因此证明了

$$A(x)=B(z)^{-1}B(f(x,y))=B(z^{-1}xy)=B(xy^{-1}x^{-1}xy)=B(x).$$

所以我们证明了 $\mathrm{Ad}\,(x)$ 的方阵表示为 $B(x)$.

今任取 $X\in\mathfrak{G}$, 则 $\mathrm{Ad}\,(\exp tX)$ 的方阵表示为 $B(\exp tX)$, $|t|<\varepsilon$. 显然

$$B(\exp{(t_1+t_2)X})=B(\exp t_1X\cdot\exp t_2X)=B(\exp t_1X)B(\exp t_2X),$$

其中 $t_1,t_2,t_1+t_2\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 且 $B(\exp tX)$ 关于 t 解析. 这证明了 $B(\exp tX)$ 为一般矩阵李群 $\mathrm{GL}\,(n,\mathbb{R})$ 中的单参数子群段, $|t|<\varepsilon$. 所以存在依赖于元素 X 的 $n\times n$ 矩阵 $C(X)$, 使得

$$B(\exp tX)=\exp tC(X),\quad |t|<\varepsilon.$$

我们计算 $C(X)$ 如下: 设 $X=\sum a_iX_i\in\mathrm{gl}\,(n,\mathbb{R})$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp tX)_k\Big|_{t=0}=a_k,\ 1\le k\le n.$$

而

$$C(X) =\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(\exp tX)\big|_{t=0} = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(\xi)^{-1}L(\xi)\big|_{\xi=\exp tX})_{t=0}$$
$$=((-R(\xi)^{-1}\frac{\mathrm{d}R(\xi)}{\mathrm{d}t}R(\xi)^{-1}L(\xi) + R(\xi)^{-1}\frac{\mathrm{d}L(\xi)}{\mathrm{d}t})_{\xi=\exp tX})_{t=0}$$
$$=((\frac{\mathrm{d}L(\xi)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}R(\xi)}{\mathrm{d}t})_{\xi=\exp tX})_{t=0}.$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}(\exp tX)_j}{\mathrm{d}t} = \sum_i a_i l_i^j(\exp tX),$$

于是

$$C(X) = (\sum_j(\frac{\partial L(\xi)}{\partial \xi_j} - \frac{\partial R(\xi)}{\partial \xi_j})_{\xi=\exp tX}\frac{\mathrm{d}(\exp tX)_j}{\mathrm{d}t})_{t=0}$$
$$= \sum_j a_j(\frac{\partial(L(\xi) - R(\xi))}{\partial \xi_j})_{\xi=0}.$$

因此记 $C(X) = (C_{pq}(X))$, 则有

$$C_{pq}(X) = \sum_j a_j(\frac{\partial l_q^p(\xi)}{\partial \xi_j} - \frac{\partial r_q^p(\xi)}{\partial \xi_j})_{\xi=0}.$$

其中 $L(x) = (l_i^j(x))$, $R(x) = (r_i^j(x))$. 今

$$\frac{\partial r_q^p(\xi)}{\partial \xi_j}\Big|_{\xi=0} = \frac{\partial^2 f_p(x,y)}{\partial x_q \partial y_j}\Big|_{x=y=0} = \frac{\partial l_j^p(x)}{\partial x_q}\Big|_{x=0},$$

所以

$$C_{pq}(X) = \sum_j a_j(\frac{\partial l_q^p(\xi)}{\partial \xi_j} - \frac{\partial l_j^p(\xi)}{\partial \xi_q})_{\xi=0}$$
$$= \sum_j a_j \sum_k (l_j^k(x)\frac{\partial l_q^p(x)}{\partial x_k} - l_q^k(x)\frac{\partial l_j^p(x)}{\partial x_k})_{x=0}.$$

由 S.Lie 第二基本定理可知李代数 $\mathfrak{G}$ 关于基 $X_1, \cdots, X_n$ 的乘法表若为

$$[X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k,$$

则有

$$C_{pq}(X) = \sum_j a_j C_{jq}^p.$$

这证明了

$$\mathrm{Ad}\,(\exp tX) = \exp t\mathfrak{A}(X),$$

其中

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(X)X_q &= \sum_p c_{pq}(X)X_p = \sum_{j,p} a_j c_{jq}^p X_p = \sum_j a_j [X_j, X_q] \\ &= [X, X_q] = (\mathrm{ad}\,X)X_q, \quad 1 \le q \le n.\end{aligned}$$

即 $\mathfrak{A}(X) = \mathrm{ad}\,X$. 因此有 $\mathrm{Ad}\exp tX = \exp t\mathrm{ad}\,X$, $|t| < \varepsilon$. 于是可知当 $t \in \mathbb{R}$ 时等式也成立. 定理证完.

现在来给出很有用的 Campbell-Baker-Hausdorff 公式.

定理 3.2.25(Campbell-Baker-Hausdorff 公式) 设 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数. 则存在 Euclidean 空间 $\mathfrak{G}$ 的原点标架 (O, φ), 使得映射 exp 在标架 (O, φ) 上为双解析同胚. 任取 $X, Y \in O$, 设 $(\exp X)(\exp tY) \in \exp O$, $0 \le t \le 1$, 则有

$$(\exp X)(\exp Y) = \exp [X + \int_0^1 \psi((\exp(\mathrm{ad}\,X))(\exp t(\mathrm{ad}\,Y)))(Y)\mathrm{d}t],$$

其中

$$\psi(z) = (z-1)^{-1} z \log z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(z-1)^k}{k(k+1)}$$

在 $z = 1$ 附近解析.

证 令 exp 在 O 上一一, 且 $\sigma(t)=(\exp X)(\exp tY)\in\exp O$, $0\le t\le 1$. 所以任意固定 $t\in[0,1]$, 则存在 $Z(t)\in\mathfrak{G}$, 使得

$$\exp Z(t)=(\exp X)(\exp tY)=\sigma(t),\quad 0\le t\le 1.$$

我们的目的是计算 $\sigma(1)=(\exp X)(\exp Y)=\exp Z(1)$, 为此考虑原点坐标邻域 O 中关于 s 的单参数子群段

$$g(s,t)=\exp sZ(t),\quad |s|<\varepsilon(t),\ t\in[0,1].$$

在 t 固定时, 曲线 $g(s,t)$ 在点 $g(s,t)$ 的切向量为 $\dfrac{\partial g(s,t)}{\partial s}$, 即 $\dfrac{\partial g(s,t)}{\partial s}\in T_{g(s,t)}(G)$, 于是

$$X_e(s,t)=g(s,t)^{-1}\frac{\partial g(s,t)}{\partial s}\in T_e(G).$$

在 s 固定时, 曲线 $g(s,t)$ 在点 $g(s,t)$ 的切向量为 $\dfrac{\partial g(s,t)}{\partial t}$, 即 $\dfrac{\partial g(s,t)}{\partial t}\in T_{g(s,t)}(G)$, 于是

$$Y_e(s,t)=g(s,t)^{-1}\frac{\partial g(s,t)}{\partial t}\in T_e(G).$$

注意到 $g(s,t)$ 为关于单参数 s 的单参数子群, 因此 $X_e(s,t)=Z(t)$, 而

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial X_e(s,t)}{\partial t}-\frac{\partial Y_e(s,t)}{\partial s}\\
=&\frac{\partial}{\partial t}\Big(g(s,t)^{-1}\frac{\partial g(s,t)}{\partial s}\Big)-\frac{\partial}{\partial s}\Big(g(s,t)^{-1}\frac{\partial g(s,t)}{\partial t}\Big)\\
=&-g(s,t)^{-1}\frac{\partial g(s,t)}{\partial t}g(s,t)^{-1}\frac{\partial g(s,t)}{\partial s}+g(s,t)^{-1}\frac{\partial^2 g(s,t)}{\partial s\partial t}\\
&+g(s,t)^{-1}\frac{\partial g(s,t)}{\partial s}g(s,t)^{-1}\frac{\partial g(s,t)}{\partial t}-g(s,t)^{-1}\frac{\partial^2 g(s,t)}{\partial s\partial t}\\
=&\Big[g(s,t)^{-1}\frac{\partial g(s,t)}{\partial s},g(s,t)^{-1}\frac{\partial g(s,t)}{\partial t}\Big]=[X_e(s,t),Y_e(s,t)],
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial X_e(s,t)}{\partial t}=[X_e(s,t),Y_e(s,t)]+\frac{\partial Y_e(s,t)}{\partial s}$$
$$=(\mathrm{ad}\,Z(t))Y_e(s,t)+\frac{\partial Y_e(s,t)}{\partial s}.$$

下面计算 $Y_e(s,t)$. 今由 $g(s,t)=\exp sZ(t)$, 所以

$$Y_e(0,t)=g(0,t)^{-1}\frac{\partial g(0,t)}{\partial t}=0,$$
$$Y_e(1,t)=g(1,t)^{-1}\frac{\partial g(1,t)}{\partial t}=(\exp Z(t))^{-1}\frac{\partial \exp Z(t)}{\partial t}$$
$$=(\exp Z(t))^{-1}\frac{\partial \exp X\cdot\exp tY}{\partial t}=((\exp Z(t))^{-1}\exp X\cdot\exp tY)(Y)$$
$$=Y,$$

即有

$$Y_e(0,t)=0,\qquad Y_e(1,t)=Y.$$

而

$$Y_e(s,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k}{k!}\Big(\frac{\partial^k Y_e(s,t)}{\partial s^k}\Big|_{s=0}\Big),$$

所以

$$Y=Y_e(1,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(\frac{\partial^k Y_e(s,t)}{\partial s^k}\Big)_{s=0}.$$

另一方面

$$\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t}=(\mathrm{ad}\,Z(t))Y_e(s,t)+\frac{\partial Y_e(s,t)}{\partial s},$$

所以

$$\frac{\partial^k Y_e(s,t)}{\partial s^k}=-(\mathrm{ad}\,Z(t))\frac{\partial^{k-1}Y_e(s,t)}{\partial s^{k-1}}$$
$$=(-1)^{k-1}(\mathrm{ad}\,Z(t))^{k-1}\frac{\partial Y_e(s,t)}{\partial s}$$
$$=(-1)^{k-1}(\mathrm{ad}\,Z(t))^{k-1}\Big(\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t}-(\mathrm{ad}\,Z(t))Y_e(s,t)\Big),$$

其中 $k=2,3,\cdots$. 取 $s=0$, 有

$$\left.\frac{\partial^k Y_e(s,t)}{\partial s^k}\right|_{s=0}=(-1)^{k-1}(\operatorname{ad}Z(t))^{k-1}\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t},\quad k=2,3,\cdots.$$

又

$$\left.\frac{\partial Y_e(s,t)}{\partial s}\right|_{s=0}=\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t}-\operatorname{ad}Z(t)Y_e(0,t)=\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t},$$

于是

$$Y=Y_e(1,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(-1)^{k-1}(\operatorname{ad}Z(t))^{k-1}\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t}=\psi(\exp\operatorname{ad}Z(t))(Y),$$

因此

$$\begin{aligned}Z(1)&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+Z(0)\\&=Z(0)+\int_0^1\psi(\exp\operatorname{ad}Z(t))(Y)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

今

$$\begin{aligned}\exp\operatorname{ad}Z(t)&=\operatorname{Ad}\exp Z(t)=\operatorname{Ad}((\exp X)(\exp tY))\\&=(\operatorname{Ad}(\exp X))(\operatorname{Ad}(\exp tY))=(\exp\operatorname{ad}X)(\exp t\operatorname{ad}Y).\end{aligned}$$

又 $\exp Z(0)=\exp X$, 但是 exp 在原点坐标邻域 O 上一一，所以证明了 $Z(0)=X$. 代回原式便证明了定理. 证完.

推论 1 设 $X,Y\in\mathfrak{G}$, 且 $[X,Y]=0$, 则有

$$(\exp X)(\exp Y)=(\exp Y)(\exp X)=\exp(X+Y).$$

因此，连通李群交换当且仅当它的李代数交换.

证 今 $X,Y\in\mathfrak{G}$, 于是存在自然数 N, 使得 $X_0=\dfrac{1}{N}X$, $Y_0=\dfrac{1}{N}Y\in O$. 由定理 3.2.25, 有

$$(\exp X_0)(\exp Y_0)=\exp\left[X_0+\int_0^1\psi((\exp\operatorname{ad}X_0)(\exp t\operatorname{ad}Y_0))Y_0\mathrm{d}t\right].$$

由于

$$((\exp \operatorname{ad} X_0)(\exp t \operatorname{ad} Y_0))Y_0 = (\exp \operatorname{ad} X_0)Y_0 = Y_0,$$

于是

$$(\exp X_0)(\exp Y_0) = \exp [X_0 + \int_0^1 (\psi(1)Y_0)\mathrm{d}t] = \exp (X_0 + Y_0).$$

所以证明了 $(\exp X)(\exp Y) = \exp (X+Y)$. 这证明了前一断言.

今若李代数 $\mathfrak{G}$ 可交换, 则有

$$(\exp X)(\exp Y) = (\exp Y)(\exp X), \ \forall\ X, Y \in \mathfrak{G}.$$

由于李群 G 连通, 即 G 由 $\exp \mathfrak{G}$ 生成. 这证明了李群 G 可交换. 反之, 若李群可交换, 因此任取 $g, h \in G$, 则 $(\operatorname{ad} g)h = ghg^{-1} = h$, 即 $\operatorname{ad} g = \mathrm{id}$. 于是 $\operatorname{Ad} g = \mathrm{id}$, 即任取 $X \in \mathfrak{G}$, 有 $\operatorname{Ad} \exp tX = \exp t \operatorname{ad} X = \mathrm{id}$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$. 这证明了 $\operatorname{ad} X = 0$, 即 $X \in C(\mathfrak{G})$. 至此证明了 $\mathfrak{G} = C(\mathfrak{G})$, 即李代数 $\mathfrak{G}$ 中任取两元素都可交换, 这证明了 $\mathfrak{G}$ 为交换李代数. 证完.

推论 2 任取 $X, Y \in \mathfrak{G}$, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使得当 $|t| < \varepsilon$ 时有

$$(\exp tX)(\exp tY) = \exp (t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + o(t^2)),$$
$$(\exp tX)(\exp tY)(\exp tX)^{-1}(\exp tY)^{-1} = \exp (t^2[X, Y] + o(t^2)).$$

证 由 Campbell-Baker-Hausdorff 公式, 有

$$\exp tX \cdot \exp tY = \exp [tX + \int_0^1 \psi(\exp t(\operatorname{ad} X) \cdot \exp st(\operatorname{ad} Y))(tY)\mathrm{d}s],$$

其中

$$\psi(z) = (z-1)^{-1} z \log z = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(z-1)^k}{k(k+1)}.$$

于是

$$
\begin{aligned}
&(\exp tX)(\exp tY)\\
&=\exp\Big[tX+\int_0^1\psi((1+t\,\mathrm{ad}\,X+\frac{1}{2}t^2(\mathrm{ad}\,X)^2+o(t^2))\\
&\quad(1+st(\mathrm{ad}\,Y)+\frac{1}{2}s^2t^2(\mathrm{ad}\,Y)^2+o(t^2))(tY)\mathrm{d}s\Big]\\
&=\exp\Big[tX+\int_0^1\psi(1+t\,\mathrm{ad}\,X+\frac{1}{2}t^2(\mathrm{ad}\,X)^2\\
&\quad+st\,\mathrm{ad}\,Y+st^2\mathrm{ad}\,X\mathrm{ad}\,Y+\frac{1}{2}s^2t^2(\mathrm{ad}\,Y)^2o(t^2))(tY)\mathrm{d}s\Big]\\
&=\exp\Big[tX+tY+\frac{1}{2}t^2[X,Y]+o(t^2)\Big].
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&(\exp tX)(\exp tY)(\exp(-tX))\\
&=(\exp(tX+tY+\frac{1}{2}t^2[X,Y]+o(t^2)))(\exp(-tX))\\
&=\exp(tY+t^2[X,Y]+o(t^2)),\\
&(\exp tX)(\exp tY)(\exp(-tX))(\exp(-tY))\\
&=\exp(t^2[X,Y]+o(t^2)).
\end{aligned}
$$

证完.

利用上面的推论 2, 我们来给出下面两个重要定理.

定理 3.2.26 (É.Cartan) 李群 G 的闭普通子群在诱导拓扑下构成李子群.

证 设 H 为李群 G 的闭普通子群, G 作为拓扑空间, 于是子集 H 按诱导拓扑构成拓扑空间. 下面我们首先在拓扑子空间 H 中引进解析结构, 使得 H 为解析流形; 其次证明 H 为李子群.

为此, 我们先证李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 中的子集

$$
\mathfrak{H}=\{X\in\mathfrak{G}\mid \exp tX\in H,\ \forall\in\mathbb{R}\}
$$

为李代数 $\mathfrak{G}$ 的子代数.

事实上，任取 $X, Y \in \mathfrak{H}$, 由定理 3.2.25 的推论 2, 有

$$((\exp \frac{t}{n} X)(\exp \frac{t}{n} Y))^n = \exp(t(X+Y) + n\, o(\frac{t}{n})),\ n = 1, 2, \cdots,$$

当 $|t| < \varepsilon$ 时成立. 由 H 为普通子群及 $\mathfrak{H}$ 的定义可知上式左端在普通子群 H 中. 但是 H 为闭子集, 所以当 $n \to \infty$ 时极限仍在 H 中. 这证明了 $\exp t(X+Y) \in \mathfrak{H},\ \forall\, |t| < \varepsilon$. 由于单参数子群 $\exp t(X+Y),\ \forall\, t \in \mathbb{R}$ 由 $\exp t(X+Y),\ \forall\, |t| < \varepsilon$ 生成, 所以证明了 $\exp t(X+Y) \in \mathfrak{H},\ \forall\, t \in \mathbb{R}$. 由 $\mathfrak{H}$ 的定义可知 $X + Y \in \mathfrak{H}$. 再有

$$\begin{aligned}&((\exp \frac{t}{n} X)(\exp \frac{t}{n} Y)(\exp \frac{t}{n} X)^{-1}(\exp \frac{t}{n} Y)^{-1})^{n^2}\\ =\ &\exp(t^2[X, Y] + n^2 o(\frac{t}{n})^2)).\end{aligned}$$

同理便证明了 $[X, Y] \in \mathfrak{H}$, 即 $\mathfrak{H}$ 为李代数.

今 $\mathfrak{H}$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的子代数. 于是存在李代数 $\mathfrak{G}$ 的子空间 $\mathfrak{P}$, 使得李代数 $\mathfrak{G}$ 有子空间直接和分解

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{P}.$$

$\mathfrak{G}$ 作为 Euclid 空间, 可取 $\mathfrak{G}$ 中原点坐标邻域 U. 使得对 $\mathfrak{H}$ 中基 $X_1, \cdots, X_r$ 及 $\mathfrak{P}$ 中基 $X_{r+1}, \cdots, X_n$, 有

$$U = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \mid |\lambda_i| < \varepsilon,\ 1 \le i \le n\}.$$

记

$$V = \{\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i X_i \mid |\lambda_i| < \varepsilon,\ r+1 \le i \le n\} \subset \mathfrak{P}.$$

我们来证存在 $\varepsilon > 0$, 使得当 $X \ne 0$, $X \in V$ 时, $\exp X \notin H$.

事实上, 若不存在这种 $\varepsilon > 0$, 在子空间 $\mathfrak{P}$ 中存在序列 $\{Y_i\}$, 使得 $\lim_{i\to\infty} Y_i = 0$, 又 $\exp Y_i \in H$, $i = 1, 2, \cdots$. 在子空间 $\mathfrak{P}$ 中取有界闭集

$$S = \{Y \in U \mid 1 \le |Y| \le 2\}.$$

今 $Y_i \in \mathfrak{P}$, 所以存在正整数 N 及 m_i, 使得当 $i > N$ 时有 $m_i Y_i \in S$. 由 S 为紧集可知序列 $\{m_i Y_i\}_{i>N}$ 中存在收敛子序列. 因此我们无妨设 $\mathfrak{P}$ 中序列 $Y_1, Y_2, \cdots$ 有 $m_i Y_i \in S$, $i = 1, 2, \cdots$, 且序列 $\{Y_i\}$ 及 $\{m_i Y_i\}$ 都收敛. 记序列 $\{m_i Y_i\}$ 的极限为 Y_0. 自然 $Y_0 \in S$. 今 $Y_i \to 0$, $m_i Y_i \to Y_0 \neq 0$, 所以 $m_i \to +\infty$. 注意到 $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{P} = 0$. 为了推出矛盾，我们只要证明 $Y_0 \in \mathfrak{H}$ 就可以了. 今任取正实数 m, 取正整数 $f_i(m)$, 使得 $m_i m \leq f_i(m) \leq 1 + m_i m$. 因此 $m \leq \dfrac{f_i(m)}{m_i} \leq m + \dfrac{1}{m_i}$. 由 $m_i \to +\infty$ 可知 $\dfrac{f_i(m)}{m_i} \to m$. 另一方面，由 $\exp Y_i \in H$, 所以 $\exp f_i(m) Y_i \in H$. 今 $f_i(m) Y_i = \dfrac{f_i(m)}{m_i}(m_i Y_i) \to m Y_0$. 由于 H 为闭子集，又 $\exp f_i(m) Y_i \to \exp m Y_0$, 所以证明了 $\exp m Y_0 \in H$, 因此 [illegible]

了

$$W \cap H = \{\exp \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i \mid |\lambda_1| < \varepsilon, \cdots, |\lambda_r| < \varepsilon\}.$$

在普通子群 H 中任取一元素 h, 作左平移 L_h, 则

$$L_h(W) \cap H = \{\, h \cdot \exp \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i \,\Big|\, \forall\, |\lambda_i| < \varepsilon,\ 1 \le i \le r \,\}.$$

因此有 $L_h(W) \cap H$ 到 $\mathbb{R}^r$ 中某个含原点的立方体的同胚映射 φ, 使得

$$(\varphi \circ L_{h^{-1}})(h \cdot \exp \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r).$$

由此也不难证明 H 的开覆盖 $\{(L_h(W) \cap H,\ \varphi \circ L_{h^{-1}}) \mid \forall\, h \in H\}$ 定义了 H 上的解析结构，从而 H 按诱导拓扑构成解析流形，且为流形 G 的子流形.

最后证明 $(h_1, h_2) \to h_1 h_2^{-1}$, $\forall\, h_1, h_2 \in H$ 解析, 即 H 为李群. 为此, 只要证在 $L_{h_1}(W) \times L_{h_2}(W)$ 上解析. 任取 $L_{h_1}(W) \times L_{h_2}(W)$ 中的元素 $((h_1 \cdot \exp \sum_{i=1}^{r} x_i X_i),\ (h_2 \cdot \exp \sum_{i=1}^{r} y_i X_i))$, 其像为

$$h_1 \cdot (\exp \sum_{i=1}^{r} x_i X_i)(\exp \sum_{i=1}^{r} (-y_j) X_j) h_2^{-1}.$$

由于李群乘法的解析性，所以 $(h_1, h_2) \to h_1 h_2^{-1}, \forall\, h_1, h_2 \in H$ 关于坐标解析. 由此可证 H 为李子群. 证完.

定理 3.2.27 李群 G 的李子群 H 为闭李子群，当且仅当 H 为正则子流形，即 H 的拓扑为诱导拓扑.

证 由定理 3.2.26, 我们只要证当 H 的拓扑为诱导拓扑时 H 的闭包 $\overline{H} = H$. 显然 $\overline{H}$ 为普通子群，且为闭子集. 由定理 3.2.26 可知， $\overline{H}$ 按诱导拓扑为李子群.

在 G 中取单位标架 (U, φ). 由于 U 同胚于 Euclid 空间, 所以存在单位标架 (V, φ), 使得 $V \subset \overline{V} \subset U$, 且 $\overline{V}$ 为紧子集. 记 $hV = V_h$,

则 $(V_h, \varphi\circ L_{h^{-1}})$ 为 h 点的可容许标架，其中 $h\in H$. 今 $V_h\cap H$ 为 H 的开子集，于是在 V 中存在可容许单位标架 (V_1,φ), 使得 $W_h = hV_1\cap H$ 为子流形 H 的坐标邻域，且拓扑空间 H 中子集 W_h 在 H 中的闭包 $\overline{(W_h)_H}\subset H$. 今 G 中有开子集 $\widetilde{V}=\bigcup\limits_{h\in H} hV_1\supset H$, 我们来证 $H=\widetilde{V}\cap\overline{H}$. 事实上，任取 $g\in\widetilde{V}\cap\overline{H}$, 则由 $g\in\overline{H}$, 所以存在 $h\in H$, 使得 $g\in hV_1\cap\overline{H}$. 现在考虑 $hV_1\cap\overline{H}$ 中的任一元素 g. 对点 g 在 G 中的任一开邻域 U_g, 由于 $g\in U_g\cap hV_1$, 所以 $U_g\cap hV_1$ 为含点 g 的 G 的开邻域. 而 $g\in\overline{H}$ 推出 $(U_g\cap hV_1)\cap H\neq\emptyset$, 所以 $U_g\cap W_h\neq\emptyset$. 由 U_g 的任意选取，便证明了 $g\in\overline{W}_h$. 再由 g 为 $\widetilde{V}\cap\overline{H}$ 中任一元素，所以证明了

$$hV_1\cap\overline{H}\subset\overline{(W_h)}_H=\overline{(hV_1\cap H)_H}=h\overline{V_1}\cap H.$$

但是 $hV_1\cap\overline{H}\subset hV_1$. 这证明了

$$hV_1\cap\overline{H}\subset hV_1\cap H\subset hV_1\cap\overline{H},$$

即 $hV_1\cap H=hV_1\cap\overline{H}$. 这推出 (由于 $\widetilde{V}\supset H$)

$$\begin{aligned} H=\widetilde{V}\cap H &= \Big(\bigcup_{h\in H} hV_1\Big)\cap H=\bigcup_{h\in H}(hV_1\cap H)\\ &=\bigcup_{h\in H}(hV_1\cap\overline{H})=\widetilde{V}\cap\overline{H}. \end{aligned}$$

至此证明了断言.

最后来证 $\overline{H}=H$. 取定 $u\in H$, 则 $\widetilde{V}$ 为点 u 在李群 G 中的开邻域，所以 $u^{-1}\widetilde{V}$ 为单位开邻域. 因此存在单位开邻域 V_0, 使得 $V_0^{-1}=V_0\subset u^{-1}\widetilde{V}$. 任取 $h\in\overline{H}$, 则 $hV_0\cap H\neq\emptyset$. 再任取 $h_1\in hV_0\cap H$, 则 $h^{-1}h_1\in V_0\subset u^{-1}\widetilde{V}$, 即 $uh^{-1}h_1\in\widetilde{V}$, 这里 $u,h_1\in H,\forall h\in\overline{H}$. 所以 $uh^{-1}h_1\in\widetilde{V}\cap\overline{H}=H$. 这证明了 $h^{-1}\in u^{-1}Hh_1^{-1}=H$, 即 $h\in H$. 所以 $\overline{H}=H$. 证完.

另一方面，利用 exp 映射，可以给出如下李子群和李子代数的对应关系：

定理 3.2.28 设 $\mathfrak{G}$ 为李群 G 的李代数. 任给李代数 $\mathfrak{G}$ 的子代数 $\mathfrak{H}$, 李群 G 有子集 $\exp\mathfrak{H}$. 则由 $\exp\mathfrak{H}$ 生成的普通子群 H 为李群 G 的连通李子群, 它的李代数和 $\mathfrak{H}$ 同构. 反之, 任给李群 G 的连通李子群 H, 则在李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 中唯一存在李代数 $\mathfrak{H}$, 使得 $\exp\mathfrak{H}$ 生成 H. 所以李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 的子代数在如下手续下有自然的一一对应, 该手续为先作 exp, 再生成.

特别地, 连通李群 G 的一维连通子群为单参数子群, 所以一维连通李子群必可交换.

证 记 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数. 任取 $\mathfrak{G}$ 中子代数 $\mathfrak{H}$, 于是存在 $\mathfrak{G}$ 中子空间 $\mathfrak{P}$, 使得 $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}+\mathfrak{P}$ 为子空间直接和. 在 $\mathfrak{H}$ 中取基 $X_1,\cdots,X_r$, 再在 $\mathfrak{P}$ 中取基 $X_{r+1},\cdots,X_n$. 在 G 中取第三类标准单位标架 (U,φ), 于是 U 定义为

$$U=\{g=(\exp\sum_{i=1}^{r}x_iX_i)(\exp\sum_{i=r+1}^{n}x_iX_i),\varphi(g)=(x_1,\cdots,x_n)\\ \mid\forall\,|x_i|<\varepsilon,\,1\le i\le n\,\}.$$

考虑

$$V=\{g\in U\mid\varphi(g)=(x_1,\cdots,x_r,0,\cdots,0),\ |x_1|<\varepsilon,\cdots,|x_s|<\varepsilon,\},$$

于是

$$V_0=\{\sum_{i=1}^{r}x_iX_i\mid\forall\,|x_i|<\varepsilon,\,1\le i\le r\}$$

为 Euclid 空间 $\mathfrak{H}$ 中原点的邻域, 且 $\exp V_0=V$. 今任取 $X,Y\in V_0$, 由定理 3.2.25 的推论 2 可知, 存在 $\varepsilon_0>0$, 使当 $|t|<\varepsilon_0$ 时有 $t^2[X,Y]+o(t^2)\in V_0$, 因此

$$(\exp tX)(\exp tY)\in V.$$

记

$$V_0'=\{\sum_{i=1}^{r}x_iX_i\mid\forall\,|x_i|<\varepsilon_0,\,1\le i\le r\},$$

$\exp V_0' = V'$, 则证明了 $\exp tX, \exp tY \in V'$, 因此 $(V')^2 \subset V$. 又由 $(\exp \sum_{i=1}^{r} x_i X_i)^{-1} = \exp \sum_{i=1}^{r}(-x_i)X_i$, 所以 $(V')^{-1} = V'$. 显然映射 $(x,y) \to xy^{-1}$, $\forall\, x, y \in V'$ 给出 $V' \times V'$ 到 V 内的解析映射.

记 H 为由 $V = \exp V_0$ 生成的普通子群, 由定理 3.1.31 的证明可知 H 为连通李群, 且其李代数和 $\mathfrak{H}$ 同构. 所以我们证明了给定连通李群 G, 记 $\mathfrak{G}$ 为其李代数, $\mathfrak{H}$ 为 $\mathfrak{G}$ 的子代数, 则 $\exp \mathfrak{H}$ 生成连通李子群 H.

反之, 任给连通李群 G 的连通李子群 H. 记 $\mathfrak{H}_0$ 为李群 H 的李代数. 由李子群的定义可知, 恒等映射 $\mathrm{id} : H \to G$ 为一一解析映射, 又 Jacobian 满秩. 所以任取 $X \in \mathfrak{H}$, 则 $X_e \in T_e(H)$, 其中 e 为群 G 的单位元素. 而 $\mathrm{id}(e) = e$, 所以 $(\mathrm{id})_*(X_e) \in T_e(G)$. 将 $(\mathrm{id})_*(X_e)$ 作左平移 L_g 的微分 $(L_g)_*$, $\forall\, g \in G$, 得到元素 $Y \in \mathfrak{G}$. 而 $Y_e = (\mathrm{id})_*(X_e)$. 任取 $h \in H$, 不难证明

$$Y_h = (L_h)_* Y_e = (L_h)_*(\mathrm{id})_*(X_e).$$

由于 $L_h \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ L_h$, $\forall\, h \in H$, 所以 $Y_h = (\mathrm{id})_*(L_h)_*(X_e) = (\mathrm{id})_*(X_h)$, $\forall\, h \in H$. 所以证明了 $\mathfrak{H} = (\mathrm{id})_* \mathfrak{H}_0$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 中的子代数, 且 $\mathfrak{H}_0$ 和 $\mathfrak{H}$ 同构. 我们视 Y 为 X, 在李群 G 中利用李代数 $\mathfrak{H}$ 引进第二类标准单位标架, 所以不难证明 H 由 $\exp \mathfrak{H}$ 生成. 证完.

现在回到连通李群 G 的自同构群. 利用定义 3.2.10 及定义 3.2.22, 在前面给出了一批普通群的包含关系. 我们陆续引进李群结构, 使得上面给出的普通群都是李群, 且 $*$ 为李群同构.

下面依次在上面给出的一系列普通群中引进李群结构如下:

定理 3.2.29 设 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数, 则 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$ 为 $\mathrm{GL}(\mathfrak{G})$ 的闭普通子群, 所以是闭李子群.

证 设 $\dim \mathfrak{G} = n$. 在李代数 $\mathfrak{G}$ 中取定一组基 $e_1, \cdots, e_n$, 它有乘法表

$$[e_i, e_j] = \sum_k C_{ij}^k e_k, \quad 1 \le i, j \le n.$$

今任取 $\mathcal{A} \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$, 即 $\mathcal{A}$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的自同构，所以

$$\mathcal{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, \quad 1 \le i \le n.$$

又 $\mathcal{A}[e_i, e_j] = [\mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_j]$, 即

$$\mathcal{A} \sum_k C_{ij}^k e_k = [\sum_p a_{pi} e_p, \sum_q a_{qj} e_q].$$

所以线性变换 $\mathcal{A} \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$, 当且仅当线性变换 $\mathcal{A}$ 的方阵表示 $A = (a_{ij})$ 适合条件

$$\sum_k C_{ij}^k a_{lk} = \sum_{p,q} a_{pi} a_{qj} C_{pq}^l, \quad 1 \le i, j, l \le n.$$

所以自同构群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$ 中元素的方阵表示为一般线性群 $\mathrm{GL}\,(\mathfrak{G})$ 中适合多项式组

$$\sum_k C_{ij}^k x_{lk} - \sum_{p,q} C_{pq}^l x_{pi} x_{qj}, \quad 1 \le i, j, l \le n$$

的零点集. 所以自同构群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$ 为一般线性群 $\mathrm{GL}\,(\mathfrak{G})$ 的闭普通子群，因此是李子群. 证完.

定理 3.2.30 设 $\widehat{G}$ 为连通且单连通李群，$\widehat{\mathfrak{G}}$ 为李群 $\widehat{G}$ 的李代数，则

$$\mathrm{Aut}\,(\widehat{G})_* = \mathrm{Aut}\,(\widehat{\mathfrak{G}}).$$

所以 $\mathrm{Aut}\,(\widehat{G})$ 为李群，且 $*$ 为李群的同构.

证 由于李群 $\widehat{G}$ 连通且单连通，所以李代数 $\widehat{\mathfrak{G}}$ 的自同构 ρ 可提升为李群的自同构 σ, 且有 $\sigma_* = \rho$. 这证明了 $\mathrm{Aut}\,(\widehat{G})_* = \mathrm{Aut}\,(\widehat{\mathfrak{G}})$. 由定理 3.2.29 证明了 $\mathrm{Aut}\,(\widehat{\mathfrak{G}})$ 为一般线性群 $\mathrm{GL}\,(\widehat{\mathfrak{G}})$ 的李子群，所以 $\mathrm{Aut}\,(\widehat{\mathfrak{G}})_*$ 为李群. 由于 $* : \mathrm{Aut}\,(\widehat{G}) \to \mathrm{Aut}\,(\widehat{G})_*$ 给出了普通群同构，于是在 $\mathrm{Aut}\,(\widehat{G})$ 中引进了解析结构，使得 $*$ 为李群同构. 至此证明了定理. 证完.

定理 3.2.31 普通群 $\mathrm{Aut}_\Gamma(\widehat{G})_*$ 为李群 $\mathrm{Aut}(\widehat{G})_*$ 的闭子集，所以是闭李子群. 因此， $\mathrm{Aut}_\Gamma(\widehat{G})$ 为 $\mathrm{Aut}(\widehat{G})$ 的闭李子群.

证 我们只要证

$$\mathrm{Aut}_\Gamma(\widehat{G}) = \{\widehat{\theta} \in \mathrm{Aut}(\widehat{G}) \mid \widehat{\theta}(\Gamma) = \Gamma\}$$

为李群 $\mathrm{Aut}(\widehat{G})$ 的闭普通子群就够了. 显然，李群 $\widehat{G}$ 的离散正规子群 Γ 为闭子群. 在 $\mathrm{Aut}_\Gamma(\widehat{G})$ 中考虑收敛序列 $\{\sigma_k\}$, 记 σ_0 为其极限. 今 $\sigma_k(\Gamma) = \Gamma$, 所以 $\sigma_0(\Gamma) \subset \overline{\Gamma} = \Gamma$, 即 $\sigma_0 \in \mathrm{Aut}_\Gamma(\widehat{G})$. 这证明了 $\mathrm{Aut}_\Gamma(\widehat{G})$ 为李群 $\mathrm{Aut}(\widehat{G})$ 的李子群. 证完.

注意到 $\xi: \mathrm{Aut}_\Gamma(\widehat{G}) \to \mathrm{Aut}(G)$ 为普通群同构，前面已给出 $\mathrm{Aut}_\Gamma(\widehat{G})$ 的李群结构，因此我们可以使 ξ 为双解析同胚，从而在普通群 $\mathrm{Aut}(G)$ 中引进李群结构，所以 $\mathrm{Aut}(G)$ 为李群. 同样，使 $*$ 为李群同构，从而在普通群 $\mathrm{Aut}(G)_*$ 中引进了李群结构，这时也给出了 ξ_* 为李群 $\mathrm{Aut}_\Gamma(G)_*$ 到 $\mathrm{Aut}(G)*$ 上的李群同构. 另一方面，已知 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$ 为一般线性群 $\mathrm{GL}(\mathfrak{G})$ 的闭子集，所以为闭子李群. 这样一来，我们在普通群 $\mathrm{Aut}(G)_*$ 中引进了两种李群结构. 注意到李代数 $\mathfrak{G}$ 和 $\widehat{\mathfrak{G}}$ 互相同构，所以 $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathfrak{G}})$ 和 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$ 作为李群互相同构 (这时 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$ 是作为一般线性群 $\mathrm{GL}(\mathfrak{G})$ 的闭李子群). 因此，易证上面给出的 $\mathrm{Aut}(G)_*$ 的李群结构实际上是同一个结构.

为了证明 $\mathrm{ad}\, G$ 及 $\mathrm{Ad}\, G$ 为李群，我们先来计算李群 $\mathrm{Aut}(G)$ 及 $\mathrm{Aut}(G)_*$ 的李代数.

定理 3.2.32 李代数 $\mathfrak{G}$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$ 的李代数为李代数 $\mathfrak{G}$ 的微分代数 $\mathrm{Der}(\mathfrak{G})$.

证 记李群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$ 的李代数为 $D(\mathfrak{G})$, 于是任取 $A \in D(\mathfrak{G})$, 则 $\exp tA$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ 为李群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$ 的单参数子群. 因此任取 $X, Y \in \mathfrak{G}$, 有

$$(\exp tA)[X, Y] = [(\exp tA)X, (\exp tA)Y].$$

双方对 t 求微分，再取 $t = 0$, 便有

$$A([X, Y]) = [A(X), Y] + [X, A(Y)].$$

这证明了 $A \in \mathrm{Der}(\mathfrak{G})$, 即有 $D(\mathfrak{G}) \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{G})$.

反之，任取 $A \in \mathrm{Der}(\mathfrak{G})$, 即有

$$A([X,Y]) = [A(X),Y] + [X,A(Y)].$$

由归纳法立即有

$$A^k([X,Y]) = \sum_{t=0}^{k} C_k^t [A^t X, A^{k-t} Y],$$

所以

$$(\exp tA)[X,Y] = [(\exp tA)X, (\exp tA)Y],$$

即

$$\exp tA \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{G}), \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

这证明了 $\mathrm{Der}(\mathfrak{G}) \subset D(\mathfrak{G})$. 定理证完.

推论 1 设 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数，则 $\mathrm{Ad}(G)$ 为李群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$ 的连通子群. $\mathrm{Ad}(G)$ 的李代数为 $\mathrm{Der}(\mathfrak{G})$ 的子李代数 $\mathrm{ad}(\mathfrak{G})$.

推论 2 连通李群 $\mathrm{Ad}(G)$ 为李群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$ 的正规子群.

证 任取 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$. 已知 $\exp(\mathrm{ad}\, X) = \mathrm{Ad}(\exp X)$, $\forall\, X \in \mathfrak{G}$, 且 $\exp(\mathrm{ad}\, \mathfrak{G}) = \mathrm{Ad}(\exp \mathfrak{G})$ 为李群 $\mathrm{Ad}(G)$ 的生成元素集，所以只要证 $\sigma(\exp \mathrm{ad}\, \mathfrak{G})\sigma^{-1} \subset \mathrm{Ad}(G)$ 就够了.

任取 $X \in \mathfrak{G}$, 则

$$\begin{aligned}
\sigma(\exp \mathrm{ad}\, X)\sigma^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sigma(\mathrm{ad}\, X)^k \sigma^{-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\sigma(\mathrm{ad}\, X)\sigma^{-1})^k \\
&= \exp \sigma(\mathrm{ad}\, X)\sigma^{-1}.
\end{aligned}$$

然而任取 $Y \in \mathfrak{G}$, 则

$$(\sigma(\mathrm{ad}\, X)\sigma^{-1})Y = \sigma[X, \sigma^{-1}Y] = [\sigma X, Y] = (\mathrm{ad}\, \sigma X)Y,$$

即

$$\sigma(\mathrm{ad}\,X)\sigma^{-1} = \mathrm{ad}\,(\sigma X).$$

这证明了 $\sigma(\exp \mathrm{ad}\, X)\sigma^{-1} = \exp \mathrm{ad}\, \sigma(X) \in \mathrm{Ad}\,(G)$, 即 $\mathrm{Ad}\,(G)$ 为正规子群. 证完.

推论 3 设 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数. 设 $\mathfrak{H}$ 为 $\mathfrak{G}$ 的子代数. 记 $\exp \mathfrak{H}$ 生成李群 G 的连通子群 H. 则 $\mathfrak{H}$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的理想, 当且仅当 H 为李群 G 的正规子群. 换句话说, 在连通李群的子群和其李代数间的一一对应下, 正规子群和理想一一对应.

证 设 H 为正规子群, 即有 $(\mathrm{ad}\, g)H = H, \forall\, g \in G$. 所以 $(\mathrm{ad}\, g)_* \mathfrak{H} = \mathfrak{H}$, 即 $(\mathrm{Ad}\, g)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$. 因此任取 $X \in \mathfrak{G}$, 则

$$(\mathrm{Ad}\,(\exp tX))\mathfrak{H} = \mathfrak{H}, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

即任取 $Y \in \mathfrak{H}$, 有

$$(\mathrm{Ad}\,(\exp tX))Y = (\exp t\mathrm{ad}\, X)Y \in \mathfrak{H}.$$

因此

$$\frac{(\exp t\mathrm{ad}\, X)Y - Y}{t} \in \mathfrak{H}, \quad t \neq 0.$$

视线性空间为 Euclid 空间, 则任一子空间为闭子集, 所以 $\mathfrak{H}$ 闭. 取 $t \to 0$, 便证明了 $(\mathrm{ad}\, X)Y \in \mathfrak{H}$, 即有 $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}] \subset \mathfrak{H}$. 所以 $\mathfrak{H}$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的理想.

反之, 若 $\mathfrak{H}$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的理想, 即有 $(\mathrm{ad}\, X)Y \in \mathfrak{H}, \forall\, X \in \mathfrak{G}, Y \in \mathfrak{H}$. 同样, 由于 $\mathfrak{H}$ 为闭子空间, 所以 $(\exp t\mathrm{ad}\, X)Y \in \mathfrak{H}, \forall\, t \in \mathbb{R}$. 这证明了 $(\mathrm{Ad}\,(\exp tX))\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}, \forall\, t \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{G}$. 由于李群 G 连通, 所以证明了任取 $g \in G$, 则 $(\mathrm{Ad}\, g)\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}$. 由于 $\mathrm{Ad}\, g = (\mathrm{ad}\, g)_*$, 即证明了 $(\mathrm{ad}\, g)H \subset H, \forall\, g \in G$. 所以 H 为李群 G 的正规子群. 证完.

§ 3.3 李变换群和齐性空间

在这一节中，我们引进李变换群以及一类特殊的几何空间，即齐性空间.

定义 3.3.1 设 $\mathfrak{M}$ 为解析流形. $\mathfrak{M}$ 上的解析自同构全体构成普通群，它的普通子群 G 称为流形 $\mathfrak{M}$ 上的 **李变换群**, 如果 G 是李群，且 $G \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ (定义为 $(g, m) \to g(m)$) 是解析映射. 这时对于 $\mathfrak{M}$ 中任意取定的一点 p, 则李群 G 的普通子群

$$H_p = \{\sigma \in G \mid \sigma(p) = p\}$$

为 G 中的闭子集，所以是闭李子群，称为点 p 的 **迷向子群**.

显然，流形 $\mathfrak{M}$ 的恒等映射 $\mathrm{id} \in G$ 为 G 中单位元素，改记作 e. 下面给出李变换群的坐标表达式. 在 $\mathfrak{M}$ 中取定一点 p, 取点 p 的标架 (U, φ). 记 p 点的坐标为 $\varphi(p) = 0$. 我们将坐标邻域 U 中的点和此点的坐标用同一个符号表达. 在李群 G 中存在单位标架 (U', φ). 记单位元素 e 的坐标为 0, 且将坐标邻域 U' 中的点和此点的坐标用同一个符号表达. 由于 $(g, x) \to g(x)$ 解析，所以存在流形 $\mathfrak{M}$ 中坐标邻域 U 中含点 p 的标架 (V, φ), 使得 $(U', V) \to U'(V) \subset U$. 任取 $g \in U'$, $x \in V$, 记 $g(x)$ 的坐标为 y, 所以有坐标表达式

$$y = F(g, x),$$

其中 F 在 $\psi(U') \times \varphi(U)$ 上解析. 熟知对李群 G 的单位坐标邻域 U', 存在单位标架 (V', ψ), 使得

$$(V')^3 \subset U', \quad (V')^{-1} = V'.$$

记李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 中元素为 X, 则 $\exp tX$ 为李群 G 中的单参数子群，它作用在流形 $\mathfrak{M}$ 的坐标邻域 V 中点 x 上，得单参数曲线

$$y(t) = F(\exp tX, x), \quad |t| < \varepsilon(x).$$

自然 $y(0)=F(e,x)=x$, 因此单参数曲线段 $y(t),|t|<\varepsilon(x)$ 在 $t=0$ 时，即在点 x 上的切向量为

$$\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\mathrm{d}y_\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial F_\alpha(\exp tX,x)}{\partial t}\Big|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\frac{\partial F_\alpha(\xi,x)}{\partial \xi_j}\Big|_{\xi=\exp tX}\frac{\mathrm{d}(\exp tX)_j}{\mathrm{d}t})_{t=0}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

在李代数 $\mathfrak{G}$ 中取定基 $X_1,\cdots,X_n$, 有 $X_j=\sum\limits_k l_j^k(g)\dfrac{\partial}{\partial g_k}$, $1\le j\le n$, $l_j^k(g)$ 为辅助函数， f 为乘法函数. 又 $\dim G=n,\dim\mathfrak{M}=m$, 则有 $\dfrac{\mathrm{d}(\exp tX)_j}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=a_j$, $1\le j\le n$, 即有

$$\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\mathrm{d}y_\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_j\xi_j^\alpha(x))\frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

其中

$$\xi_j^\alpha(x)=\frac{\partial F_\alpha(\xi,x)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi=0},\quad 1\le\alpha\le m,\ 1\le j\le n.$$

这里下指标表示列，上指标表示行. 我们有 $m\times n$ 矩阵

$$\xi(x)=(\xi_j^\alpha(x)),\quad \forall\ x\in\varphi(V).$$

在流形 $\mathfrak{M}$ 中点 x 的切空间 $T_x(\mathfrak{M})$ 中取元素

$$(\widetilde{X}_i)_x=\sum_\alpha\xi_i^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_\alpha},\quad 1\le i\le n,$$

易证 $x\to(\widetilde{X}_i)_x$ 在 $\varphi(V)$ 上解析.

利用李变换群的定义及李群的左平移解析，可以证明在坐标邻域 V 上定义的 **解析向量场** 可以开拓到整个流形 $\mathfrak{M}$ 上，成为解析向量场. 我们仍用 $\widetilde{X_i}$ 来表达， $1\le i\le n$.

令 $X=\sum a_iX_i\in\mathfrak{G}$, 记 $\widetilde{X}=\sum a_i\widetilde{X_i}$. 于是

$$\widetilde{X}=\sum a_i\widetilde{X_i}=\sum_i\sum_\alpha a_i\xi_i^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}=\sum\frac{\mathrm{d}y_\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

即 $\widetilde{X}$ 为单参数曲线 $y(t) = F(\exp tX, x)$, $|t| < \epsilon(x)$ 在点 x 的切向量.

定义 3.3.2 符号同上. 流形 $\mathfrak{M}$ 上的解析向量场

$$\widetilde{X} = \sum_{i=1}^{n} a_i \widetilde{X_i}, \quad \forall\ (a_1, \cdots, a_n) \in F^n$$

称为流形 $\mathfrak{M}$ 上的 **无穷小变换**. 它们的全体构成 n 维线性空间, 称为流形 $\mathfrak{M}$ 上的 **无穷小变换群**.

引理 3.3.3(李变换群的 S.Lie 的三个基本定理) 符号同上. 当 $g \in V'$, $x \in V$ 时, 有

$$(1)\quad \frac{\partial F(g,x)}{\partial g} = \xi(F(g,x))R(g)^{-1}, \quad F(e,x) = x;$$

$$(2)\quad \sum_{\alpha=1}^{m}(\xi_i^\alpha(x)\frac{\partial \xi_j^\beta(x)}{\partial x_\alpha} - \xi_j^\alpha(x)\frac{\partial \xi_i^\beta(x)}{\partial x_\alpha}) = -\sum_k C_{ij}^k \xi_k^\beta(x),$$

其中 C_{ij}^k 为李代数 $\mathfrak{G}$ 关于基 $X_1, \cdots, X_n$ 的构造常数, 即有

$$[X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k, \quad 1 \le i, j \le n.$$

证 今任取 $g, h \in V'$, $x \in V$. 由 $g(h(x)) = (gh)(x)$, 有

$$F(g, F(h,x)) = F(f(g,h), x).$$

对 g 求导数, 再令 $g = e$, 有

$$\xi(F(h,x)) = \frac{\partial F(h,x)}{\partial h} R(h),$$

其中 $R(h) = (r_i^j(h))$, $r_i^j(h) = \frac{\partial f_j(g,h)}{\partial g_i}\Big|_{g=e}$. 这证明了 (1) 成立.

由

$$\xi_i^\alpha(F(h,x)) = \sum_j \frac{\partial F_\alpha(h,x)}{\partial h_j} r_i^j(h),$$

双方对 h_k 求导数，再取 $h=0$, 有

$$\sum_\beta \left(\frac{\partial \xi_i^\alpha(y)}{\partial y_\beta}\Big|_{y=F(h,x)} \frac{\partial F_\beta(h,x)}{\partial h_k}\right)_{h=0}$$

$$= \sum_j \frac{\partial^2 F_\alpha(h,x)}{\partial h_j \partial h_k}\Big|_{h=0} r_i^j(e) + \sum_j \frac{\partial F_\alpha(h,x)}{\partial h_j}\Big|_{h=0} \frac{\partial r_i^j(h)}{\partial h_k}\Big|_{h=0},$$

即有

$$\sum_\beta \frac{\partial \xi_i^\alpha(x)}{\partial x_\beta} \xi_k^\beta(x) = \sum_j \xi_j^\alpha(x) \frac{\partial r_i^j(h)}{\partial h_k}\Big|_{h=0} + \frac{\partial^2 F_\alpha(h,x)}{\partial h_i \partial h_k}\Big|_{h=0}.$$

于是

$$\sum_\beta (\xi_i^\beta(x) \frac{\partial \xi_j^\alpha(x)}{\partial x_\beta} - \xi_j^\beta(x) \frac{\partial \xi_i^\alpha(x)}{\partial x_\beta}) = \sum_k \xi_k^\alpha(x) (\frac{\partial r_j^k(h)}{\partial h_i} - \frac{\partial r_i^k(h)}{\partial h_j})_{h=0}.$$

由 S.Lie 第二基本定理，有

$$\left(\frac{\partial r_j^k(h)}{\partial h_i} - \frac{\partial r_i^k(h)}{\partial h_j}\right)_{h=0} = \frac{\partial^2 f_k(g,h)}{\partial g_j \partial h_i}\Big|_{g=h=0} - \frac{\partial^2 f_k(g,h)}{\partial g_i \partial h_j}\Big|_{g=h=0}$$

$$= \frac{\partial l_i^k(g)}{\partial g_j}\Big|_{g=0} - \frac{\partial l_j^k(g)}{\partial g_i}\Big|_{g=0} = \sum_p \left(l_j^p(g) \frac{\partial l_i^k(g)}{\partial g_p} - l_i^p(g) \frac{\partial l_j^k(g)}{\partial g_p}\right)_{g=0}$$

$$= \sum_p C_{ji}^p l_p^k(g)\Big|_{g=0} = C_{ji}^k = -C_{ij}^k.$$

因此证明了

$$\sum_\beta \left(\xi_i^\beta(x) \frac{\partial \xi_j^\alpha(x)}{\partial x_\beta} - \xi_j^\beta(x) \frac{\partial \xi_i^\alpha(x)}{\partial x_\beta}\right) = -\sum_k C_{ij}^k \xi_k^\alpha(x).$$

这证明了 (2) 成立. 证完.

引理 3.3.4 符号同上. 李代数 $\mathfrak{G}$ 到线性空间 $\tilde{\mathfrak{G}}$ 上的对应 $X \to -\tilde{X}$ 为李代数上的同构对应.

证 先证 $\widetilde{\mathfrak{G}}$ 构成李代数. 今

$$[\widetilde{X_i},\widetilde{X_j}]=\Big[\sum_\alpha \xi_i^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_\alpha},\sum_\beta \xi_j^\beta(x)\frac{\partial}{\partial x_\beta}\Big]$$
$$=\sum_\alpha\Big(\sum_\beta\big(\xi_i^\beta(x)\frac{\partial\xi_j^\alpha(x)}{\partial x_\beta}-\xi_j^\beta(x)\frac{\partial\xi_i^\alpha(x)}{\partial x_\beta}\big)\Big)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$
$$=-\sum_\alpha\sum_k C_{ij}^k\xi_k^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}=-\sum_k C_{ij}^k\widetilde{X_k}.$$

这证明了 $\widetilde{\mathfrak{G}}$ 为李代数, 且对应 $\sum a_iX_i\to-\sum a_i\widetilde{X_i}$ 给出李代数同态.

为了证这是李代数同构, 我们要证 $\widetilde{X_1},\cdots,\widetilde{X_n}$ 线性无关.

事实上, 设若 $\sum\limits_i a_i\widetilde{X_i}=0$. 作 $X=\sum a_iX_i$ 及流形上的单参数曲线段 $y(t)=F(\exp tX,x)$, $|t|<\varepsilon(x)$. 由引理 3.3.1 可知

$$\frac{\mathrm{d}y_\alpha(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_j\frac{\partial F_\alpha(\xi,\alpha)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi=\exp tX}\frac{\mathrm{d}(\exp tX)_j}{\mathrm{d}t}$$
$$=\sum_{i,k,p}\xi_k^\alpha(y(t))\widetilde{r}_j^k(\exp tX)l_p^j(\exp tX)a_p,$$

其中 $R(g)=(r_j^i(g))$, $R(g)^{-1}=(\widetilde{r}_j^i(g))$. 另一方面, 由定理 3.2.27 的证明可知, $\mathrm{Ad}\,g$ 在李代数 $\mathfrak{G}$ 的基 $X_1,\cdots,X_n$ 下的方阵表示为

$$A(g)=R(g)^{-1}L(g).$$

今记 $a=(a_1,\cdots,a_n)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=aL(\exp tX)'(R(\exp tX)^{-1})'\xi(y(t))'$$
$$=aA(\exp tX)'\xi(y(t))'.$$

我们来证

$$aA(\exp tX)'=a.$$

事实上，由 $(\mathrm{Ad}(\exp tX))X = (\exp t\,\mathrm{ad}\,X)X = X$, $\forall\ |t| < \varepsilon$, 所以用坐标表达即 $aB(\exp tX)' = a$. 至此证明了

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = a\xi(y(t))',$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y_\alpha(t)}{\mathrm{d}t} = \sum a_j\xi_j^\alpha(y(t)), \quad 1 \le \alpha \le m.$$

由假设 $\sum\limits_i a_i\widetilde{X_i} = 0$, 即 $\sum\limits_i a_i\xi_i^\alpha(x)\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha} = 0$. 所以当 $|t| < \varepsilon(x)$ 时有 $\dfrac{\mathrm{d}y_\alpha(t)}{\mathrm{d}t} = 0$, $1 \le \alpha \le m$. 这证明了

$$y(t) = (\exp tX)x = y(0) = x, \quad \forall\ |t| < \varepsilon(x),\ x \in \varphi(V).$$

由李变换群的定义可知，我们实际上可取 $\varepsilon(x) = \varepsilon$ 与 $x \in \varphi(V)$ 无关. 这证明了 $\exp tX = \mathrm{id}$, $|t| < \varepsilon$. 双方对 t 求导数，再令 $t = 0$, 便证明了 $X = \sum a_iX_i = 0$. 已知 $X_1, \cdots, X_n$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的基，所以证明了 $a_1 = \cdots = a_n = 0$, 即 $\widetilde{X_1}, \cdots, \widetilde{X_n}$ 线性无关. 引理证完.

因此，还有

引理 3.3.5 符号同上. 任取 $X = \sum\limits_i a_iX_i \in \mathfrak{G}$, 则

$$y(t) = F(\exp tX, x), \quad |t| < \varepsilon,\ x \in \varphi(V)$$

是常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_\alpha(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_i a_i\xi_i^\alpha(y(t)), \quad 1 \le \alpha \le m$$

的具有初值 $y(0) = x$ 的唯一解析解.

引理 3.3.6 符号同上. 任取 $X \in \mathfrak{G}$, $p \in \mathfrak{M}$, 则流形 $\mathfrak{M}$ 上有单参数曲线

$$(\mathrm{Exp}\,(t\widetilde{X}))_p = \exp(t\widetilde{X}),\ \forall\ t \in \mathbb{R},$$

其中 $X=\sum a_iX_i$, $\widetilde{X}=\sum a_i\widetilde{X}_i$. 映射 $\exp:\mathfrak{G}\to\mathfrak{M}$ 称为 指数映射, 又 $\operatorname{Exp}\widetilde{X}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\widetilde{X}^k$.

证 记 $y(t)=F(\exp tX,x)$, 则

$$y_\alpha(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}^k y_\alpha(t)}{\mathrm{d}t^k}\right)_{t=0},\quad |t|<\varepsilon,\ 1\le\alpha\le m,$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}y_\alpha(t)}{\mathrm{d}t}=\sum a_i\xi_i^\alpha(y(t)),\quad 1\le\alpha\le m,$$

$$X=\sum a_iX_i,\quad \widetilde{X}=\sum a_i\widetilde{X}_i=\sum a_i\xi_i^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

于是

$$\widetilde{X}\Big|_{y=y(t)}=\sum_\alpha\frac{\mathrm{d}y_\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

沿着曲线 $y=y(t)$ 成立, 因此

$$\widetilde{X}^k\big|_{y=y(t)}=\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}.$$

于是由 $y(0)=x$, 有

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(\widetilde{X}^k y)_{y=y(t),t=0}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\widetilde{X}^k x.$$

记 $\operatorname{Exp}(t\widetilde{X})=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t\widetilde{X}^k$, 则证明了

$$y(t)=(\operatorname{Exp}(t\widetilde{X}))x=F(\exp tX,x),\ \forall\ |t|<\varepsilon.$$

至此证明了任取 $X\in\mathfrak{G}$, $p\in\mathfrak{M}$, 则

$$(\operatorname{Exp}(t\widetilde{X}))p=\exp(t\widetilde{X}),\quad \forall\ |t|<\varepsilon.$$

显然上式可开拓到 $t \in \mathbb{R}$ 时成立. 证完.

设 $\mathfrak{M}$ 为解析流形, G 为流形 $\mathfrak{M}$ 上的李变换群. 在流形 $\mathfrak{M}$ 中任取一点 p, 则流形 $\mathfrak{M}$ 中的点集

$$G(p) = \{g(p) \mid \forall\, g \in G\}$$

称为过点 p 的轨道. 对轨道上的任两点 q_1, q_2, 于是 $q_1 = g_1(p)$, $q_2 = g_2(p)$, 因此 $g_1 g_2^{-1}(q_2) = q_1$. 所以我们可以自然地引进等价关系. 流形 $\mathfrak{M}$ 中两点称为互相等价的, 如果这两点同属于一个轨道. 换句话说, 存在李变换群 G 中一元素将一点映为另一点, 而等价类集即轨道. 所以, 流形 $\mathfrak{M}$ 按照李变换群分成互相不相交的轨道的并集.

定义 3.3.7 解析流形 $\mathfrak{M}$ 称为关于李变换群 G 是 **可递的**, 如果 $\mathfrak{M}$ 中任一点的轨道为流形 $\mathfrak{M}$ 本身. 这时, $\mathfrak{M}$ 称为 **齐性空间**.

显然, 有

引理 3.3.8 设 G 为流形 $\mathfrak{M}$ 上的李变换群. 对流形 $\mathfrak{M}$ 中的固定点 p, 若 $g_1, g_2 \in G$ 有 $g_1(p) = g_2(p)$. 记 H_p 为点 p 的迷向子群, 即有

$$H_p = \{g \in G \mid g(p) = p\},$$

则 $g_2 \in g_1 H_p$.

设 $\mathfrak{M}$ 为解析流形, 它在李变换群 G 作用下可递. 在 $\mathfrak{M}$ 中取定一点 p, 记 H_p 为点 p 的迷向子群. 显然, H_p 为李群 G 的闭普通子群, 所以是李子群. 记 $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_p$ 分别为李群 G 及其闭李子群 H_p 的李代数, 则 $\exp \mathfrak{H}_p$ 生成闭子群 H_p 的单位分支.

在子代数 $\mathfrak{H}_p$ 中取基 $X_{r+1}, \cdots, X_n$, 再在李代数 $\mathfrak{G}$ 中取基 $X_1, \cdots, X_r$, $X_{r+1}, \cdots, X_n$. 在 G 中取第三类标准单位标架 (U, φ), 使得

$$\varphi((\exp \sum_{i=1}^{r} x_i X_i)(\exp \sum_{i=r+1}^{n} x_i X_i)) = (x_1, \cdots, x_n) = x,$$

其中 $\forall\ |x_1| < \varepsilon, \cdots, |x_n| < \varepsilon$.

由于 H_p 为闭李子群，所以 H_p 的拓扑为诱导拓扑，因此 $U \cap H_p$ 为流形 H_p 的单位邻域. 注意到 $\exp \sum\limits_{i=r+1}^{n} x_i X_i \in H_p$，所以

$$U \cap H_p = \{\exp \sum_{i=r+1}^{n} x_i X_i, \quad |x_{r+1}| < \varepsilon, \cdots, |x_n| < \varepsilon\}.$$

现在考虑 **左旁集** 定义的 **商空间**

$$G/H_p = \{gH_p \mid \forall\, g \in G\}.$$

因此

$$U/H_p = U/(H_p \cap U) = \{(\exp \sum_{i=1}^{r} x_i X_i)H_p \mid |x_1| < \varepsilon, \cdots, |x_r| < \varepsilon\}.$$

因此，可以在集合 U/H_p 上引进同胚映射

$$\varphi_0 : (\exp \sum_{i=1}^{r} x_i X_i)H_p \to (x_1, \cdots, x_r).$$

对商空间 G/H_p 中任一点 gH_p，考虑集合

$$gU/H_p = \{gg_0H_p \mid \forall\, g_0 \in U\}.$$

于是 $(gV/H_p, \varphi_0 \circ L_g^{-1})$ 为标架. 因此容易证明对标架覆盖

$$\{(gU/H_p, \varphi_0 \circ L_g^{-1}) \mid \forall\, g \in G\},$$

则商空间 G/H_p 构成解析流形，称为 **商流形**. 事实上，若 $(gU/H_p) \cap (g'U/H_p) \neq \emptyset$，则存在 $v_1, v_2 \in U$，使得 $gv_1H_p = g'v_2H_p$，即

$$v_1^{-1}g^{-1}g'v_2 \in H_p,$$

其中

$$v_1 = \exp \sum_{i=1}^{r} x_i X_i, \quad v_2 = \exp \sum_{i=1}^{r} y_i X_i.$$

因此，v_1H_p 有坐标 $(x_1,\cdots,x_r)$，v_2H_p 有坐标 $(y_1,\cdots,y_r)$. 令 gv_1H_p 的坐标为 $(x_1,\cdots,x_r)$，$g'v_2H_p$ 的坐标为 $(y_1,\cdots,y_p)$. 为了证明 G/H_p 为解析流形，只要证 $y_1,\cdots,y_r$ 为 $x_1,\cdots,x_r$ 的解析函数，而且 $x_1,\cdots,x_r$ 为 $y_1,\cdots,y_r$ 的解析函数就行了. 由于李群 G 中的乘法及取逆运算都解析，所以 $g^{-1}g'v_2$ 的坐标为 $y_1,\cdots,y_r$ 的解析函数. 由 $g^{-1}g'v_2H_p=v_1H_p$，可知 $g^{-1}g'v_2H_p$ 的坐标为 $(x_1,\cdots,x_r)$. 这证明了 $(x_1,\cdots,x_r)$ 为 $y_1,\cdots,y_r$ 的解析函数. 同理可证 $(y_1,\cdots,y_r)$ 为 $x_1,\cdots,x_r$ 的解析函数. 因此证明了商空间 G/H_p 为解析流形.

现在在流形 $\mathfrak{M}$ 中取定点 p 及点 p 的标架 (U,φ). 对李变换群 G，取定单位标架 (V,ψ)，使得任取 $g\in V$，$x\in U$，则 $g(x)$ 的坐标为 $F(g,x)$. 由李变换群的定义可知，F 为 g 及 x 的解析函数.

考虑商空间 G/H_p 到齐性流形 $\mathfrak{M}$ 上的对应

$$\tau: gH_p\to g(p),\quad \forall\ g\in G.$$

由引理 3.3.8 可知，τ 为到上的一一对应. 上面所取的单位标架 (V,ψ) 为第三类标准单位标架，所以

$$V/H_p=\{(\exp\sum_{i=1}^{r}x_iX_i)H_p\},$$

标架 $(V/H_p,\psi)$ 有

$$\psi((\exp\sum_{i=1}^{r}x_iX_i)H_p)=(x_1,\cdots,x_r).$$

我们来证 τ 为商空间 G/H_p 到齐性流形 $\mathfrak{M}$ 上的双解析同胚. 事实上，任取 G/H_p 中点 gH_p 的标架 $(gVH_p,\ \psi\circ L_g^{-1})$ 以及 $\mathfrak{M}$ 中点 $g(p)$ 的标架 $(g(U),\varphi\circ L_g^{-1})$，于是由 $\tau(gvH_p)=gv(p)$，$\forall\, v\in V$ 及 gvH_p 的坐标为 $x_1,\cdots,x_r$，则 $gv(p)$ 的坐标为 $F(\exp\sum\limits_{i=1}^{r}x_iX_i,0)$，因此为 $x_1,\cdots,x_r$ 的解析函数. 同理可证 τ^{-1} 解析. 至此证明了断言.

由此可见，在流形等价意义下，齐性流形等价于商流形．因此，我们需要进一步考查商流形 G/H_p.

任取 $g \in G$. 我们知道 g 为齐性流形 $\mathfrak{M}$ 上的双解析同胚．另一方面，可以利用 g 引进商流形 G/H_p 上的映射

$$\mathcal{A}_g : g_1 H_p \to g g_1 H_p, \quad \forall\, g_1 \in G.$$

显然，这是商流形 G/H_p 到自身上的一一对应．且由于李群乘法及取逆运算的解析性，即左平移为双解析同胚，所以易证 $\mathcal{A}_g$ 为商流形 G/H_p 上的双解析自同构．又显然

$$\mathcal{A}_{g_1 g_2} = \mathcal{A}_{g_1} \circ \mathcal{A}_{g_2}, \quad \mathcal{A}_g^{-1} = \mathcal{A}_{g^{-1}}, \quad \mathcal{A}_e = \mathrm{id},$$

其中 e 为李群 G 的单位元素， $g, g_1, g_2 \in G$. 这证明了

$$\mathcal{A}_G = \{\mathcal{A}_g \mid \forall\, g \in G\}$$

为普通的群.

又由 $\mathcal{A}_g$ 及 τ 的定义可知

$$\tau \circ \mathcal{A}_g = g \circ \tau, \quad \forall\, g \in G.$$

事实上，

$$(\tau \circ \mathcal{A}_g)(g' H_p) = \tau(g g' H_p) = g g'(p) = g\tau(g' H_p), \ \forall\, g, g' \in G.$$

这证明了断言．因此

$$\mathcal{A}_g = \tau^{-1} \circ g \circ \tau, \quad \forall\, g \in G.$$

所以 $\mathcal{A}_G = \tau^{-1} G \tau$. 由 τ 的一一性可知 $g \to \mathcal{A}_g, \forall\, g \in G$ 为普通群同构．因此，可以自然地在普通群 $\mathcal{A}_G$ 中引进李群结构，使得 $g \to \mathcal{A}_g, \forall\, g \in G$ 为李群同构．为方便起见，我们可以改用符号 g 来代替 $\mathcal{A}_g, \forall g \in G$.

引理 3.3.9 符号同上．若 G 为流形 $\mathfrak{M}$ 上的可递李变换群，对流形 $\mathfrak{M}$ 中固定点 p, q, 则迷向子群 H_p 和 H_q 互相共轭．又点 p 的迷向子群 H_p 中无李群 G 的非平凡正规子群.

证 今由 $\mathfrak{M}$ 为齐性空间可知，存在 $g \in G$, 使得 $g(p) = q$. 今

$$H_p = \{g_0 \in G \mid g_0(p) = p\},$$

于是 $gg_0(p) = g(p) = q$. 由 $p = g^{-1}(q)$ 可知 $gg_0g^{-1}(q) = q$, 这证明了 $gg_0g^{-1} \in H_q$, 即 $gH_pg^{-1} \subset H_q$. 同理可证 $g^{-1}H_qg \subset H_p$. 即有 $H_q = gH_pg^{-1}$, 所以 H_p 和 H_q 互相共轭.

再若 G_1 为 H_p 中李群 G 的正规子群. 由定义可知，任取 $g \in G$, 则 $gG_1g^{-1} = G_1$. 于是任取 $g_1 \in G_1$, 则 $\mathcal{A}_{g_1}(gH_p) = g_1gH_p = g(g^{-1}g_1g)H_p$. 由 $g_1 \in H_p$ 可知，$g_1, g^{-1}g_1g \in H_p$. 因此 $\mathcal{A}_{g_1}(gH_p) = gH_p, \forall g \in G$. 这证明了 $\mathcal{A}_{g_1} = \mathrm{id}$. 但是 $g \to \mathcal{A}_g, \forall g \in G$ 为李群 G 到 $\mathcal{A}_G$ 上的同构. 显然 $e \to \mathrm{id}$. 这证明了 $g_1 = e$, 所以 $G_1 = \{e\}$. 引理证完.

在一般情形下. 任给连通李群 G 及闭子群 H, 我们可以定义左旁集空间 G/H. 自然映射 $\pi : G \to G/H$ 定义为 $\pi(g) = gH, \forall g \in G$. 我们可以在左旁集空间 G/H 中引进拓扑，使得自然映射 π 为连续开映射. 且可以在 G/H 中引进解析结构，使得 G/H 为解析流形，而自然映射 π 为到上的解析映射. 我们称 G/H 是李群关于闭子群的商流形. 这里要注意，只有闭子群才能使得商空间 G/H 为 Hausdorff 空间.

同样，可以定义李群 G 在商流形 G/H 上的作用，即任取 $g \in G$, 定义 $\mathcal{A}_g : g_1 \to gg_1H, g_1 \in G$. 我们有

引理 3.3.10 符号同上. $g \to \mathcal{A}_g, \forall g \in G$ 给出普通群 G 到 $\mathcal{A}_G = \{\mathcal{A}_g \mid \forall g \in G\}$ 上的群同态，同态核为

$$H_0 = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}.$$

它是闭子群 H 中 G 的最大正规子群.

证 显然 $g \to \mathcal{A}_g, \forall g \in G$ 给出普通群 G 到 $\mathcal{A}_G$ 上的普通群同态. 记同态核为 G_1, 它是 G 的正规子群. 今 $g \in G_1$ 当且仅当 $\mathcal{A}_g = \mathrm{id}$, 所以 $gg_1H = g_1H, \forall g_1 \in G$. 这证明了 $g_1^{-1}gg_1 \in$

H, 即 $g_1^{-1}G_1g_1 \subset H$. 特别取 $g_1 = e$, 可知 $G_1 \subset H$. 实际上, $G_1 \subset g_1Hg_1^{-1}$, $\forall\, g_1 \in G$, 即 $G_1 \subset H_0$. 另一方面, 任取 $g \in H_0$, 因此 $g \in g_1Hg_1^{-1}$, $\forall\, g_1 \in G$, 即 $g_1^{-1}gg_1 \in H$, $\forall\, g_1 \in G$. 这证明了 $g_1^{-1}gg_1H = H$, 所以 $g(g_1H) = g_1H$, 即 $\mathcal{A}_g = \mathrm{id}$. 这推出 $g \in G_1$. 至此证明了 $H_0 \subset G_1$. 显然 H_0 为子群 H 中群 G 的最大正规子群. 证完.

由于有如下自然的一一对应

$$G/H \to (G/H_0)\Big/(H/H_0),$$

且群 H/H_0 中没有群 G/H_0 的非平凡正规子群. 从商空间的角度, 自然地不考虑 G/H, 而考虑 $(G/H_0)\Big/(H/H_0)$. 为此引进

定义 3.3.11 设 H 为连通李群 G 的闭子群, 若 H 中无 G 的非平凡正规子群, 则称 G 在商空间 G/H 上的 **作用有效**, 否则称为 **非作用有效**.

由上面的讨论可知, 齐性流形等价于作用有效的商流形. 反之, 作用有效的商流形为齐性流形. 所以, 研究齐性流形和研究作用有效的商流形是一回事. 至此, 我们证明了

定理 3.3.12 设 G 为解析流形 $\mathfrak{M}$ 上的可递李变换群. 在 $\mathfrak{M}$ 中取定一点 p, 记 H 为李变换群 G 中点 p 的迷向子群. 则有

(1) 任取 $q \in \mathfrak{M}$, 存在 $g \in G$, 使得 $q = g(p)$, 则 gHg^{-1} 为点 q 的迷向子群;

(2) 迷向子群 H 中无李群 G 的非平凡正规子群, 即李变换群 G 在流形 $\mathfrak{M}$ 上的作用有效;

(3) 在左旁集空间 G/H 中可引进解析结构, 使得对应

$$\tau : gH \to g(p),\ \forall\, g \in G$$

为商空间 G/H 到流形 $\mathfrak{M}$ 上的双解析同胚;

(4) 任取 $g \in G$, 定义商空间 G/H 上的映射

$$\mathcal{A}_g : xH \to gxH,\ \forall\, x \in G.$$

记

$$\mathcal{A}_G = \{\mathcal{A}_g \mid \forall\, g \in G\},$$

则 $\mathcal{A}_G$ 为商空间 G/H 上的李变换群，使得 $g \to \mathcal{A}_g,\ \forall\, g \in G$ 为李群 G 到 $\mathcal{A}_G$ 上的李群同构. 我们可改记 $\mathcal{A}_G$ 为 G;

(5) 连通李群 G 关于闭子群 H 的商空间 G/H 若有性质 G 在 G/H 上的作用有效，则 G 是商空间 G/H 上的可递李变换群.

可以引进

定义 3.3.13 设 H 为连通李群 G 的闭正规子群，则商空间 G/H 称为李群 G 关于闭正规子群 H 的 **商李群**.

引理 3.3.14 设商空间 G/H 为连通李群 G 关于闭正规子群的商李群，则 G/H 为李群. 且自然映射 $\pi: G \to G/H$ 为李群的同态映射，且为开映射. 分别记 $\mathfrak{G}$ 及 $\mathfrak{H}$ 为李群 G 及其子群 H 的李代数，则 $\mathfrak{H}$ 为理想，且商李群 G/H 的李代数为 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$.

证 今商空间 G/H 为普通群，自然映射为普通群同态. 在 G/H 中引进拓扑，使得自然映射 $\pi G \to G/H$ 为连续开映射. 在李代数 $\mathfrak{H}$ 中取基 $X_{r+1}, \cdots, X_n$, 再在 $\mathfrak{G}$ 中取基

$$X_1, \cdots, X_r, X_{r+1}, \cdots, X_n.$$

在 G 中取第三类标准单位标架 (U, φ), 使得

$$\begin{aligned} U = \ &\{(\exp \sum_{i=1}^{r} x_i X_i)(\exp \sum_{i=r+1}^{n} x_i X_i) \\ &\xrightarrow{\varphi} x = (x_1, \cdots, x_n) \mid |x_1| < \varepsilon, \cdots, |x_n| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

在 G/H 中引进标架 $(U/H, \varphi_0)$, 使得 U/H 定义为

$$\{(\exp \sum_{i=1}^{r} x_i X_i)H \xrightarrow{\varphi_0} y = (x_1, \cdots, x_r) \mid |x_1| < \varepsilon, \cdots, |x_n| < \varepsilon\}.$$

任取 $g \in G$, $(gU/H, \varphi_0 \circ L_g^{-1})$ 为标架，于是在 G/H 中引进解析结构. 不难证明，这时普通群的映射 $G/H \times G/H \xrightarrow{\xi} G/H$:

$\xi((g_1H)(g_2H)) = g_1g_2^{-1}H$ 解析，所以 G/H 为李群. 显然 G/H 的李代数为李代数 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. 证完.

定理 3.3.15 (同态基本定理) 设 θ 为李群 G_1 到 G_2 上的同态，则同态核 $\ker(\theta) = \theta^{-1}(e_2)$ 为李群 G_1 的闭李正规子群，其中 e_2 为李群 G_2 的单位元素. 又存在商群 $G/\theta^{-1}(e_2)$ 到李群 G_2 上的李群同构 τ, 使得 $\tau\circ\pi = \theta$, 其中 π 为自然映射 $G_1 \to G_1/\theta^{-1}(e_2)$.

证 由普通群的同态基本定理可知，对普通群上述结论成立. 现在对李群 G_1, 由于 $\theta: G_1 \to G_2$ 连续，所以同态核 $\theta^{-1}(e_2)$ 为李群 G_1 的闭普通正规子群，所以是闭李正规子群. 因此自然映射 $\pi: G_1 \to G_1/\theta^{-1}(e_2)$ 按引理 3.3.14 而为李群同态. 由于在 G_1 中引进第三类标准单位标架，诱导了在商群 $G_1/\theta^{-1}(e_2)$ 中引进的是第一类标准单位标架，所以易证 $\tau = \theta\circ\pi^{-1}: G_1/\theta^{-1}(e_2) \to G_2$ 为李群同构. 证完.

于是，应用于非有效作用概念，我们有

定理 3.3.16 设 G 为连通李群， H 为闭子群. 设

$$H_0 = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1} \neq \{e\},$$

则 H_0 为李群 G 的正规子群，且为闭李正规子群. 又商流形 G/H 双解析同胚于商流形 $(G/H_0)/(H/H_0)$. 又 G 在 G/H 上作用非有效，而李群 G/H_0 在 $(G/H_0)/(H/H_0)$ 上作用有效.

证 我们先来证 H_0 为闭子群. 事实上，任取 $h_i \in H_0$, h_i 收敛于 $h_0 \in G$. 由于 $h_i \in gHg^{-1}$, $\forall\, g\in G$, 即 $h_0 \in gHg^{-1}$,$\forall g \in G$, 因此 $h_0 \in H_0$. 这证明了 H_0 为闭李正规子群.

任取 $g \in G$, 则 $gH \in G/H$. 作对应

$$gH \to (gH_0)(H/H_0).$$

易证这是商流形 G/H 到 $(G/H_0)/(H/H_0)$ 上的一一对应，且是双解析同胚. 最后，由于商群 H/H_0 中关于商群 G/H_0 的正规子群只有平凡子群，所以 G/H_0 在商流形 $(G/H_0)/(H/H_0)$ 上的作用有效. 证完.

显然，李群 G 的单位连通分支 G_0 为闭普通正规子群，所以是闭李正规子群. 考虑商李群 G/G_0, 其中任一元素构成的集合在 G/G_0 中又开又闭，所以连通. 因此 G/G_0 为完全不连通群，它是零维李群，且离散.

现在利用商李群的概念，我们给出连通交换李群的完全分类和实现.

定理 3.3.17 设连通李群 $\dim G = n$. 则 G 为交换李群，当且仅当它的李代数交换. 又在同构意义下，连通交换李群是**环面**和 Euclid 空间的拓扑积. 确切地说，在实的情形，李群 G 同构于

$$\mathbb{R}^{n-s} \times (\mathbb{R}^s/\mathbb{Z}^s);$$

在复的情形，李群 G 同构于

$$\mathbb{C}^{n-s} \times \mathbb{C}^s/(\mathbb{Z}^s + \sqrt{-1}\mathbb{Z}^s).$$

证 由定理 3.2.25 的推论 1 可知前一断言成立. 下面证后一断言. 设 $\dim G = n$. 由于连通交换李群 G 的李代数交换，且同维数的交换李代数必互相同构. 由于从 $F = \mathbb{R}$ 或 $F = \mathbb{C}$ 作拓扑积 F^n, 则 F^n 为域 F 上的 n 维 Euclid 空间，它是连通且单连通李群，乘法运算为向量的加法. 显然，李群 F^n 的李代数可交换，且为 n 维李代数. 由通用覆盖群理论可知，在李群 F^n 中存在离散子群 (由群交换，可知任意离散子群为属于中心的离散正规子群)Γ, 使得李群 G 同构于李群 F^n/Γ. 所以在同构意义下决定连通交换李群的问题，化为决定加法李群 F^n 中离散子群的问题.

这个问题的解决需要用归纳法. 即我们要证明：加法李群 F^n 中离散子群 Γ 中必存在极大线性无关部分组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$, 使得当 $F = \mathbb{R}$ 时

$$\Gamma = \{\sum_{i=1}^{s} n_i\alpha_i \mid n_1, \cdots, n_s \in \mathbb{Z}\};$$

当 $F=\mathbb{C}$ 时

$$\Gamma=\{\sum_{i=1}^{s} n_i\alpha_i \mid n_1,\cdots,n_s\in\mathbb{Z}+\sqrt{-1}\mathbb{Z}\}.$$

下面我们只在 $F=\mathbb{R}$ 时证明这个问题.

(1) 设 $\Gamma=0$, 则 $\mathbb{F}^n/\Gamma=\mathbb{F}^n$.

(2) 设 $\Gamma\neq 0$, 且 Γ 的极大线性无关部分组由一个向量组成. 于是 Γ 中有非零向量. 取定长度最小的非零向量 $\alpha_1\in\Gamma$, 于是 $n_1\alpha_1\in\Gamma$, $\forall\, n_1\in\mathbb{Z}$. 我们来证明 $\Gamma=\{n_1\alpha_1 \mid n_1\in\mathbb{Z}\}$. 设若不然, 则存在 $\beta\in\Gamma-\{n_1\alpha_1 \mid \forall\, n_1\in\mathbb{Z}\}$. 因此, $\beta\neq 0$, 且 β 的长度 $|\beta|>|\alpha_1|$. 但是 Γ 的极大线性无关部分组由一个向量组成, 所以 $\beta=a\alpha_1$, 其中 $a\in F$. 取整数 n_0, 使得 $0<|n_0-a|\leq\frac{1}{2}$. 于是 $0\neq n_0\alpha_1-a\alpha_1\in\Gamma$, 而

$$0<|n_0\alpha_1-a\alpha_1|=|n_0-a||\alpha_1|\leq\frac{1}{2}|\alpha_1|.$$

这和 α_1 的选取矛盾. 所以证明了 $\Gamma=\{n_1\alpha_1 \mid \forall\, n_1\in\mathbb{Z}\}$.

(3) 设 $\Gamma\neq 0$, 且 Γ 的极大线性无关部分组由 $s-1$ 个向量组成. 按归纳法假设, 在 Γ 中存在 $s-1$ 个线性无关的向量, 使得 Γ 为这些线性无关向量的任意整系数线性组合. 现在考虑情形 $\Gamma\neq 0$, 且 Γ 的极大线性无关部分组由 s 个向量组成. 在 Γ 中取长度最小的非零向量 α_1, 以 α_1 为基构成 n 维线性空间 F^n 中的一维子空间 $\mathfrak{L}$. 于是 $\mathfrak{L}$ 为 n 维连通李群 F^n 中的一维闭正规李子群. 考虑商群 $F^n/\mathfrak{L}$. 显然 $F^n/\mathfrak{L}$ 为 $n-1$ 维线性空间, 它线性同构于 F^{n-1}. 考虑 $F^n/\mathfrak{L}$ 中离散子群 $\Gamma/\mathfrak{L}$, 由归纳法假设, 所以在离散子群 $\Gamma/\mathfrak{L}$ 中存在极大线性无关部分组 $\widetilde{\alpha_2},\cdots,\widetilde{\alpha_s}$, 使得

$$\Gamma/\mathfrak{L}=\{\sum_{i=2}^{s} n_i\widetilde{\alpha_i} \mid \forall\, n_2,\cdots,n_s\in\mathbb{Z}\}.$$

考虑自然映射 $\pi: F^n\to F^n/\mathfrak{L}$. 由 $\widetilde{\alpha_i}\in F^n/\mathfrak{L}$ 可知, 在 Γ 中存在向量 α_i, 使得 $\pi(\alpha_i)=\alpha_i+\mathfrak{L}=\widetilde{\alpha_i}$, $2\leq i\leq s$. 这证明了在 F^n 的离散

子群 Γ 中存在 s 个元素 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$, 使得 $\alpha_1\neq 0$, 且 α_1 的长度最小, 又 $\alpha_2\neq 0,\cdots,\alpha_s\neq 0$, 使得 $\pi(\alpha_i)=\widetilde{\alpha}_i$, $2\le i\le s$, $\pi(\alpha_1)=0$. 显然

$$\Gamma\supset\{\sum_{i=1}^{s}n_i\alpha_i\mid\forall n_1,\cdots,n_s\in\mathbb{Z}\}.$$

我们来证 α_1、$\cdots,\alpha_s$ 线性无关. 事实上, 若存在 $a_1,\cdots,a_s\in F$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{s}a_i\alpha_i=0$, 于是有

$$0=\pi(0)=\pi(\sum_{i=1}^{s}a_i\alpha_i)=\sum_{i=1}^{s}a_i\pi(\alpha_i)=\sum_{i=2}^{s}a_i\widetilde{\alpha}_i.$$

由 $\widetilde{\alpha_2},\cdots,\widetilde{\alpha_s}$ 的选取可知 $a_2=\cdots=a_s=0$, 因此证明了 $a_1\alpha_1=0$. 但是 $\alpha_1\neq 0$, 所以 $a_1=0$. 至此证明了离散子群 Γ 中向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

最后, 证 $\Gamma=\{\sum\limits_{i=1}^{s}n_i\alpha_i\mid n_1,\cdots,n_s\in\mathbb{Z}\}$. 设若不然, 则存在 $\beta\in\Gamma$, $\beta\neq\{\sum\limits_{i=1}^{s}n_i\alpha_i\mid n_1,\cdots,n_s\in\mathbb{Z}\}$. 但是 $\pi(\beta)\in\Gamma/\mathfrak{L}$, 即 $\pi(\beta)=\sum\limits_{i=2}^{s}n_i\widetilde{\alpha}_i$, 其中 $n_2,\cdots,n_s\in\mathbb{Z}$. 这证明了

$$\beta=\sum_{i=2}^{s}n_i\alpha_i+a\alpha_1,$$

由 β 的选取可知 a 不是整数. 然而

$$a\alpha_1=\beta-\sum_{i=2}^{s}n_i\alpha_i\in\Gamma,$$

于是存在整数 n_0, 使得 $0<|a-n_0|\le\frac{1}{2}$. 又 $a\alpha_1-n_0\alpha_1\in\Gamma$, 可是 $0<|a\alpha_1-n_0\alpha_1|=|a-n_0||\alpha_1|\le\frac{1}{2}|\alpha_1|$. 这又和 α_1 的选取矛盾.

至此证明了在任意情形下，F^n 的离散子群

$$\Gamma = \{\sum_{i=1}^{s} n_i\alpha_i \mid n_1, \cdots, n_s \in \mathbb{Z}\},$$

其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

于是在 F^n 中取基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_n$. 这证明了 F^n/Γ 的坐标全体构成 $F/\mathbb{Z} \times \cdots \times F/\mathbb{Z} \times F \times \cdots \times F = (F/\mathbb{Z})^s \times F^{n-s}$. 定理证完.

推论 李群 G 的一维连通李子群 G_1(即单参数子群) 为交换李群. 在 G_1 为非紧李群时，G_1 同构于一维 Euclid 空间；在 G_1 为紧李群时，G_1 同构于一维环面 $F/\mathbb{Z}$.

下面考虑在李群理论中扮演重要角色的换位子群. 为此先证明

引理 3.3.18 设 $\widehat{G}$ 为连通且单连通李群，则李群 $\widehat{G}$ 的连通正规子群 H 必闭.

证 分别记李群 $\widehat{G}$ 及其子群 H 的李代数为 $\widehat{\mathfrak{G}}$ 及 $\mathfrak{H}$. 由于 H 为正规子群，所以 $\mathfrak{H}$ 为 $\widehat{\mathfrak{G}}$ 的理想. 于是有李代数的自然同态 $\rho : \widehat{\mathfrak{G}} \to \widehat{\mathfrak{G}}/\mathfrak{H}$. 由于 $\widehat{G}$ 为连通且单连通李群，所以自然同态 ρ 可提升为李群 $\widehat{G}$ 到连通李群 G_1 上的同态 π, 其中李群 G_1 的李代数和 $\widehat{\mathfrak{G}}/\mathfrak{H}$ 同构，且 $\pi_* = \rho$. 所以由自然同态 ρ 的核 $\rho^{-1}(0)$ 为 $\mathfrak{H}$ 可知同态映射 π_* 的核为 $\mathfrak{H}$. 记李群 G_1 的单位元素为 e_1. 李群 $\widehat{G}$ 到 G_1 的同态 π 的核 $\pi^{-1}(e_1) = H_1$, 显然 H_1 为李群 $\widehat{G}$ 的闭李正规子群. 今 $\pi_*(\mathfrak{H}) = 0$, 所以 $e_1 = \exp\pi_*(\mathfrak{H}) = \pi(\exp\mathfrak{H})$. 这证明了 $\exp\mathfrak{H} \subset H_1$. 由于 $\mathfrak{H}$ 为连通李群 H 的李代数，所以 $\exp\mathfrak{H}$ 生成 H. 这证明了 $H_1 \supset H$, 特别地，$\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_1$. 另一方面，记 $\mathfrak{H}_1$ 为李群 $\widehat{G}$ 的李子群 H_1 的李代数，由 $\pi(H_1) = \{e_2\}$ 可知 $\pi_*(\mathfrak{H}_1) = 0$, 所以 $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$, 由此可推出 $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}$, 这证明了李群 H 为 H_1 的单位分支. 今 H_1 在 $\widehat{G}$ 中闭，H 在 H_1 中闭，所以 H 在 $\widehat{G}$ 中闭. 证完.

定义 3.3.19 李群 G 的子集合

$$\{aba^{-1}b^{-1} \mid \forall\, a, b \in G\}$$

生成的普通子群称为李群 G 的**换位子群**, 记作 (G,G). 李代数 $\mathfrak{G}$ 的理想 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ 称为李代数 $\mathfrak{G}$ 的**换位子代数**.

定理 3.3.20 设 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数, 则李群 G 的换位子群 (G,G) 为 G 的闭连通正规子群, 它的李代数为 $\mathfrak{G}$ 的理想 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$.

证 先设 G 为连通且单连通李群. 今对李代数 $\mathfrak{G}$ 的理想 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$, 它作 exp 再生成 G 的连通正规子群 G_1. 由引理 3.3.18 可知, G_1 为李群 G 的闭正规子群. 作商李群 G/G_1, 则李群 G/G_1 的李代数为 $\mathfrak{G}/[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ 可交换, 所以李群 G/G_1 可交换. 作为普通群, 由此可推出 $G_1 \supset (G,G)$.

下面来证 $G_1 \subset (G,G)$. 事实上, 由于连通李群 G_1 的李代数为 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$. 所以存在 $P_1,\cdots,P_r$, $Q_1,\cdots,Q_r \in \mathfrak{G}$, 而

$$X_1 = [P_1,Q_1],\cdots,X_r = [P_r,Q_r]$$

为理想 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ 的一组基. 再拼上 $X_{r+1},\cdots,X_n$ 使成李代数 $\mathfrak{G}$ 的基. 在李群 G_1 中取第二类标准单位标架 (U,φ), 即

$$\begin{aligned}U = \ &\{g = (\exp x_1X_1)\cdots(\exp x_nX_n) \mid \varphi(g) = x = (x_1,\cdots,x_n),\\ &|x_1| < \varepsilon,\cdots,|x_n| < \varepsilon\}.\end{aligned}$$

而对闭正规子群 G_1, 有

$$G_1 \cap U = \{g' = (\exp x_1X_1)\cdots(\exp x_rX_r) \mid |x_1| < \varepsilon,\cdots,|x_r| < \varepsilon\}.$$

今由 Campell-Baker-Hausdorff 定理可知, 当 $|s| < \varepsilon$, $|t| < \varepsilon$ 时有

$$\begin{aligned}g_i(s,t) &= (\exp sP_i)(\exp tQ_i)(\exp sP_i)^{-1}(\exp tQ_i)^{-1}\\ &= \exp \sum_j (ta_{ij}(s) + t^2b_{ij}(s) + o(t^2))X_j,\end{aligned}$$

其中 $a_{ij}(s)$, $b_{ij}(s)$ 在 $|s| < \varepsilon$ 时解析. 取 $s = 0$, 可知

$$\exp \sum_j (ta_{ij}(0) + t^2b_{ij}(0) + o(t^2))X_j = 0.$$

这证明了 $a_{ij}(0)=b_{ij}(0)=0$. 再取 $s=t$, 则有 $g_i(t,t)=t[P_i,Q_i]+o(t)=tX_i+o(t)$, 所以 $a_{ij}(s)=\delta_{ij}+o(1)$. 这证明了存在 $0<\varepsilon'<\varepsilon$, 当 $|s|<\varepsilon'$ 时有 $\det(a_{ij}(s))>0$.

记

$$g(t_1,\cdots,t_r)=g_1(s,t_1)g_2(s,t_2)\cdots g_r(s,t_r),$$

其中 $|t_1|<\varepsilon',\cdots,|t_r|<\varepsilon'$, 则

$$\frac{\partial g(t_1,\cdots,t_r)}{\partial(t_1,\cdots,t_r)}\bigg|_{t_1=\cdots=t_r=0}=\left(\frac{\partial(g_j(s,t_j))_i}{\partial t_j}\bigg|_{t_j=0}\right)=(a_{ij}(s)),$$

其中 $1\le i,j\le r$. 所以证明了存在 $\varepsilon''<\varepsilon'<\varepsilon$, 使当 $|t_1|<\varepsilon'',\cdots,|t_r|<\varepsilon''$ 时, $g(t_1,\cdots,t_r)$ 构成单位的一个 r 维邻域. 另一方面, 考虑 $g(t_1,\cdots,t_r)$ 的第 $r+1,\cdots,n$ 个坐标. 由于 $g_i(s,t_j)\in\exp[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$, $1\le j\le r$, 可知在标架 (U,φ) 中的坐标为 0. 至此证明了在普通群 (G,G) 中存在一个李群 G_1 的单位标架. 由于此单位邻域生成 G_1, 这证明了 $G_1\subset(G,G)$.

总之, 我们证明了 $G_1=(G,G)$. 因此 (G,G) 为连通且单连通李群 G 的闭正规李子群, 其李代数为 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$.

现在考虑连通李群 G, 记 $(\widehat{G},f)$ 为其通用覆盖群. 由上面的证明可知 $(\widehat{G},\widehat{G})$ 为闭正规李子群. 今覆盖映射 f 为连续开映射, 而 $f(\widehat{G})=G$. 由于 $(\widehat{G},\widehat{G})$ 由 $\{\widehat{a}\widehat{b}\widehat{a}^{-1}\widehat{b}^{-1}\mid\forall\,\widehat{a},\widehat{b}\in\widehat{G}\}$ 生成, 又记 $f(\widehat{a})=a$, $f(\widehat{b})=b$, 则由 f 为李群同态可知

$$f(\widehat{a}\widehat{b}\widehat{a}^{-1}\widehat{b}^{-1})=aba^{-1}b^{-1}.$$

所以证明了 $f((\widehat{G},\widehat{G}))=(G,G)$. 这证明了 (G,G) 为普通正规子群, 且为闭子集, 所以是李子群. 其李代数同构于李群 $(\widehat{G},\widehat{G})$ 的李代数 $[\widehat{\mathfrak{G}},\widehat{\mathfrak{G}}]$, 其中 $\widehat{\mathfrak{G}}$ 为李群 $\widehat{G}$ 的李代数. 所以证明了李群 (G,G) 的李代数为 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$, 其中 $\mathfrak{G}$ 为李群 G 的李代数. 显然它是李代数 $\mathfrak{G}$ 的理想. 证完.

显然有

定理 3.3.21 设 G 为连通李群，H 为李群 G 的连通闭子群. 若 $H \supset (G,G)$, 则 H 为连通闭正规子群. 又若 H 为闭正规子群，只要商李群 G/H 为交换李群，则有 $H \supset (G,G)$.

由定理 3.3.20 可知，对连通李群 G 作连通正规子群序列

$$\begin{aligned}&G^{(0)} = G, \quad G^{(1)} = (G,G),\\&G^{(k)} = (G^{(k-1)}, G^{(k-1)}), \quad k = 2,3,\cdots,\end{aligned}$$

则有

$$G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \cdots.$$

另一方面，$G^{(i)}$ 的李代数为

$$\begin{aligned}&\mathfrak{G}^{(0)} = \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{G}^{(1)} = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}],\\&\mathfrak{G}^{(i)} = [\mathfrak{G}^{(i-1)}, \mathfrak{G}^{(i-1)}], \quad i = 2,3,\cdots.\end{aligned}$$

又有正规子群序列

$$G^1 = G, \quad G^k = (G^{k-1}, G), \quad k = 2,3,\cdots,$$

则有

$$G^1 \supset G^2 \supset \cdots.$$

另一方面，G^i 的李代数为

$$\mathfrak{G}^1 = \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{G}^i = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^{i-1}], \quad i = 2,3,\cdots.$$

定义 3.3.22 连通李群 G 称为 **可解李群**, 如果存在自然数 N, 使得 $G^{(N)} = \{e\}$; 连通李群 G 称为 **幂零李群**, 如果存在自然数 N, 使得 $G^N = \{e\}$, 其中 e 为李群 G 的单位元素.

定义 3.3.23 连通李群的极大可解正规子群称为李群 G 的 **根基**; 连通李群的极大幂零正规子群称为李群 G 的 **幂零根基**; 李群 G 称为 **半单的**, 如果它的根基为零维李群.

显然，连通李群可解、幂零、半单，当且仅当它的李代数分别为可解、幂零、半单.

第四章　紧李群

在这一章中我们考虑李群，它的拓扑是紧的，我们称为**紧李群**. 由定义可知，紧李群的单位分支为紧连通李群，且其连通分支只有有限多个，所以下面只限于讨论紧连通李群的结构和表示.

§ 4.1　紧李群的构造

引理 4.1.1　李群 G 的 Maurer-Cartan 形式 (即**左不变一次外微分形式**) 全体构成李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 的对偶空间 $\mathfrak{G}^*$. 在李群 G 中取定单位标架 (U,φ), 记 f 为乘法函数，$l_i^j(x)$, $1\le i,j\le n$ 为辅助函数. 记

$$L(x)=(l_i^j(x)),\qquad L(x)^{-1}=(\widetilde{l_i^j}(x)),$$

则 Maurer-Cartan 形式的坐标表达式为

$$\omega=\sum_{i=1}^n a_i\omega_i,\quad \omega_i=\sum_j \widetilde{l_j^i}(x)\mathrm{d}x_j,\quad 1\le i\le n,$$

其中 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 构成 $\mathfrak{G}^*$ 的关于李代数 $\mathfrak{G}$ 的基

$$X_i=\sum_j l_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j},\ 1\le i\le n$$

的**对偶基**.

证　已知 $X_1,\cdots,X_n$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的基，其对偶基为李代数 $\mathfrak{G}$ 上的线性函数 $\omega_1,\cdots,\omega_n$, 有 $\omega_i(X_j)=\delta_{ij}$, $1\le i,j\le n$. 记 ω_i

在标架 (U,φ) 中的坐标表达式为

$$\omega_i = \sum_j a_{ij}(x)\mathrm{d}x_j, \quad 1 \le i \le n.$$

则由于

$$\mathrm{d}x_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}, \quad 1 \le i,j \le n,$$

于是

$$\begin{aligned}\delta_{ij} = \omega_i(X_j) &= \sum_k a_{ik}(x)\mathrm{d}x_k(\sum_p l_j^p(x)\frac{\partial}{\partial x_p}) \\ &= \sum_{k,p} a_{ik}(x)l_j^p(x)\delta_{kp} = \sum_k a_{ik}(x)l_j^k(x).\end{aligned}$$

记 $(a_{ij}(x)) = A(x)$, 则有 $A(x)L(x) = I$, 即 $A(x) = L(x)^{-1}$. 这证明了 $a_{ij}(x) = \widetilde{l_j^i}(x)$, 所以 $\omega_i = \sum\limits_j \widetilde{l_j^i}(x)\mathrm{d}x_j$, $1 \le i \le n$.

下面来证明李代数 $\mathfrak{G}$ 上的线性函数为左不变形式. 事实上, 记 f_0 为李代数 $\mathfrak{G}$ 上的线性函数. 任取 $g \in G$, 则 $(L_g)_*X = X$, $\forall\, g \in G$, $X \in \mathfrak{G}$. 今

$$f_0((L_g)_*X) = L_g^* f_0(X), \quad \forall\ X \in \mathfrak{G}.$$

这证明了 $(L_g)^*(f_0) = f_0$, $\forall\, g \in G$, 即李代数 $\mathfrak{G}$ 上的线性函数仍左不变. 所以 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 为左不变一次外微分形式.

反之, 任取左不变一次外微分形式 ω, 因此有 $L_g^*\omega = \omega$. 所以任取 $g, h \in G$, 有

$$(L_g)^*(\omega_h) = \omega_{g^{-1}h}.$$

今 ω_e 属于李群 G 的单位切空间 $T_e(G)$ 的对偶空间, 所以

$$\omega_e = \sum_{i=1}^n a_i(\mathrm{d}x_i)_e,$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 为常数. 记 $y=L_{g^{-1}}(x)=f(g^{-1},x)$. 当 $y=e$ 时有 $x=g$.

$$\omega_g=(L_{g^{-1}})^*(\omega_e)=\sum a_i(\mathrm{d}y_i)_{y=e}=\sum a_i\frac{\partial f_i(g^{-1},x)}{\partial x_j}\Big|_{g=x}\mathrm{d}x_j,$$

其中 $f=(f_1,\cdots,f_n)$ 为乘法函数. 因此由 S.Lie 第一基本定理有

$$\omega_g=\sum a_i l_p^i(g^{-1}x)\Big|_{g=x}\widetilde{l}_j^p(x)\mathrm{d}x_j=\sum a_i\widetilde{l}_j^i(x)\mathrm{d}x_j=\sum a_i w_i.$$

这证明了左不变一次外微分式 $\omega=\sum\limits_i a_i\omega_i\in\mathfrak{G}^*$. 至此证明了引理. 证完.

引理 4.1.2 李群 G 的 左不变体积元素 必为

$$\Omega=\lambda_0\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_n,$$

其中 λ_0 为正常数.

证 熟知 n 维流形的体积元素为 n 次外形式, 它在李群 G 的单位标架 (U,φ) 中原点上可表示为

$$\Omega(y)=\lambda_0(\mathrm{d}y_1)_0\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}y_n)_0,$$

其中 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 为李群 G 的单位标架 (U,φ) 中的点坐标, 且有乘法函数 f 及辅助函数 $l_i^j(x)$, 使得 $\det L(x)=\det(l_i^j(x))>0$. 记 $y=f(g^{-1},x)$, 因此

$$\begin{aligned}\Omega(g)&=(L_{g^{-1}})^*(\lambda_0(\mathrm{d}y_1)_0\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}y_n)_0)\\&=\lambda_0\sum\Big(\frac{\partial f_1(g^{-1},x)}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial f_n(g^{-1},x)}{\partial x_{i_n}}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_n}\Big)_{x=g}.\end{aligned}$$

这证明了

$$\Omega(g)=\lambda_0\Big(\det\frac{\partial f(g^{-1},x)}{\partial x}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\Big)_{x=g}.$$

由 S.Lie 第一基本定理可知

$$\begin{aligned}\Omega(g)&=\lambda_0(\det L(g^{-1}x)\det L(x)^{-1}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n)\big|_{x=g}\\&=\lambda_0(\det L(x)^{-1}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n)\big|_{x=g}=\lambda_0\omega_1(g)\wedge\cdots\wedge\omega_n(g).\end{aligned}$$

注意到 $\det L(x)>0$, $\lambda_0>0$, 所以这是体积元素. 证完.

今 G 为连通紧李群. 对 G 的标架覆盖, 则存在有限多个标架覆盖 G, 记作 (U_i,φ_i), $1\le i\le s$. 所以有

$$\cup_{i=1}^{s}U_i=G.$$

引理 4.1.3(Dieudonné 单位分解定理) 设 $\mathfrak{M}$ 为具有第二可数公理的光滑流形, 则在 $\mathfrak{M}$ 中存在至多可数多个标架 $\{(U_i,\varphi_i)\}$, 使得 $\bigcup_i U_i=\mathfrak{M}$, 且每个 U_i 和至多有限多个 U_j 的交非空. 又存在流形 $\mathfrak{M}$ 上的光滑函数 f_i, 使得 f_i 的紧支柱在开集 U_i 中, $0\le f_i\le 1$, 又在流形 $\mathfrak{M}$ 上有

$$\sum_{i=1}^{\infty}f_i=1.$$

这个引理的证明可见任何一本流形入门书. 这里要注意, 由于开集覆盖 U_i 中每个 U_i 和至多有限多个 U_j 的交非空, 所以上面的和 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}f_i$ 表面上是无限和, 但是对于每个流形 $\mathfrak{M}$ 中的固定点, 实际上是有限和.

用 Dieudonné 单位分解定理, 可以在适合引理 4.1.3 的条件和可定向且有体积元素的流形上引进积分. 事实上, 记流形 $\mathfrak{M}$ 的体积元素为 Ω, 则积分定义为

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{M}}f(p)\Omega(p)&=\int_{\mathfrak{M}}\Big(f(p)\sum_{i=1}^{\infty}f_i(p)\Big)\Omega(p)=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathfrak{M}}f(p)f_i(p)\Omega(p)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{U_i}f_i(p)f(p)\Omega(p)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\varphi_i(U_i)}f_i(\varphi_i^{-1}(x))f(\varphi_i^{-1}(x))\Omega(\varphi^{-1}(x)).\end{aligned}$$

注意到 $\varphi_i(U_i)$ 为 F^n 中的开集, 所以

$$\int_{\varphi_i(U_i)}f_i(\varphi_i^{-1}(x))f(\varphi_i^{-1}(x))\Omega(\varphi^{-1}(x))$$

为通常 Euclid 空间中开集 $\varphi_i(U_i)$ 上的重积分，这是熟知的.

积分称为标准的，如果

$$\int_{\mathfrak{M}} \Omega = 1.$$

引理 4.1.4 n 维紧连通李群 G 上的 n 维左不变体积元素必右不变，且有

$$(\mathrm{ad}\, g)^*\Omega = \Omega, \quad \forall\, g \in G.$$

证 已知 Ω 左不变，而 $\mathrm{ad}\, g = L_g \circ (R_g)^{-1}$, 所以 Ω 右不变等价于 $(\mathrm{ad}\, g)^*\Omega = \Omega$, $\forall\, g \in G$.

现在证 $(\mathrm{ad}\, g)^*\Omega = \Omega$. 显然，只要在单位标架 (U, φ) 上证明就行了. 为此先证

$$(\mathrm{ad}\, g)^*\Omega = (\det \mathrm{Ad}\,(g))\Omega, \quad \forall\, g \in U.$$

今记 $f = (f_1, \cdots, f_n)$ 为乘法函数，$l_i^j(x)$ 为辅助函数. 于是

$$X_i = \sum_j l_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \omega_i = \sum_j \widetilde{l_j^i}(x)\mathrm{d}x_j, \quad 1 \le i \le n.$$

由于差一个正常数不受影响，我们无妨取

$$\Omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n = (\det L(x))^{-1}\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n,$$

这里 $L(x) = (l_j^i(x))$. 由定理 3.2.28 的 (1) 可知，$\mathrm{Ad}\,(g) = (\mathrm{ad}\, g)_*$ 在基 $X_1, \cdots, X_n$ 下的方阵表示为 $A(g) = R(g)^{-1}L(g)$, 其中 $R(x) = (r_j^i(x))$. 于是 $(\mathrm{ad}\, g)_*$ 诱导了李代数 $\mathfrak{G}$ 的对偶空间 $\mathfrak{G}^*$ 上的线性变换 $(\mathrm{ad}\, g)^*$, 它关于 $X_1, \cdots, X_n$ 的对偶基 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 的方阵表示为 $A(g)'$. 所以

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\, g)^*(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n) &= (\det A(g))(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n) \\ &= (\det \mathrm{Ad}\,(g))(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n), \quad \forall\, g \in U.\end{aligned}$$

因此，为了证体积元素 $\Omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ 右不变，只要证 $\det \mathrm{Ad}\,(g) = 1$, $\forall\, g \in U$ 就可以了.

事实上，由于 G 为紧连通李群，于是映射

$$\tau : g \to \det \mathrm{Ad}\,(g)$$

为 G 上的解析函数. 但是 $\mathrm{Ad}\,(g) \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$, 因此 $\det \mathrm{Ad}\,(g) \neq 0, \forall\, g \in G$. 这推出 $\det \mathrm{Ad}\,(g) > 0, \forall\, g \in G$. 因此 τ 给出紧连通李群 G 到连通李群 e^F 内的李群同态. 这证明了 $\tau(G)$ 为连通交换李群 e^F 中的李子群. 由 G 紧可推出 $\tau(G)$ 紧. 但是 e^F 非紧，且为 1 维. 故其紧子群必为零维子群. 但是由 G 连通可推出 $\tau(G)$ 连通，这证明了 $\tau(G)$ 由 e^F 中单位元素 $e^0 = 1$ 构成. 因此

$$\det \mathrm{Ad}\,(g) = 1, \quad \forall\, g \in G.$$

于是证明了 $(\mathrm{ad}\, g)^*\Omega = \Omega, \forall\, g \in G$, 即 Ω 为左、右双不变体积元素. 证完.

定义 4.1.5 连通紧李群 G 上存在的左、右双不变体积元素诱导的测度称为 **Haar 测度**.

定理 4.1.6 设 Ω 为 n 维连通紧李群 G 上的 Haar 测度，任取李群 G 上的连续函数 f_1, f_2 及常数 $a_1, a_2 \in F$, 有

$$\int_G (a_1 f_1 + a_2 f_2)\Omega = a_1 \int_G f_1\Omega + a_2 \int_G f_2\Omega,$$

且对李群 G 上的任意连续函数 f, 有

$$\begin{aligned}\int_G f(g_0 g)\Omega(g) &= \int_G f(g g_0)\Omega(g)\\ &= (-1)^n \int_G f(g^{-1})\Omega(g) = \int_G f(g)\Omega(g),\end{aligned}$$

其中 $g_0 \in G$, $\Omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$, 又 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 为李群 G 的 Maurer-Cartan 形式构成的线性空间中的一组基.

证 今由 Ω 为左、右双不变的，所以有

$$\int_G f(g_0 g)\Omega(g) = \int_G f(g_1)\Omega(g_0^{-1} g_1) = \int_G f(g_1)\Omega(g_1),$$

$$\int_G f(g g_0)\Omega(g) = \int_G f(g_1)\Omega(g_1 g_0^{-1}) = \int_G f(g_1)\Omega(g_1).$$

最后证

$$\int_G f(g^{-1})\Omega(g) = (-1)^n \int_G f(g)\Omega(g),$$

其中 $n = \dim G$. 事实上, 在紧连通李群 G 中取定单位标架 (U, φ), 记 f 为辅助函数. 记取逆函数为 $h(x)$, 即有

$$f(x, h(x)) = f(h(x), x) = 0.$$

于是记 $y = h(x)$, 有

$$\left(\frac{\partial f(y,x)}{\partial y}\frac{\partial h(x)}{\partial x} + \frac{\partial f(y,x)}{\partial x}\right)\Big|_{y=h(x)} = 0.$$

由 S.Lie 第一基本定理有

$$\frac{\partial f(y,x)}{\partial x}\Big|_{y=h(x)} = L(f(y,x))\Big|_{y=h(x)} L(x)^{-1} = L(x)^{-1},$$

由定理 3.2.28 的证明有

$$\frac{\partial f(y,x)}{\partial y}\Big|_{y=h(x)} = R(f(y,x))\Big|_{y=h(x)} R(y)^{-1} = R(y)^{-1}.$$

所以有

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} = -R(y)L(x)^{-1}.$$

由引理 4.1.4 的证明可知 $\det A(x) = \det R(x)^{-1}L(x) = 1$, 即有 $\det R(y) = \det L(y)$, 因此

$$\det\frac{\partial y}{\partial x} = \det(-L(y)L(x)^{-1}).$$

今记 $g \in U$ 的坐标为 x, g^{-1} 的坐标为 y. 则有

$$\begin{aligned}
\Omega(g^{-1}) &= (\det L(y))^{-1}\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n \\
&= (\det L(y))^{-1}\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n \\
&= \det(-L(x)^{-1})\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n = (-1)^n\Omega(g).
\end{aligned}$$

因此

$$\int_G f(g^{-1})w_g = \int_G f(g)w_{g^{-1}} = (-1)^n \int_G f(g)w_g.$$

证完.

现在证明紧李群理论中最基本的定理.

定理 4.1.7(Weyl 定理) 设 GL(V) 为 n 维线性空间 V 上的一般线性群, G 为 GL(V) 中紧子群. 则在线性空间 V 上存在 **G 不变内积** (x,y), 即有

$$(g(x),g(y)) = (x,y), \quad \forall\ g \in G,\ x,y \in V.$$

证 记 Ω 为紧李群 G 的 Haar 测度. 在线性空间 V 上任取 $< x,y >$(当 $F=\mathbb{R}$ 时, 内积为正定对称双线性函数; 当 $F=\mathbb{C}$ 时, 内积为正定 Hermite 双线性函数), 作

$$(x,y) = \int_G < g(x),g(y) > \Omega(g), \quad \forall\ x,y \in V,$$

则 (x,y) 显然为内积. 今任取 $g \in G$, 则

$$\begin{aligned}(g(x),g(y)) &= \int_G < gg_0(x),gg_0(y) > \Omega(g_0)\\ &= \int_G < g_1(x),g_1(y) > \Omega(g^{-1}g_1)\\ &= \int_G < g_1(x),g_1(y) > \Omega(g_1) = (x,y),\ \forall\ x,y \in V.\end{aligned}$$

证完.

利用 Weyl 定理, 我们可以证明

定理 4.1.8 复紧连通李群必交换, 因此是复环面.

证 设 G 为复紧连通李群, $\mathfrak{G}$ 为李群 G 的李代数, 所以 AdG 也是复紧连通李群. 由于 Ad$G \subset$ Aut$(\mathfrak{G}) \subset$ GL$(\mathfrak{G})$, 所以可用 Weyl 定理, 即在李代数 $\mathfrak{G}$ 上存在 AdG 不变内积 (x,y). 构作复李群 G 到 $\mathbb{C}$ 内的映射

$$f: g \to ((\mathrm{Ad}\, g)X,Y), \quad \forall\ g \in G,$$

其中 X,Y 为 $\mathfrak{G}$ 中任意两个元素. 由于紧复流形上的全纯函数只有常数, 所以证明了

$$((\mathrm{Ad}\,g)X,Y)=((\mathrm{Ad}\,e)X,Y)=(X,Y),\quad \forall\, g\in G, X,Y\in\mathfrak{G}.$$

由于 (X,Y) 为线性空间 $\mathfrak{G}$ 上的内积, 这证明了 $(\mathrm{Ad}\,g)X-X=0$, 即 $\mathrm{Ad}\,g=\mathrm{id}$, $\forall\, g\in G$. 因此 $\mathrm{ad}\,g=\mathrm{id}$, $\forall\, g\in G$. 所以 $g\in \mathrm{C}(G)$ 为 G 的中心, 即 $G=\mathrm{C}(G)$. 这证明了李群 G 可交换. 证完.

因此, 对紧连通李群, 今后只考虑实的情形.

定理 4.1.9 设 G 为连通李群, 且为一般线性群 $\mathrm{GL}(V)$ 中的紧子群, 其中 V 为 m 维实线性空间. 则在 V 中存在一组基, 使得 G 的方阵表示都是实正交方阵, 即为实正交群 $O(m)$ 的紧连通子群, 所以是闭连通子群.

证 由 Weyl 引理可知, 在线性空间 V 上有 G 不变内积. 取关于此内积的标准正交基 $e_1,e_2,\cdots,e_m$, 于是

$$(x,y)=\sum x_iy_i,$$

其中 $x=\sum x_ie_i$, $y=\sum y_ie_i$. 今任取 $g\in G$, 则有 $g(e_i)=\sum\limits_j p_{ji}e_j$, $1\le i\le m$. 而由 $(g(x),g(y))=(x,y)$ 推出 $PP'=I$, 其中 $P=(p_{ij})$ 为 g 的方阵表示. 这证明了在标准正交基下, 紧连通李群 G 的方阵表示构成实正交群 $O(m)$ 的紧连通李子群. 证完.

由于 $m\times m$ 实正交群 $O(m)$ 显然为实紧李群, 它不连通, 单位分支为 $\mathrm{SO}(m)$. 熟知紧拓扑空间的子集紧当且仅当闭, 因此定理 4.1.9 证明了下面重要事实: 即研究实连通紧李群就是研究实正交群的闭连通子群.

注意到设 G 为实连通李群, $\mathfrak{G}$ 为李群 G 的李代数, 则实连通李群 $\mathrm{Ad}\,G\subset\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})\subset\mathrm{GL}(\mathfrak{G})$ 为一般线性群 $\mathrm{GL}(\mathfrak{G})$ 中的闭子群. 它的李代数为 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{G}$. 记 $\mathfrak{G}$ 的中心为 $\mathrm{C}(\mathfrak{G})$, 则李代数 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{G}$ 同构于商李代数 $\mathfrak{G}/\mathrm{C}(\mathfrak{G})$.

现在给出紧李代数(定义见第二章)和由它决定的李群间的关系. 显然李群紧, 则其李代数必紧. 反之, 我们有

引理 4.1.10 设 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数, 则李代数 $\mathfrak{G}$ 紧当且仅当实连通李群 $\mathrm{Ad}\,G$ 有不变内积, 所以连通李群 $\mathrm{Ad}\,G$ 紧.

证 今 $\mathfrak{G}$ 为实李代数, 由紧的定义可知李代数 $\mathfrak{G}$ 有不变内积. 即在线性空间 $\mathfrak{G}$ 上有内积 (X,Y), 它适合条件

$$([X,Y],Z)+(Y,[X,Z])=0,\quad \forall\ X,Y,Z\in\mathfrak{G}.$$

由归纳法不难证明

$$\sum_{i+j=k}\frac{1}{i!j!}((\mathrm{ad}\,X)^iY,(\mathrm{ad}\,X)^jZ)=0,\quad k=1,2,\cdots.$$

所以任取 $t\in\mathbb{R}$, 则有

$$\begin{aligned}&((\exp t\mathrm{ad}\,X)Y,(\exp t\mathrm{ad}\,X)Z)\\=&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k}\frac{t^k}{i!j!}((\mathrm{ad}\,X)^iY,(\mathrm{ad}\,X)^jZ)=(Y,Z),\end{aligned}$$

其中 $X,Y,Z\in\mathfrak{G}$. 这证明了李代数 $\mathfrak{G}$ 上的内积 (Y,Z) 在线性变换 $\exp t(\mathrm{ad}\,X)=\mathrm{Ad}\,(\exp tX)$, $\forall\ X\in\mathfrak{G}$ 下不变. 已知李群 G 连通, 它由 $\exp\mathfrak{G}$ 生成, 所以有

$$((\mathrm{Ad}\,g)X,(\mathrm{Ad}\,g)Y)=(X,Y),\quad \forall\ g\in G.$$

这证明了内积 (X,Y) 为 $\mathrm{Ad}\,G$ 不变内积.

反之, 若实李代数 $\mathfrak{G}$ 上有内积 (X,Y), 它在 $\mathrm{Ad}\,G$ 下不变, 即有

$$((\mathrm{Ad}\,g)X,(\mathrm{Ad}\,g)Y)=(X,Y),\quad \forall\ g\in G,\ X,Y\in\mathfrak{G}.$$

因此任取 $Z\in\mathfrak{G}$, 则有

$$((\mathrm{Ad}\,(\exp tZ))X,(\mathrm{Ad}\,(\exp tZ))Y)=(X,Y),$$

其中 $X,Y,Z\in\mathfrak{G}$, $t\in\mathbb{R}$. 双方对 t 求导数, 再取 $t=0$, 则有

$$((\mathrm{ad}\,Z)X,Y)+(X,(\mathrm{ad}\,Z)Y)=0,\quad \forall\ X,Y,Z\in\mathfrak{G}.$$

即李代数 $\mathfrak{G}$ 有不变内积.

由于实李代数 $\mathfrak{G}$ 紧等价于实连通李群 $\mathrm{Ad}\,G$ 有 $\mathrm{Ad}\,G$ 不变内积, 因此在李代数 $\mathfrak{G}$ 中关于此内积取标准正交基, 可知 $\mathrm{Ad}\,G$ 的方阵表示为实正交群中的闭子群, 即为紧李群. 证完.

今 $\mathrm{Ad}\,G$ 的李代数 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{G}$ 同构于 $\mathfrak{G}/\mathrm{C}(\mathfrak{G})$. 设李代数 $\mathfrak{G}$ 紧, 所以 $\mathfrak{G}=\mathrm{C}(\mathfrak{G})+[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ 为理想直接和, 其中 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ 半单. 因此 $\mathfrak{G}/\mathrm{C}(\mathfrak{G})$ 同构于紧半单李代数 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$.

一般地, 我们有

定理 4.1.11 设 $\mathfrak{G}$ 为实连通李群 G 的李代数. 设李代数 $\mathfrak{G}$ 为紧半单李代数, 则连通李群 G 紧.

这个定理的证明大致为: 利用引理 4.1.10, 所以李群 $\mathrm{Ad}\,G$ 紧. 但是李代数 $\mathfrak{G}$ 半单, 所以 $\mathrm{Ad}\,G$ 的李代数 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{G}$ 同构于 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]=\mathfrak{G}$. 因此, 连通李群 G 的通用覆盖群 $(\widehat{G},f)$ 的李代数 $\widetilde{\mathfrak{G}}$ 和 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{G}$ 同构. 如果李群 $\widehat{G}$ 紧, 则由覆盖映射 f 为连续开映射, 所以李群 G 紧. 换句话说, 问题化为证实连通且单连通李群 G, 若其李代数紧半单, 则 G 紧. 这个证明要用到判断一个流形单连通的定理, 我们在此略去.

如果除去李代数紧半单的条件, 则由李代数紧推不出由它决定的李群紧. 事实上, 交换李群的李代数必为紧李代数. 但是, 实交换李群同构于 $\mathbb{R}^r\times(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^s$, 其中 s 维环面 $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^s$ 紧, 可是 r 维实 Euclid 空间 $\mathbb{R}^r$ 非紧.

现在展开紧李群的构造理论.

定义 4.1.12 连通李群 G 的李子群 H 称为 **Cartan 子群**, 如果它适合

(1) H 为极大连通幂零李群;

(2) H 的 **正规化子**

$$\mathrm{N}(H)=\{g\in G\mid gHg^{-1}=H\}$$

的单位分支 $N(H)^0$ 为 H 本身.

定理 4.1.13 紧连通李群 G 的极大交换普通子群为闭李子群，其单位连通分支 H 为李群 G 的 Cartan 子群. Cartan 子群 H 为极大紧连通交换子群，所以是环面. 因此，Cartan 子群也称为 **极大环面**.

记李群 G 及 H 的李代数分别为 $\mathfrak{G}$ 及 $\mathfrak{H}$, 则 $\mathfrak{H}$ 为紧李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数，且 $(\mathfrak{H}, \exp)$ 为李群 H 的通用覆盖群.

证 先证前一断言. 记 H_0 为紧李群的极大交换普通子群. 记 $\overline{H}_0$ 为 H_0 的闭包. 由李群乘法及取逆运算的连续性，可知 $\overline{H}_0$ 为普通子群. 下面证 $\overline{H}_0$ 为普通交换子群. 事实上, 任取 $h, h' \in \overline{H}_0$, 则在集合 H 中存在收敛序列 $\{h_i\}$ 及 $\{h'_i\}$, 使得 $h_i \to h$, $h'_i \to h'$. 由于 $h_i h'_i = h'_i h_i$. 取 $i \to \infty$ 便证明了 $hh' = h'h$. 这证明了断言. 但是 H_0 为极大交换普通子群，所以证明了 $\overline{H}_0 = H_0$, 即 H_0 为闭普通子群，所以在诱导拓扑下为闭李子群. 但 G 紧，所以 H_0 为紧子群. 记 H 为 H_0 的单位分支. 我们来证 H 为 Cartan 子群. 记 H 的李代数为 $\mathfrak{H}$. 显然 $\mathfrak{H}$ 为 $\mathfrak{G}$ 中的极大交换子代数. 为了证 H 为紧李群 G 的 Cartan 子群，我们先来证 $\mathfrak{H}$ 为紧李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数.

事实上，由于 $\mathfrak{G}$ 为紧李代数，所以有不变内积 (x, y). 记李代数 $\mathfrak{G}$ 的中心为 $C(\mathfrak{G})$, 它是 $\mathfrak{G}$ 的交换理想. $C(\mathfrak{G})$ 关于此内积的正交补 $C(\mathfrak{G})^{\perp}$ 也是 $\mathfrak{G}$ 的理想，且有空间直接和 $\mathfrak{G} = C(\mathfrak{G}) + C(\mathfrak{G})^{\perp}$. 记 $\mathfrak{G}_1 = C(\mathfrak{G})^{\perp}$. 我们由第 2 章可知 $\mathfrak{G}_1$ 为紧半单李代数，且 $\mathfrak{G}_1$ 的 Cartan 子代数为 $\mathfrak{G}_1$ 的极大交换子代数，且 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_1$ 由半单线性变换构成. 另一方面，由 $\mathfrak{H}$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的极大交换子代数，所以 $\mathfrak{H} \supset C(\mathfrak{G})$. 因此

$$\mathfrak{H} = C(\mathfrak{G}) + \mathfrak{H}_1$$

为空间直接和，其中 $\mathfrak{H}_1$ 为半单李代数 $\mathfrak{G}_1$ 的极大交换子代数，且 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}_1$ 由半单线性变换构成. 这证明了 $\mathfrak{H}$ 为紧李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数, 即 $\mathfrak{H}$ 为紧李代数 $\mathfrak{G}$ 中的极大幂零子代数, 且有 $N(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$.

考虑闭李子群 H 的正规化子 $N(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$.

由定义可知，正规化子 $\mathrm{N}(H)$ 为闭普通子群，所以是闭李子群，它的李代数为 $\mathrm{N}(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$. 事实上，记正规化子 $\mathrm{N}(H)$ 的李代数为 $\mathfrak{H}_2$. 由定义可知 $(\mathrm{Ad}\,g)\mathfrak{H}=\mathfrak{H}$, 即任取 $X\in\mathfrak{H}_2$, 则 $(\mathrm{Ad}\,(\exp tX))\mathfrak{H}=(\exp t(\mathrm{ad}\,X))\mathfrak{H}=\mathfrak{H}$. 由于子空间 $\mathfrak{H}$ 为 Euclid 空间 $\mathfrak{G}$ 中的闭子集，所以推出 $[X,\mathfrak{H}]\subset\mathfrak{H}$, $\forall\, X\in\mathfrak{H}_2$. 这证明了 $\mathfrak{H}_2\subset\mathrm{N}(\mathfrak{H})$, 其中 $\mathrm{N}(\mathfrak{H})$ 为李代数 $\mathfrak{H}$ 的正规化子. 但是 $\mathrm{N}(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$, 即有 $\mathfrak{H}_2\subset\mathfrak{H}$. 另一方面，由 $H\subset\mathrm{N}(H)$ 可知 H 为李群 $\mathrm{N}(H)$ 的闭子群，所以李代数有关系 $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}_2$. 至此证明了 $\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}$. 由于 $\exp\mathfrak{H}$ 生成闭连通子群 H, $\exp\mathrm{N}(\mathfrak{G})$ 生成闭子群 $\mathrm{N}(H)$ 的单位连通分支 $\mathrm{N}(H)^0$, 由 $\mathfrak{H}=\mathrm{N}(\mathfrak{H})$ 便证明了 $H=\mathrm{N}(H)^0$.

最后来证 H 为连通极大幂零子群. 这化为证明李代数 $\mathfrak{H}$ 为紧李代数 $\mathfrak{G}$ 的极大幂零子代数，由于第 2 章的结果可知此断言成立. 至此我们证明了闭李子群 H 为 Cartan 子群. 由于紧拓扑空间的闭子集紧，所以 H 为紧连通交换子群.

下面证后一断言，即证 $(\mathfrak{H},\exp)$ 为 Cartan 子群 H 的通用覆盖群. 今 $\mathfrak{H}$ 为交换李代数，于是 $(\exp X)(\exp Y)=(\exp Y)(\exp X)=\exp(X+Y)$, $\forall\, X,Y\in\mathfrak{H}$. 这证明了 $\exp\mathfrak{H}$ 生成 $\exp\mathfrak{H}$ 自身，所以证明了 Cartan 子群 $H=\exp\mathfrak{H}$. 即 $\exp:\mathfrak{H}\to H$ 为到上的映射，且给出加法群 $\mathfrak{H}$ 到交换群 H 上的李群同态. 记同态核为 Γ, 它是加法群 $\mathfrak{H}$ 中的加法子群. 由同态基本定理，可知李群 $\mathfrak{H}/\Gamma$ 和 H 同构. 注意到 $\dim H=\dim\mathfrak{H}$, 这证明了 $\dim\Gamma=0$, 即 Γ 为加法群 $\mathfrak{H}$ 中的离散子群，所以 $\exp$ 为 $\mathfrak{H}$ 到 H 上的覆盖映射. 显然实线性空间单连通，所以 $(\mathfrak{H},\exp)$ 为 Cartan 子群 H 的通用覆盖群. 证完.

下面来证紧李群的 Cartan 子群的共轭性，且由此推出在第 1 章中未加证明的复半单李代数的 Cartan 子代数的共轭性定理. 为此，先给出

定义 4.1.14 李群 G 中元素 g_1 和 g_2 称为**互相共轭的**, 如果存在元素 $g\in G$, 使得 $(\mathrm{ad}\,g)g_1=g_2$; 记 $\mathfrak{G}$ 为李群 G 的李代数，$\mathfrak{G}$ 中元素 X 和 Y 称为**互相共轭的**, 如果存在元素 $g\in G$, 使得

$(\mathrm{Ad}\,g)X = Y$. 共轭等价类也称为 **共轭元素类**.

今任取李群 G 中元素 g, 任取李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 中元素 X, 则 $\mathrm{ad}\,g$ 为李群 G 的自同构, $\mathrm{Ad}\,g$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的自同构, 且由

$$(\mathrm{ad}\,g)(\exp tX) = \exp t(\mathrm{ad}\,g)_* X = \exp t(\mathrm{Ad}\,g)X, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

可知, 若李代数 $\mathfrak{G}$ 中元素 X 和 Y 互相共轭, 则由它们决定的单参数子群也互相共轭. 反之, 若给定 $X, Y \in \mathfrak{G}$, 且由它们决定的单参数子群互相共轭, 则相应的 X 和 Y 也互相共轭.

下面引进紧李群的正则元素的概念.

定义 4.1.15 李群 G 中的元素 g 称为 **正则元素**, 如果 g 的中心化子 $\mathrm{C}(g) = \{x \in G \mid xg = gx\}$ 的单位分支为交换子群, 否则称为 **非正则元素**.

显然, 给定李群 G 中的元素 g, 则元素 g 的中心化子 $\mathrm{C}(g)$ 为闭普通子群, 所以是李子群, 其单位分支为连通闭李子群. 我们有

引理 4.1.16 记 $\mathfrak{G}$ 为李群 G 的李代数, 则李群 G 中元素 g 的中心化子 $\mathrm{C}(g)$ 为闭李子群, 它的李代数为

$$\mathfrak{N}_g = \{X \in \mathfrak{G} \mid (\mathrm{Ad}\,g)X = X\},$$

即为李代数 $\mathfrak{G}$ 的内自同构 $\mathrm{Ad}\,g$ 的属于特征根 1 的所有特征向量构成的李代数.

证 显然, $\mathrm{C}(g)$ 为李群 G 的闭李子群. 记 $\mathfrak{N}_g$ 为其李代数, 则 $X \in \mathfrak{N}_g$ 当且仅当 $\exp tX \in \mathrm{C}(g)$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, 即 $g \cdot \exp tX = (\exp tX)g$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$. 这等价于 $(\mathrm{ad}\,g)(\exp tX) = \exp t(\mathrm{ad}\,g)_* X = \exp t(\mathrm{Ad}\,g)X = \exp tX$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, 即等价于 $(\mathrm{Ad}\,g)X = X$. 所以证明了引理. 证完.

推论 1 设 G 为连通紧李群, $\mathfrak{G}$ 为李群 G 的李代数. 记 $\mathfrak{H}$ 为紧李群 G 的 Cartan 子群 H 的李代数. 则 Cartan 子群 H 中的元素 g 为正则元素, 当且仅当 g 的中心化子的单位分支 $\mathrm{C}(g)^0 = H$, 即李代数

$$\mathfrak{H} = \{X \in \mathfrak{G} \mid (\mathrm{Ad}\,g)X = X\}.$$

又 Cartan 子群 H 中的元素 g 为非正则元素，当且仅当 $\mathrm{C}(g)^0 \supset H$，且 $\mathrm{C}(g)^0 \neq H$. 即

$$\mathfrak{H} \supsetneqq \{X \in \mathfrak{G} \mid (\mathrm{Ad}\, g)X = X\}.$$

证　令 $g \in H$，其中 H 为 Cartan 子群，即为极大连通交换子群，所以 $H \subset \mathrm{C}(g)^0$. 而 g 为正则元素当且仅当 $\mathrm{C}(g)^0$ 交换，由 Cartan 子群为极大交换连通子群，且 $H \subset \mathrm{C}(\mathfrak{H})^0$ 便推出 $H = \mathrm{C}(g)^0$. 证完.

令 G 为紧李群，$\mathfrak{H}$ 为 G 的李代数，所以是紧李代数. 我们有

$$\mathfrak{G} = \mathrm{C}(\mathfrak{G}) + [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$$

为理想直接和，其中 $\mathrm{C}(\mathfrak{G})$ 为中心，$[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ 为紧半单李代数. 而李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数

$$\mathfrak{H} = \mathrm{C}(\mathfrak{G}) + \mathfrak{H}_1,$$

其中 $\mathfrak{H}_1$ 为紧半单李代数 $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ 的 Cartan 子代数. 考虑复李代数

$$\mathfrak{G}^C = \mathrm{C}(\mathfrak{G})^C + [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]^C,$$

则 $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]^C$ 关于 Cartan 子代数 $\mathrm{ad}\, \mathfrak{H}_1^C$ 有根子空间分解 $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]^C = \mathfrak{H}_1^C + \sum\limits_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{G}_\alpha$. 于是

$$\mathfrak{G}^C = \mathfrak{H}^C + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{G}_\alpha,$$

其中 $\alpha(\mathrm{C}(\mathfrak{G})^C) = 0, \forall \alpha \in \Delta$. 我们仍然称 Δ 为复李代数 $\mathfrak{G}^C$(它不一定半单) 的根系. 易证 $\mathfrak{H}^C$ 为复李代数 $\mathfrak{G}^C$ 的 Cartan 子代数.

推论 2　符号同上. Cartan 子群 H 中元素 $g = \exp X_0$, 其中 $X_0 \in \mathfrak{H}$ 为 Cartan 子代数. 记复李代数 $\mathfrak{G}^C$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{G}^C = \mathfrak{H}^C + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{G}_\alpha,$$

其中 Δ 为根系. 则 $g=\exp X_0$ 为非正则元素，当且仅当存在 $\alpha\in\Delta$，使得

$$\exp\alpha(X_0)=1.$$

证 今已证 $H=\exp\mathfrak{H}$，所以 H 中的元素均可表示为 $\exp X_0$ 的形式，其中 $X_0\in\mathfrak{H}$. 由于 $g=\exp X_0$ 为非正则元素当且仅当

$$\mathfrak{H}\subsetneq\{X\in\mathfrak{G}\mid(\mathrm{Ad}\,g)X=X\}.$$

而 $(\mathrm{Ad}\,g)X=(\mathrm{Ad}\,(\exp X_0))X=(\exp(\mathrm{ad}\,X_0))X.$，今 $X\in\mathfrak{G}\subset\mathfrak{G}^C$，所以 $X=h+\sum\limits_{\alpha\in\Delta}x_\alpha$，其中 $h\in\mathfrak{H}^C$，$x_\alpha\in\mathfrak{G}_\alpha$. 由于 $X_0\in\mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}^C$，所以

$$[X_0,h]=0,\quad [X_0,x_\alpha]=\alpha(X_0)x_\alpha,\quad \forall\ \alpha\in\Delta.$$

因此

$$(\exp(\mathrm{ad}\,X_0))h=h,\quad (\exp\mathrm{ad}\,X_0)x_\alpha=\exp(\alpha(X_0))x_\alpha.$$

所以

$$(\mathrm{Ad}\,g)X=(\exp\mathrm{ad}\,X_0)X=h+\sum_{\alpha\in\Delta}\exp(\alpha(X_0))x_\alpha=h+\sum_{\alpha\in\Delta}x_\alpha.$$

即 $(\mathrm{Ad}\,g)X=X$ 当且仅当 $(\exp(\alpha(X_0))-1)x_\alpha=0$，$\forall\ \alpha\in\Delta$. 即当 $\exp(\alpha(X_0))\neq 1$ 时有 $x_\alpha=0$. 所以证明了

$$\{X\in\mathfrak{G}\mid(\mathrm{Ad}\,g)X=X\}^C=\mathfrak{H}^C+\sum_{\alpha\in\Delta,\exp(\alpha(X_0))=1}\mathfrak{G}_\alpha.$$

于是 $\mathfrak{H}\neq\{X\in\mathfrak{G}\mid(\mathrm{Ad}\,g)X=X\}$ 当且仅当存在 $\alpha\in\Delta$，

$$\exp(\alpha(X_0))=1,$$

又 $\{X\in\mathfrak{G}\mid(\mathrm{Ad}\,g)X=X\}\supset\mathfrak{H}$. 推论证完.

由推论 2，我们可以在连通紧李群 G 中取定 Cartan 子群 H，再算出所有非正则元素，于是算出了所有正则元素. 我们有

引理 4.1.17 符号同上. 任取 $\alpha\in\Delta$，则

$$H_\alpha=\{g=\exp X_0\mid X_0\in\mathfrak{H},\ \exp(\alpha(X_0))=1\}$$

为非正则元素构成的紧李子群，它的李代数为

$$\mathfrak{H}_\alpha = \{X_0 \in \mathfrak{H} \mid \alpha(X_0) = 0\},$$

且 $\exp \mathfrak{H}_\alpha = H_\alpha$. 于是 Cartan 子群 H 中的非正则元素全体构成 Cartan 子群 H 中的闭子集 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} H_\alpha$, 从而 Cartan 子群 H 中的所有正则元素构成 Cartan 子群 H 中的开子集.

证 由引理 4.1.16 的推论 2 可知，集合 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} H_\alpha$ 为 Cartan 子群 H 中所有非正则元素构成的集合. 由根系 Δ 为有限集可知，只要证 H_α 为闭子集，则 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} H_\alpha$ 也闭.

实际上，我们可证 H_α 为闭李子群. 即证 H_α 为闭子集，且为普通子群. 这是因为任取 $g_1, g_2 \in H_\alpha$, 则存在 $X_1, X_2 \in \mathfrak{H}$, 使得 $g_1 = \exp X_1$, $g_2 = \exp X_2$, 且 $\exp(\alpha(X_1)) = \exp(\alpha(X_2)) = 1$. 今 $[X_1, X_2] = 0$, 所以有

$$g_1 g_2^{-1} = (\exp X_1)(\exp(-X_2)) = \exp(X_1 - X_2).$$

显然 $X_1 - X_2 \in \mathfrak{H}$, 且

$$\exp(\alpha(X_1 - X_2)) = \exp(\alpha(X_1))\exp(-\alpha(X_2)) = 1.$$

这证明了 $g_1 g_2^{-1} \in H_\alpha$, 即 H_α 为普通子群. 再在 H_α 中任取 G 的收敛序列 $\{g_i\}$, 记极限为 g_0. 今 $g_i \in H_\alpha \subset H$ 及 H 紧，所以极限 $g_0 \in H$. 由于 $(\mathfrak{H}, \exp)$ 为 Cartan 子群 H 的通用覆盖群，今 $g_0 \in H$, 有 $X_0 \in \mathfrak{H}$, $\exp X_0 = g_0$. 且存在李代数 $\mathfrak{H}$ 中点 X_0 的邻域 U_0, 使得 $\exp: U_0 \to H$ 为到内的同胚映射. 记 $\exp U_0 = U$. 无妨取 $g_i \in U \cap H$, 于是唯一存在 $X_i \in U_0$, 使得 $\exp X_i = g_i$. 今 $g_i \in H_\alpha$, 所以 $\exp(\alpha(X_i)) = 1$. 因此 $\exp(\alpha(X_0)) = 1$, 即 $X_0 \in \mathfrak{H}_\alpha$. 所以 $\exp X_0 = g_0 \in H_\alpha$. 这证明了 H_α 为闭子集，所以是闭李子群.

最后求李子群 H_α 的李代数 $\mathfrak{H}_\alpha$. 为此任取 $X \in \mathfrak{H}_\alpha \subset \mathfrak{H}$, 则 $\exp tX \in H_\alpha$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, 因此 $\exp(\alpha(tX)) = \exp(t\alpha(X)) = 1$, $\forall t \in$

$\mathbb{R}$. 这推出 $\alpha(X) = 0$, 所以证明了 $\mathfrak{H}_\alpha \supset \{X \in \mathfrak{H} \mid \alpha(X) = 0\}$. 反之, 任取 $X \in \mathfrak{H}$, 使得 $\alpha(X) = 0$, 于是 $\exp(t\alpha(X)) = 1$, 即 $\exp tX \in H_\alpha$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. 这证明了 $X \in \mathfrak{H}_\alpha$. 至此证明了 $\mathfrak{H}_\alpha = \{X \in \mathfrak{H} \mid \alpha(X) = 0\}$. 引理证完.

上面实际上证明了 Cartan 子群 H 中的非正则元素集为

$$H' = \bigcup_{\alpha\in\Delta} H_\alpha = \{\exp X_0 \mid X_0 \in \mathfrak{H}, \exists\, \alpha \in \Delta, \exp(\alpha(X_0)) = 1\}.$$

但是从 $\exp(\alpha(X_0)) = 1$ 推不出 $\alpha(X_0) = 0$, 只能推出 $\alpha(X_0) = 2k\pi\sqrt{-1}$, 其中 k 为整数. 所以在 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 中取子集

$$\mathfrak{H}' = \{X \in \mathfrak{H} \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ \alpha(X) = 2k\pi\sqrt{-1}\},$$

则有 $\exp \mathfrak{H}' = H'$.

推论 任取 $\alpha \in \Delta$, 则

$$\dim \mathfrak{H}_\alpha = \dim \mathfrak{H} - 1,$$

所以 Cartan 子群 H 中必有正则元素存在.

证 令 $\mathfrak{H}_\alpha = \{X \in \mathfrak{H} \mid \alpha(X) = 0\}$, 其中 α 为确定的线性函数, 所以 $\alpha(X) = 0$ 定义了低一维的超平面. 这证明了 $\dim \mathfrak{H}_\alpha = \dim \mathfrak{H} - 1$, 于是 $\dim H_\alpha = \dim H - 1$. 由于根系 Δ 为有限集, 所以 $\dim \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} H_\alpha = \dim \mathfrak{H} - 1$. 因此 $H \neq \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} H_\alpha$, 即在 Cartan 子群 H 中存在正则元素. 证完.

为了证明 Cartan 子群的共轭性定理, 我们再给出

引理 4.1.18 设 H 为 n 维紧连通李群 G 的 Cartan 子群, H' 为 H 中所有非正则元素构成的集合, 即

$$H' = \bigcup_{\alpha\in\Delta} H_\alpha.$$

记

$$S = \bigcup_{\alpha\in\Delta} (\mathrm{ad}\, g)H',$$

则 S 为一个维数不超过 $n-3$ 的解析流形的解析映像. 于是, 集合 $G - S$ 在李群 G 中连通.

证 取定 $\alpha \in \Delta$. 由于紧李群 G 的闭子群 H_α 的中心化子 $C(H_\alpha)$ 仍为闭李子群，所以商空间 $G/C(H_\alpha)$ 为齐性实解析流形. 另一方面，由于李群 G 及子群 $C(H_\alpha)$ 都紧，且自然映射 $\pi: G \to G/C(H_\alpha)$ 为连续开映射，所以 $G/C(H_\alpha)$ 为紧流形. 作拓扑积

$$M_\alpha = (G/C(H_\alpha)) \times H_\alpha.$$

则它仍为实解析流形.

任取 $g \in G$. 记 $\tilde{g} = gC(H_\alpha) \in G/C(H_\alpha)$, 任取 $t_\alpha \in H_\alpha$, 则 $(\tilde{g}, t_\alpha) \in M_\alpha$. 引进映射 $\psi_\alpha: M_\alpha \to S$ 为

$$\psi_\alpha(\tilde{g}, t_\alpha) \to g t_\alpha g^{-1} = (\operatorname{ad} g) t_\alpha \in (\operatorname{ad} g) H_\alpha \subset S.$$

我们来证 ψ_α 为解析映射.

先证 ψ_α 单值. 事实上，任取 $\tilde{g_1} \in gC(H_\alpha)$, 即 $g^{-1}\tilde{g}_1 \in C(H_\alpha)$, 所以有 $(g^{-1}\tilde{g}_1)t_\alpha = t_\alpha(g^{-1}\tilde{g}_1)$. 这证明了 $\tilde{g}_1 t_\alpha \tilde{g}_1^{-1} = g t_\alpha g^{-1}$. 即 S 中元素 $\psi_\alpha(\tilde{g}, t_\alpha)$ 与 $\tilde{g}$ 的选取无关，只与左旁集 $gC(H_\alpha)$ 有关，即 ψ_α 单值.

再证 ψ_α 解析. 事实上，$C(H_\alpha)$ 为紧李群 G 中的闭子群，所以是紧子群，易证它的李代数为 $C(\mathfrak{H}_\alpha)$. 在 $C(\mathfrak{H}_\alpha)$ 中取基 $X_{r+1}, \cdots, X_n$, 在紧李群中取第三类标准单位标架 (U, φ), 即

$$U = \{(\exp \sum_{i=1}^{r} x_i X_i)(\exp \sum_{i=r+1}^{n} x_i X_i) \mid |x_1| < \varepsilon, \cdots, |x_n| < \varepsilon\},$$

而

$$\varphi((\exp \sum_{i=1}^{r} x_i X_i)(\exp \sum_{i=r+1}^{n} x_i X_i)) = (x_1, \cdots, x_n).$$

由于 $\exp \sum\limits_{i=r+1}^{n} x_i X_i \in C(H_\alpha)$, 所以解析流形 $G/C(H_\alpha)$ 有标架 $(U/C(H_\alpha), \tilde{\varphi})$, 其中

$$U/C(H_\alpha) = \{(\exp \sum_{i=1}^{r} x_i X_i) C(H_\alpha) \mid |x_1| < \varepsilon, \cdots, |x_r| < \varepsilon\},$$

而

$$\widetilde{\varphi}((\exp\sum_{i=1}^{r}x_iX_i)\mathrm{C}(H_\alpha))=(x_1,\cdots,x_r).$$

再在李群 H_α 的李代数 $\mathfrak{h}_\alpha$ 中取基 $Y_1,\cdots,Y_{l-1}$, 其中 $l=\dim\mathfrak{h}$. 在紧李群 H_α 中取第一类标准单位标架 (V,ψ), 即

$$V=\{\exp\sum_{i=1}^{l-1}y_iY_i\mid |y_1|<\varepsilon_2,\cdots,|y_{l-1}|<\varepsilon_2\}.$$

而

$$\psi(\exp\sum_{i=1}^{l-1}y_iY_i)=(y_1,y_2,\cdots,y_{l-1}).$$

令

$$\psi_\alpha((\exp\sum_{i=1}^{r}x_iX_i)\mathrm{C}(H_\alpha),\exp\sum_{j=1}^{l-1}y_iY_j)$$

$$=(\exp\sum_{i=1}^{r}x_iX_i)(\exp\sum_{j=1}^{l-1}y_jY_j)(\exp\sum_{i=1}^{r}x_iX_i)^{-1}.$$

显然它是 $x_1,\cdots,x_r$, $y_1,\cdots,y_{l-1}$ 的解析函数. 这证明了映射 ψ_α 解析.

作并集 $M=\bigcup_{\alpha\in\Delta}M_\alpha$, 由于 $M_\alpha\cap M_\beta=\emptyset$, $\alpha\neq\beta$, 所以它仍为解析流形. 在流形 M 上定义解析映射 ψ, 使得 $\psi|_{M_\alpha}=\psi_\alpha$, $\forall\,\alpha\in\Delta$. 由于

$$\psi_\alpha(M_\alpha)=\bigcup_{g\in G}(\mathrm{ad}\,g)H_\alpha,$$

所以

$$\psi(M)=\bigcup_{\alpha\in\Delta}\psi_\alpha(M_\alpha)=\bigcup_{g\in G}\bigcup_{\alpha\in\Delta}(\mathrm{ad}\,g)H_\alpha=\bigcup_{g\in G}(\mathrm{ad}\,g)H'=S,$$

即 ψ 为解析流形 M 到集合 S 上的解析映射. 这证明了集合 S 为解析流形的解析映像.

下面计算集合 S 的维数的上界.

先来计算 $\dim \mathrm{C}(H_\alpha) = \dim \mathrm{C}(\mathfrak{H}_\alpha)$. 令

$$\mathfrak{H}_\alpha = \{X \in \mathfrak{H} \mid \alpha(X) = 0\}.$$

任取 $x \in \mathrm{C}(\mathfrak{H}_\alpha)$, 由于 $\mathfrak{G}^C = \mathfrak{H}^C + \sum\limits_{\beta\in\Delta} \mathfrak{G}_\beta$, 所以 $x = h + \sum\limits_{\beta\in\Delta} x_\beta$, 其中 $h \in \mathfrak{H}^C$, $x_\beta \in \mathfrak{G}_\beta$, $\forall\, \beta \in \Delta$. 由 $[x, \mathfrak{H}_\alpha] = 0$ 可知, 任取 $Y \in \mathfrak{H}_\alpha$, 则 $[x, Y] = 0$, 即

$$0 = [Y, h + \sum_{\beta\in\Delta} x_\beta] = \sum_{\beta\in\Delta} \beta(Y) x_\beta.$$

因此, 当 $x_\beta \neq 0$ 时有 $\beta(Y) = 0$. 所以

$$x = h + \sum_{\beta\in\Delta, \beta(\mathfrak{H}_\alpha)=0} x_\beta,$$

即

$$\mathrm{C}(\mathfrak{H}_\alpha) = \mathfrak{H} + (\sum_{\beta\in\Delta, \beta(\mathfrak{H}_\alpha)=0} \mathfrak{G}_\beta) \cap \mathfrak{G}.$$

因为 $\mathfrak{H}_\alpha$ 的定义给出 $\alpha(\mathfrak{H}_\alpha) = 0$, 这证明了

$$(\sum_{\beta\in\Delta, \beta(\mathfrak{H}_\alpha)=0} \mathfrak{G}_\beta) \cap \mathfrak{G} \supset (\mathfrak{G}_\alpha + \mathfrak{G}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{G}.$$

注意到 $\mathfrak{G}$ 为李代数 $\mathfrak{G}^C$ 的紧实形式, 所以 Δ 实线性生成 $\mathfrak{H}_R \subset \sqrt{-1}\mathfrak{H}$, 因此在 $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]^C = \mathfrak{H}_1^C + \sum\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{G}_\alpha$ 中取 Weyl 基, 则有 $e_\alpha - e_{-\alpha}$, $\sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha}) \in \mathfrak{G}$. 这证明了 $\dim \mathrm{C}(\mathfrak{H}_\alpha) \geq \dim \mathfrak{H} + 2 = l + 2$. 于是

$$\begin{aligned}
\dim S = \dim \psi(M) \leq \dim M &= \max_{\alpha\in\Delta} \dim M_\alpha \\
&= \max_{\alpha\in\Delta} (\dim (G/\mathrm{C}(H_\alpha)) + \dim H_\alpha) \\
&= \max_{\alpha\in\Delta} (\dim \mathfrak{G} - \dim \mathrm{C}(\mathfrak{H}_\alpha) + \dim \mathfrak{H}_\alpha) \\
&\leq n - l - 2 + l - 1 = n - 3.
\end{aligned}$$

至此证明了 $\dim S \le n-3$. 注意到 S 为紧子集，所以整个 n 维流形挖去维数不超过 $n-3$ 的紧子流形，必为连通集. 引理证完.

这里要注意，在李群上构造映射，再求其 Jacobian，将 Jacobian 用李代数中的元素来表示，这是李群理论，特别是它的积分理论中一种重要的技巧.

引理 4.1.19 设 H 为紧连通李群 G 的 Cartan 子群. 拓扑积 $G\times H$ 到 G 内的映射

$$\rho:(g,t)\to(\mathrm{ad}\,g)t,\quad \forall\ g\in G,\ t\in H$$

解析，且 ρ_* 将流形 $G\times H$ 中的点 (g,t) 的切空间

$$T_{(g,t)}(G\times H)=T_g(G)\otimes T_t(H)$$

中的向量 $(X_g,(X_0)_t)$ 映为李群 G 中点 $(\mathrm{ad}\,g)t$ 的切空间 $T_{(\mathrm{ad}\,g)t}(G)$ 中的向量

$$(\mathrm{Ad}\,g)\circ(L_t)_*((\mathrm{Ad}\,t^{-1})X_e-X_e+(X_0)_e),$$

其中 $X\in\mathfrak{G}$ 为李群 G 的李代数，$X_0\in\mathfrak{H}$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数.

证 显然，ρ 为李群 $G\times H$ 到 G 内的解析映射. 由 $\rho(g,t)=(\mathrm{ad}\,g)t$, 所以

$$(L_{t_0}^{-1}\circ(\mathrm{ad}\,g_0)^{-1}\circ\rho)(g_0,t_0)=e.$$

这证明了取定 $g_0\in G$, $t_0\in H$, 则

$$(L_{t_0^{-1}})_*(\mathrm{ad}\,g_0^{-1})_*\rho_*(T_{(g_0,t_0)}(G\times H))=T_e(G).$$

引进解析映射 $\rho_0=L_{t_0^{-1}}\circ(\mathrm{ad}\,g_0^{-1})\circ\rho:G\times H\to G$. 设若

$$(\rho_0)_*(X_{g_0},(X_0)_{t_0})=Y_0\in T_e(G),$$

则

$$\rho_*(X_{g_0},(X_0)_{t_0})=(\mathrm{Ad}\,g_0)\circ(L_{t_0})_*(Y_0).$$

所以我们只要计算 $(\rho_0)_*$ 就行了.

今任取 $g \in G, t \in H$, 则

$$\rho_0(g,t) = L_{t_0^{-1}} \circ \operatorname{ad} g_0^{-1} \circ \rho(g,t) = t_0^{-1}(\operatorname{ad} g_0^{-1})((\operatorname{ad} g)t)$$
$$= t_0^{-1} g_0^{-1} g t g^{-1} g_0.$$

特别地，取 $t = t_0$, $g = g_0 \cdot \exp sX$, $\forall\, s \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{G}$, 则

$$\begin{aligned}\rho_0(g,t) &= t_0^{-1} g_0^{-1} g_0 (\exp sX) t_0 (\exp sX)^{-1} g_0^{-1} g_0 \\ &= t_0^{-1}(\exp sX) t_0 (\exp sX)^{-1} \\ &= ((\operatorname{ad} t_0^{-1})(\exp sX))(\exp sX)^{-1} \\ &= (\exp s(\operatorname{Ad} t_0^{-1})X)(\exp(-sX)) \\ &= \exp(s((\operatorname{Ad} t_0^{-1})X - X) + o(s)).\end{aligned}$$

另一方面，有

$$g = g_0 \cdot \exp sX = (L_{g_0})(\exp sX) = \exp s(L_{g_0})_* X.$$

所以在点 $g = g_0, t = t_0$ 处有

$$(\rho_0)_*(s(L_{g_0})_* X_e, 0) = (s(\operatorname{Ad} t_0^{-1})X_e - X_e) + o(s), \quad |s| < \varepsilon,$$

即有

$$(\rho_0)_*((L_{g_0})_* X_e, 0) = (\operatorname{Ad} t_0^{-1})X_e - X_e.$$

再取 $t = t_0 \cdot \exp sX$, $g = g_0$, $\forall\, s \in \mathbb{R}$, 因此

$$\rho_0(g,t) = t_0^{-1} g_0^{-1} g_0 t_0 (\exp sX) g_0^{-1} g_0 = \exp sX.$$

而

$$t = t_0 \cdot \exp sX = L_{t_0}(\exp sX) = \exp s(L_{t_0})_* X,$$

所以在点 $g = g_0$, $t = t_0$ 处有

$$(\rho_0)_*(0, s(L_{t_0})_* X_e) = sX_e, \quad |s| < \varepsilon,$$

即有

$$(\rho_0)_*(0, (L_{t_0})_* X_e) = X_e.$$

总之，由于李代数 $\mathfrak{G}$ 由左不变向量场构成，所以 $(L_{t_0})_* X_e = X_{t_0}$，$(L_{g_0})_* X_e = X_{g_0}$. 于是对 $G \times H$ 中点 (g_0, t_0) 的切空间 $(T_{g_0}(G), T_{t_0}(H))$ 中任取的元素 $(X_{g_0}, (X_0)_{t_0})$，则

$$
\begin{aligned}
(\rho_0)_*(X_{g_0}, (X_0)_{t_0}) &= (\rho_0)_*(X_{g_0}, 0) + (\rho_0)_*(0, (X_0)_{t_0}) \\
&= (\rho_0)_*((L_{g_0})_* X_e, 0) + (\rho_0)_*(0, (L_{t_0})_*(X_0)_e) \\
&= (\operatorname{Ad} t_0^{-1}) X_e - X_e + (X_0)_e.
\end{aligned}
$$

然而 $\rho_0 = L_{t_0^{-1}} \circ \operatorname{ad} g_0^{-1} \circ \rho$，所以

$$
\rho_*(X_{g_0}, (X_0)_{t_0}) = (\operatorname{Ad} g_0)(L_{t_0})_*((\operatorname{Ad} t_0^{-1}) X_e - X_e + (X_0)_e).
$$

至此证明了

$$
\rho_*(T_{(g_0, t_0)}(G \times H)) = (\operatorname{Ad} g_0)(L_{t_0})_*(((\operatorname{Ad} t_0^{-1}) - \operatorname{id}) T_e(G) + T_e(H)).
$$

证完.

引理 4.1.20 符号同引理 4.1.19. 则 $t_0 \in H$ 为 Cartan 子群 H 中的正则元素，当且仅当映射 ρ_* 在切空间 $T_{(g, t_0)}(G \times H)$ 上满秩，$\forall\, g \in G$.

证 由引理 4.1.19 可知，问题化为证明 $t_0 \in H$ 为 Cartan 子群 H 中的正则元素，当且仅当

$$
(\operatorname{Ad} t_0^{-1} - \operatorname{id}) \mathfrak{G}_e(G) + T_e(H) = T_e(G).
$$

今 $t_0 \in H$，由于 $(\mathfrak{H}, \exp)$ 为 Cartan 子群 H 的通用覆盖群，所以存在 $X_0 \in \mathfrak{H}$，使得 $t_0 = \exp X_0$，其中 $\mathfrak{H}$ 为 Cartan 子群 H 的李代数，因此

$$
\operatorname{Ad} t_0^{-1} = \operatorname{Ad} (\exp X_0)^{-1} = \operatorname{Ad} (\exp(-X_0)) = \exp(-\operatorname{ad} X_0).
$$

我们知道，由于左不变向量场由它在单位元素 e 的值唯一决定，所以我们在 $T_e(G)$ 中引进换位运算

$$
[X_e, Y_e] = [X, Y]_e, \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{G},
$$

则 $T_e(G)$ 是和李代数 $\mathfrak{G}$ 同构的李代数. 在这个意义下, 我们知道 $\mathrm{Ad}\,t_0^{-1}$ 给出 $T_e(G)$ 作为李代数的自同构. 所以, 问题化为证明

$$(\mathrm{Ad}\,t_0^{-1}-\mathrm{id})\mathfrak{G}+\mathfrak{H}=\mathfrak{G}.$$

考虑 $\mathfrak{G}$ 的复化 $\mathfrak{G}^C$, 则 $\mathfrak{G}^C$ 关于 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}^C$ 有根子空间分解

$$\mathfrak{G}^C=\mathfrak{H}^C+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{G}_\alpha.$$

任取 $x\in\mathfrak{G}^C$, 则

$$x=h+\sum_{\alpha\in\Delta}x_\alpha,\quad h\in\mathfrak{H}^C,\, x_\alpha\in\mathfrak{G}_\alpha,\,\forall\,\alpha\in\Delta.$$

而

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}\,t_0^{-1})x&=(\exp(\mathrm{ad}\,(-X_0)))(h+\sum_{\alpha\in\Delta}x_\alpha)\\&=h+\sum_{\alpha\in\Delta}\exp(-\alpha(X_0))(x_\alpha),\end{aligned}$$

因此

$$(\mathrm{Ad}\,t_0^{-1}-\mathrm{id})x=\sum_{\alpha\in\Delta}(\exp(-\alpha(X_0))-1)x_\alpha.$$

由于 t_0 为正则元素, 即任取 $\alpha\in\Delta$, 有 $\alpha(X_0)\neq 0$, 因此

$$\exp(-\alpha(X_0))-1\neq 0,\ \forall\,\alpha\in\Delta.$$

由 $\dim\mathfrak{G}_\alpha=1,\ \forall\,\alpha\in\Delta$, 所以当 x 遍历李代数 $\mathfrak{G}$ 中的元素时, 有

$$(\mathrm{Ad}\,t_0^{-1}-\mathrm{id})\mathfrak{G}^C=\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{G}_\alpha.$$

因此 $(\mathrm{Ad}\,t_0^{-1}-\mathrm{id})\mathfrak{G}^C+\mathfrak{H}^C=\mathfrak{G}^C$. 但是 $\mathrm{Ad}\,t_0^{-1}-\mathrm{id}$ 为实线性变换, 这证明了 $(\mathrm{Ad}\,t_0^{-1}-\mathrm{id})\mathfrak{G}+\mathfrak{H}=\mathfrak{G}$.

反之, 若 $(\mathrm{Ad}\,t_0^{-1}-\mathrm{id})\mathfrak{G}+\mathfrak{H}=\mathfrak{G}$, 则有 $(\mathrm{Ad}\,t_0^{-1}-\mathrm{id})\mathfrak{G}^C+\mathfrak{H}^C=\mathfrak{G}^C$. 然而 $(\mathrm{Ad}\,t_0^{-1}-\mathrm{id})\mathfrak{G}^C\subset\sum\limits_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{G}_\alpha,\ \forall\,t_0\in\mathfrak{H}$, 这证明了

$(\mathrm{Ad}\,t_0^{-1}-\mathrm{id})\mathfrak{G}^C=\sum\limits_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{G}_\alpha$. 由于 $(\mathrm{Ad}\,t_0^{-1}-\mathrm{id})\mathfrak{G}_\alpha\subset\mathfrak{G}_\alpha$, 这证明了 $(\mathrm{Ad}\,t_0^{-1}-\mathrm{id})\mathfrak{G}_\alpha=\mathfrak{G}_\alpha$, $\forall\,\alpha\in\Delta$. 所以 $\alpha(X_0)\neq 0$, $\forall\,\alpha\in\Delta$, 即 $t_0=\exp X_0$ 是正则元素. 证完.

现在可以证明 Cartan 子群的共轭性定理了，我们有

定理 4.1.21 在紧连通李群 G 中取定 Cartan 子群 H, 则李群 G 中任一元素 g 的共轭元集和 H 的交非空.

证 已知 Cartan 子群 H 中的所有非正则元素构成集合 $H'=\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta}H_\alpha$, 所有正则元素构成集合 $H''=H-H'$. 作

$$S=\bigcup_{g\in G}(\mathrm{ad}\,g)H',\quad T=\bigcup_{g\in G}(\mathrm{ad}\,g)H''.$$

于是

$$S\cup T=\bigcup_{g\in G}(\mathrm{ad}\,g)(H'\cup H'')=\bigcup_{g\in G}(\mathrm{ad}\,g)H.$$

所以为了证明定理，只要证明 $S\cup T=G$ 就行了.

我们先证 $S\cap T=\emptyset$. 事实上，由正则元素的定义可知它在共轭下仍为正则元素，所以非正则元素也在共轭下仍为非正则元素. 因此， S 由李群 G 中的所有非正则元素构成，而 T 由李群 G 中的所有正则元素构成. 因此 $S\cap T=\emptyset$.

所以，为了证 $S\cup T=G$, 只要证 $T=G-S$ 就行了. 由引理 4.1.19, $G-S$ 为连通集，又显然 $T\subset G-S$, 所以只要证明集合 T 在李群 G 中又开又闭，由 $G-S$ 连通，便证明了 $T=G-S$, 即 $G=S\cup T$.

先证集合 T 在 $G-S$ 中为闭子集. 在集合 T 中任取收敛子序列 $\{t_i\}$, 记极限为 $t_0\in G-S$. 今 $t_i\in T=\bigcup\limits_{g\in G}(\mathrm{ad}\,g)H''$, 所以存在 $g_i\in G$, $h_i\in H''$, 使得 $t_i=(\mathrm{ad}\,g_i)h_i$. 由于 G 为紧李群，所以在无限序列 $\{g_i\}$ 中必有收敛子序列. 无妨设 $\{g_i\}$ 收敛. 记极限为 $g_0\in G$. 同理，由于 Cartan 子群 H 紧，所以无限序列 $\{h_i\}$ 中必有收敛子序列，因此无妨设 $\{h_i\}$ 收敛，记极限为 $h_0\in H$. 由 $g_i\to g_0$, $h_i\to h_0$, 所以 $t_i=(\mathrm{ad}\,g_i)h_i\to(\mathrm{ad}\,g_0)h_0=t_0$. 注意到

$t_0 \in G - S$, 即 $t_0 \notin S$, 于是 $(\operatorname{ad} g_0)h_0 \notin S$. 由于 $(\operatorname{ad} g_0^{-1})S = S$, 所以 $h_0 \notin S$. 今

$$S \cap H = H', \quad T \cap H = H'', \quad H = H' \cup H''.$$

这证明了 $h_0 \in H''$, 即 $h_0 \in T$. 所以 $t_0 = (\operatorname{ad} g_0)h_0 \in T$, 即 T 为 $G - S$ 中的闭子集.

再证 T 为 $G - S$ 中的开子集. 任取 $t_0 \in T$, 由定义可知, 存在 $g_0 \in G, h_0 \in H''$, 使得 $t_0 = (\operatorname{ad} g_0)h_0$. 于是引理 4.1.19 中引进的映射 ρ 有 $\rho(g_0, h_0) = (\operatorname{ad} g_0)h_0 = t_0$. 今 H'' 由 Cartan 子群 H 中的所有正则元素构成, 因此 h_0 为 Cartan 子群 H 中的正则元素. 所以 t_0 为紧李群 G 中的正则元素. 由引理 4.1.20 可知, ρ_* 在点 (g_0, h_0) 处为满秩映射, 即解析映射 ρ 的 Jacobian 是满秩的. 所以在紧李群 G 中存在点 g_0 的标架 (U, φ), 在紧子群 H 中存在点 h_0 的标架 (V, ψ), 在紧李群 G 中存在点 t_0 的标架 (W, ξ), 使得 $W \subset \rho(U \times V)$, 且 ρ 在 $U \times V$ 上解析. 注意到 H'' 为 Cartan 子群 H 中的开子集., 所以无妨取 $V \subset H''$. 因此有

$$W \subset \rho(U \times V) = \bigcup_{g \in U} (\operatorname{ad} g)V \subset \bigcup_{g \in G} (\operatorname{ad} g)H'' = T.$$

这证明了任取 $t_0 \in T$, 则存在紧李群 G 中点 t_0 的邻域 $W \subset T$, 所以 T 为 $G - S$ 中的开子集. 证完.

例 易证 n 阶酉方阵全体构成的普通群 $\mathrm{U}(n)$ 为连通紧李群, 称为酉群. 它有 Cartan 子群

$$\operatorname{diag}(\exp(\sqrt{-1}\theta_1), \cdots, \exp(\sqrt{-1}\theta_n)), \quad 0 \le \theta_1, \cdots, \theta_n < 2\pi.$$

由矩阵论可知, 任意酉方阵可经过酉方阵相似于对角阵, 即酉群 $\mathrm{U}(n)$ 中的任一元素必共轭于 Cartan 子群中的一个元素. 此即定理 4.1.21.

由此可见, 定理 4.1.21 是上述矩阵论定理的推广. 因此对一般的紧连通矩阵李群, 如 $\mathrm{SO}(n), \mathrm{Sp}(n)$ 等, 也都有类似的矩阵论结果 (参见 [43]).

下面给出定理 4.1.21 的推论. 由于重要, 仍写成定理的形式.

定理 4.1.22 紧连通李群的任意两个 Cartan 子群互相共轭. 因此 Cartan 子群的维数相同, 称为此**李群的秩**.

证 由于紧连通李群的极大连通交换子群为 Cartan 子群, 所以设 H 为 Cartan 子群, 则 $(\operatorname{ad} g)H$ 也是 Cartan 子群, $\forall g \in G$. 今任取另外一个 Cartan 子群 H_1, 在 Cartan 子群 H 中任取正则元素 t, 由定理 4.1.21 可知在 Cartan 子群 H_1 中存在元素 t_1 及 $g_1 \in G$, 使得 $(\operatorname{ad} g)t = t_1$. 由 t 为正则元素, 所以 t_1 也是正则元素. 因此 $H = \mathrm{C}(t)^0$ 为元素 t 的中心化子, 而 $H_1 = \mathrm{C}(t_1)^0$. 今由 $(\operatorname{ad} g)t = t_1$, 可知 $(\operatorname{ad} g)\mathrm{C}(t)^0 = \mathrm{C}(t_1)^0$. 这证明了 $(\operatorname{ad} g)H = H_1$, 即 Cartan 子群 H_1 和 H 共轭. 所以紧连通李群中任意两个 Cartan 子群互相共轭. 证完.

定理 4.1.23 紧连通李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 中任意两个 Cartan 子代数互相共轭.

证 设 $\mathfrak{H}_1$ 及 $\mathfrak{H}_2$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 中的任意两个 Cartan 子代数. 由于 $\exp \mathfrak{H}_i$ 生成李群 G 中的 Cartan 子群 H_i, $i = 1, 2$. 由定理 4.1.22 可知存在 $g \in G$, 使得 $(\operatorname{ad} g)H_1 = H_2$. 于是 $(\operatorname{ad} g)(\exp tX) \in H_2$, $\forall X \in \mathfrak{H}_1$, $t \in \mathbb{R}$, 这证明了 $(\operatorname{Ad} g)X \in \mathfrak{H}_2$, $\forall X \in \mathfrak{H}_1$, 即 $(\operatorname{Ad} g)\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_2$. 同理可证 $(\operatorname{Ad} g^{-1})\mathfrak{H}_2 \subset \mathfrak{H}_1$. 所以 $(\operatorname{Ad} g)\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$. 即李代数 $\mathfrak{G}$ 中任意两个 Cartan 子代数互相共轭. 证完.

定理 4.1.24 复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的任意两个 Cartan 子代数互相共轭.

证 设 $\mathfrak{L}$ 为复半单李代数, $\mathfrak{H}_1$ 及 $\mathfrak{H}_2$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Cartan 子代数. 记 Δ_i 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_i$ 的根系, 即有根子空间分解

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H}_1 + \sum_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{L}_\alpha = \mathfrak{H}_2 + \sum_{\alpha \in \Delta_2} \widetilde{\mathfrak{L}}_\alpha.$$

于是有 Weyl 基 $\{e_\alpha \mid \forall\, \alpha \in \Delta_1\}$ 及 $\{\widetilde{e}_\alpha \mid \forall\, \alpha \in \Delta_2\}$. 记 Δ_i 实线性

生成线性空间 $\mathfrak{H}_R^{(i)}$, $i=1,2$. 于是复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 有紧实形式

$$\mathfrak{G}_1=\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R^{(1)}+\sum_{\alpha\in\Delta_1}\mathbb{R}(e_\alpha-e_{-\alpha})+\sum_{\alpha\in\Delta_1}\mathbb{R}\sqrt{-1}(e_\alpha+e_{-\alpha}),$$

$$\mathfrak{G}_2=\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R^{(2)}+\sum_{\alpha\in\Delta_2}\mathbb{R}(\widetilde{e}_\alpha-\widetilde{e}_{-\alpha})+\sum_{\alpha\in\Delta_2}\mathbb{R}\sqrt{-1}(\widetilde{e}_\alpha+\widetilde{e}_{-\alpha}).$$

由于已证复半单李代数的任意两个紧实形式互相共轭，再由定理 4.1.23 可知，紧李代数中任意两个 Cartan 子代数互相共轭，这证明了 Cartan 子代数 $\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R^{(1)}$ 和 $\sqrt{-1}\mathfrak{H}_R^{(2)}$ 互相共轭，所以它们的复化 $\mathfrak{H}_1$ 和 $\mathfrak{H}_2$ 互相共轭. 证完.

下面利用定理 4.1.21 给出 Cartan 子群的其他性质.

定理 4.1.25 在紧连通李群 G 中取定 Cartan 子群 H, 则李群 G 中所有 Cartan 子群的交 $\bigcap\limits_{g\in G}(\mathrm{ad}\,g)H$ 有

$$\mathrm{C}(G)^0\subset\bigcap_{g\in G}(\mathrm{ad}\,g)H\subset\mathrm{C}(G),$$

其中 $\mathrm{C}(G)$ 为李群 G 的中心， $\mathrm{C}(G)^0$ 为 $\mathrm{C}(G)$ 的单位分支.

证 注意到紧李群 G 的中心 $\mathrm{C}(G)$ 中任一元素的共轭元素只有自身，而 Cartan 子群是极大的连通交换子群，所以记中心 $\mathrm{C}(G)$ 的单位分支为 $\mathrm{C}(G)^0$, 则 $\mathrm{C}(G)^0\subset(\mathrm{ad}\,g)H$, $\forall\, g\in G$. 因此

$$\mathrm{C}(G)^0\subset\bigcap_{g\in G}(\mathrm{ad}\,g)H.$$

再任取 $x\in\bigcap\limits_{g\in G}(\mathrm{ad}\,g)H$, 所以任取 $g\in G$, 则 $x\in(\mathrm{ad}\,g)H$. 今 x 和 $(\mathrm{ad}\,g)H$ 中元素可交换，所以和 $\bigcup\limits_{g\in G}(\mathrm{ad}\,g)H=G$ 中元素可交换，即有 $x\in\mathrm{C}(G)$. 证完.

定理 4.1.26 紧连通李群 G 中的元素 t 为正则元素，当且仅当 t 属于一个唯一的 Cartan 子群.

证 设 t 为正则元素，于是元素 t 的中心化子 $\mathrm{C}(t)$ 的单位分支 $\mathrm{C}(t)^0$ 为李群 G 的 Cartan 子群. 今若 t 属于 Cartan 子群 H,

则由 H 中元素和 t 可交换可知 $H \subset \mathrm{C}(t)^0$. 由 H 为极大连通交换子群，所以 $H = \mathrm{C}(t)^0$. 这证明了有且只有一个 Cartan 子群 $\mathrm{C}(t)^0$ 包含元素 t.

反之，若 t 落且只落在一个 Cartan 子群 H 中，我们来证 t 为正则元素. 设若不然，即 t 为非正则元素，于是元素 t 的中心化子 $\mathrm{C}(t)$ 的单位分支 $\mathrm{C}(t)^0$ 不是交换子群，但是它是实连通紧子群，且 $H \subsetneq \mathrm{C}(t)^0$. 显然李群 G 的 Cartan 子群 H 也是李群 $\mathrm{C}(t)^0$ 的 Cartan 子群，因此有 $\mathrm{C}(t)^0 = \bigcup\limits_{g \in \mathrm{C}(t)^0} (\mathrm{ad}\, g)H$. 今 t 属于紧连通李群 $\mathrm{C}(t)^0$ 的中心，所以 t 属于 $\mathrm{C}(t)^0$ 的任一 Cartan 子群，即有 $t \in \bigcap\limits_{g \in \mathrm{C}(t)^0} (\mathrm{ad}\, g)H$. 但由假设，$t$ 只落在一个 Cartan 子群 H 中，这证明了 $(\mathrm{ad}\, g)H = H$, $\forall\ g \in \mathrm{C}(t)^0$. 于是 $\mathrm{C}(t)^0 = \bigcap\limits_{g \in \mathrm{C}(t)^0} (\mathrm{ad}\, g)H = H$. 这和假设 t 为非正则元素矛盾. 证完.

定理 4.1.27 设 $\mathfrak{G}$ 为紧连通李群 G 的李代数，则有

$$\exp \mathfrak{G} = G.$$

因此，紧连通李群的任一元素必落在某个单参数子群上.

证 记 H 为紧连通李群 G 的 Cartan 子群，$\mathfrak{H}$ 为李群 H 的李代数. 已知 $\exp \mathfrak{H} = H$, 而

$$G = \bigcup_{g \in G} (\mathrm{ad}\, g)H = \bigcup_{g \in G} (\mathrm{ad}\, g)\exp \mathfrak{H} = \bigcup_{g \in G} \exp\,(\mathrm{Ad}\, g)\mathfrak{H} \subset \exp \mathfrak{G}.$$

显然 $\exp \mathfrak{G} \subset G$, 这证明了定理. 证完.

由引理 2.1.58 及引理 2.1.69, 我们有

定理 4.1.28 设 G 为连通且单连通紧李群，则 G 为中心及连通紧单正规子群的乘积

$$G = \mathrm{C}(G) G_1 G_2 \cdots G_s,$$

其中 $\dim G_i > 1$, $1 \le i \le s$. 且 G_i 和 G_j, $i \ne j$ 中元素互相交换，又 $\mathrm{C}(G) \cap G_i$, $1 \le i \le s$ 和 $G_i \cap G_j$, $1 \le i < j \le s$ 都是零维李子群，即为属于中心 $\mathrm{C}(G)$ 的离散子群. 上述分解不计次序唯一.

证 令李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 有理想直接和分解

$$\mathfrak{G} = \mathrm{C}(\mathfrak{G}) + \mathfrak{G}_1 + \cdots + \mathfrak{G}_s,$$

其中 $\mathrm{C}(\mathfrak{G})$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的中心，$\mathfrak{G}_i$ 为理想. 记 $\exp(\mathfrak{G}_i)$ 生成李群 G 的连通正规子群 G_i. 由李群 G 单连通可知正规子群 G_i 闭，因此也紧. 定理的其他部分显然. 证完.

由定理 4.1.28, 连通且单连通紧李群的分类化为维数大于 1 的紧连通单李群的分类，从而化为紧单李代数的分类，利用复单李代数的分类. 问题化为求紧实形式. 再对紧实形式构造紧连通李群，因此紧连通单李群也有四大类和五个例外李群. 用复单李群的符号，我们有

$$\mathrm{A}_l:\ \mathrm{SU}(l+1),\ \mathrm{B}_l:\ \mathrm{SO}(2l+1,\ \mathbb{R}),\ \mathrm{C}_l:\ \mathrm{Sp}(l),\ \mathrm{D}_l:\ \mathrm{SO}(2l,\mathbb{R}).$$

五个例外紧李群为 $\mathrm{G}_2, \mathrm{F}_4, \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8$.

§ 4.2 紧李群的自同构群

现在来研究紧连通李群 G 的自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$. 已知内自同构群 $\mathrm{ad}\, G \subset \mathrm{Aut}(G)$. 记李群 G 的李代数为 $\mathfrak{G}$,$\mathfrak{G}$ 的自同构群为 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$. 于是 $\mathrm{Ad}\, G \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$.

另一方面，由于连通且单连通李群的李代数的同态可提升为李群的同态，这时考虑李群的自同构群，也就是考虑李代数的自同构群. 至于对一般的连通李群，它不单连通，则利用通用覆盖群及覆盖映射，便可导出它的自同构群.

由于紧李代数决定的连通且单连通李群紧，所以下面只考虑紧李代数的自同构群.

定义 4.2.1 设 $\mathfrak{G}$ 为李群 G 的李代数，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的自同构群，则内自同构群 $\mathrm{Ad}\, G$ 中的元素称为 **内自同构**, 而 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G}) - \mathrm{Ad}\, G$ 中的元素称为李代数 $\mathfrak{G}$ 的 **外自同构**.

引理 4.2.2 设 $\mathfrak{G}$ 为紧连通李群 G 的李代数，则李代数 $\mathfrak{G}$ 的

内自同构群 $\mathrm{Ad}\,G$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$ 的紧连通正规子群.

证 由于 $G \to \mathrm{Ad}\,G$ 为李群 G 到 $\mathrm{Ad}\,G$ 上的李群开同态, 由李群 G 连通且紧可知李群 $\mathrm{Ad}\,G$ 连通且紧. 又由于李群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$ 及 $\mathrm{Ad}\,G$ 的李代数分别为 $\mathrm{Der}\,(\mathfrak{G})$ 及 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{G}$, 其中 $\mathrm{Der}\,(\mathfrak{G})$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的微分代数. 且 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{G}$ 为 $\mathrm{Der}\,(\mathfrak{G})$ 的理想, 所以李群 $\mathrm{Ad}\,G$ 为李群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$ 的正规子群. 证完.

下面给出刻画外自同构的一个引理.

引理 4.2.3 设 $\mathfrak{G}$ 为紧连通李群 G 的李代数. 在李代数 $\mathfrak{G}$ 中取定 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$, 则李群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$ 有闭子群

$$\mathfrak{A} = \{\sigma \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G}) \mid \sigma(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}\},$$

且有乘积分解

$$\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G}) = \mathfrak{A}(\mathrm{Ad}\,G), \quad \mathfrak{A} \cap \mathrm{Ad}\,G = \mathrm{Ad}\,\mathrm{N}(H),$$

其中 $H = \exp\mathfrak{H}$ 为李群 G 的 Cartan 子群, $\mathrm{N}(H)$ 为子群 H 的正规化子. $\mathrm{Ad}\,\mathrm{N}(H)$ 为李群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$ 的紧子群, 也为李群 $\mathfrak{A}$ 的紧正规子群, 且商群

$$\mathfrak{A}/\mathrm{Ad}\,\mathrm{N}(H)$$

和 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})/\mathrm{Ad}\,G$ 同构.

证 任取 $\sigma \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$, 于是 $\sigma(\mathfrak{H})$ 仍为紧李代数 $\mathfrak{G}$ 的极大交换子代数, 且 $\mathrm{N}(\sigma(\mathfrak{H})) = \sigma(\mathfrak{H})$. 所以 $\sigma(\mathfrak{H})$ 仍为 Cartan 子代数. 由 Cartan 子代数的共轭性定理可知, 存在 $g \in G$, 使得 $\sigma(\mathfrak{H}) = (\mathrm{Ad}\,g)(\mathfrak{H})$. 这证明了 $(\mathrm{Ad}\,g)^{-1}\sigma(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$, 所以 $(\mathrm{Ad}\,g)^{-1}\sigma \in \mathfrak{A}$, 即 $\sigma \in (\mathrm{Ad}\,g)\mathfrak{A} \subset (\mathrm{Ad}\,G)\mathfrak{A}$. 由于李群 $\mathrm{Ad}\,G$ 为李群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$ 的正规子群, 且 σ 任取, 所以证明了 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$ 有乘积分解

$$\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G}) = \mathfrak{A}(\mathrm{Ad}\,G).$$

显然, $\mathfrak{A}$ 为李群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$ 的普通子群. 由于线性子空间 $\mathfrak{H}$ 在线性空间 $\mathfrak{G}$ 中闭, 所以 $\mathfrak{A}$ 为李群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$ 的闭子群, 即为闭李子群.

现在来计算 $\mathfrak{A}\cap \mathrm{Ad}\,G$. 显然 $\mathfrak{A}\cap \mathrm{Ad}\,G$ 为普通子群. 由 $\mathfrak{A}$ 及 $\mathrm{Ad}\,G$ 都是李群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$ 的闭子集, 因此 $\mathfrak{A}\cap\mathrm{Ad}\,G$ 为闭普通子群, 所以是闭李子群. 由于 $\mathrm{Ad}\,G$ 为紧李群, 这证明了 $\mathfrak{A}\cap \mathrm{Ad}\,G$ 为 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$ 的紧李子群.

今 $\sigma \in \mathfrak{A}\cap \mathrm{Ad}\,G$, 当且仅当存在 $g\in G$, 使得 $\sigma = \mathrm{Ad}\,g$, 且 $(\mathrm{Ad}\,g)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$. 由于 $(\mathrm{ad}\,g)_* = \mathrm{Ad}\,g$, 所以 $(\mathrm{ad}\,g)H = H$. 这证明了 $\sigma \in \mathfrak{A}\cap \mathrm{Ad}\,G$, 当且仅当存在 $g\in \mathrm{N}(H)$, 使得 $\sigma = \mathrm{Ad}\,g$. 这证明了 $\mathfrak{A}\cap \mathrm{Ad}\,G = \mathrm{Ad}\,\mathrm{N}(H)$.

由于 $\mathrm{Ad}\,G$ 为李群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$ 的紧连通正规子群, 于是有商李群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})/\mathrm{Ad}\,(G)$ 及自然映射 $\pi:\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})\to \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})/\mathrm{Ad}\,G$, 它是李群的开同态. 由于已经证明了 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G}) = \mathfrak{A}(\mathrm{Ad}\,G)$, 所以左旁集 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})/\mathrm{Ad}\,G$ 的每个元素可取代表元素属于 $\mathfrak{A}$, 即有

$$\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})/\mathrm{Ad}\,G = \mathfrak{A}/\mathrm{Ad}\,(G),$$

于是

$$\pi:\mathfrak{A}\to \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})/\mathrm{Ad}\,G$$

为李群的到上的开同态 (这里用到子群 $\mathfrak{A}$ 为李群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$ 的闭子集, 所以流形的拓扑为诱导拓扑), 于是可用同态基本定理. 为此, 我们计算开同态 π 的核. 今

$$\{\sigma\in\mathfrak{A}\mid \sigma\mathrm{Ad}\,G = e(\mathrm{Ad}\,G)\} = \mathfrak{A}\cap\mathrm{Ad}\,G = \mathrm{Ad}\,\mathrm{N}(H).$$

所以李群 $\mathrm{Ad}\,\mathrm{N}(H)$ 为李群 $\mathfrak{A}$ 的紧正规子群, 且 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})/\mathrm{Ad}\,(G)$ 和李群 $\mathfrak{A}/(\mathfrak{A}\cap\mathrm{Ad}\,G)$ 同构. 引理证完.

由引理可知, 弄清楚外自同构, 即弄清楚李群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})/\mathrm{Ad}\,(G)$, 问题化为弄清楚李群 $\mathfrak{A}/(\mathfrak{A}\cap\mathrm{Ad}\,G) = \mathfrak{A}/\mathrm{Ad}\,\mathrm{N}(H)$. 为此, 我们需要详细刻画紧李群 $\mathfrak{A}$.

引理 4.2.4 设 $\mathfrak{G}$ 为紧连通李群 G 的李代数, $\mathfrak{H}$ 为紧李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数, 则 $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}\cap[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ 为紧半单李代数 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ 的 Cartan 子代数, 又有空间直接和分解

$$\mathfrak{H} = \mathrm{C}(\mathfrak{G}) + \mathfrak{H}_1.$$

记 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]^C = \mathfrak{H}_1^C + \sum\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{G}_\alpha$ 为复半单李代数 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]^C$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_1^C$ 的根子空间分解，Δ 为根系，$\{e_\alpha \mid \forall\, \alpha\in\Delta\}$ 为 Weyl 基，则 $\sigma\in\mathfrak{A}$ 当且仅当 σ 限制在 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_1$ 上为实正交变换，使得

$$\sigma^*(\Delta)=\Delta,$$

且存在 $\theta_\alpha\in[0,2\pi]$, $\forall\, \alpha\in\Delta$, 适合

$$\theta_{-\alpha}=-\theta_\alpha,\quad \theta_{\alpha+\beta}\equiv\theta_\alpha+\theta_\beta,\ (\mathrm{mod}\ \pi).$$
$$N_{\sigma^*(\alpha),\sigma^*(\beta)}=N_{\alpha\beta}\exp\left(\sqrt{-1}(\theta_{\alpha+\beta}-\theta_\alpha-\theta_\beta)\right),\ \forall\,\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta,$$

又

$$\sigma(e_\alpha)=\exp\left(\sqrt{-1}\theta_\alpha\right)e_{\sigma^*(\alpha)},\quad \forall\ \alpha\in\Delta,$$

其中 $[e_\alpha,e_\beta]=N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}$, $\forall\ \alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta$.

证 　今 $\mathfrak{G}$ 为紧李代数，所以 $\mathrm{C}(\mathfrak{G})\subset\mathfrak{H}$. 由于 $\mathfrak{G}$ 有理想直接和分解 $\mathfrak{G}=\mathrm{C}(\mathfrak{G})+[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$, 于是,

$$\mathfrak{H}=\mathrm{C}(\mathfrak{G})+\mathfrak{H}_1,\quad \mathfrak{H}_1=[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]\cap\mathfrak{H}.$$

今 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ 紧半单. 若 $\mathfrak{H}_1$ 不是 Cartan 子代数，记 $\mathfrak{H}_2$ 为 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ 的包含 $\mathfrak{H}_1$ 的 Cartan 子代数，所以 $\mathfrak{H}+\mathfrak{H}_2\supsetneqq\mathfrak{H}$, 且 $\mathfrak{H}+\mathfrak{H}_2$ 为紧李代数 $\mathfrak{G}$ 中的极大交换子代数. 这导出矛盾. 所以证明了 $\mathfrak{H}_1$ 为紧半单李代数 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ 的 Cartan 子代数.

由于 $\sigma(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$ 以及

$$\sigma(\mathrm{C}(\mathfrak{G}))=\mathrm{C}(\mathfrak{G}),\quad \sigma([\mathfrak{G},\mathfrak{G}])\subset[\sigma(\mathfrak{G}),\sigma(\mathfrak{G})]=[\mathfrak{G},\mathfrak{G}].$$

这证明了 $\sigma(\mathfrak{H}_1)=\mathfrak{H}_1$.

今 Δ 为复半单李代数 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]^C$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_1^C$ 的根系，有根子空间分解

$$[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]^C=\mathfrak{H}_1^C+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{G}_\alpha,$$

及 Weyl 基 $\{e_\alpha \mid \forall\ \alpha \in \Delta\}$. 于是有

$$
\begin{aligned}
&[h, e_\alpha] = B(h_\alpha, h)e_\alpha, \quad \forall\ \alpha \in \Delta,\ h \in \mathfrak{H}_1^C,\\
&[e_\alpha, e_{-\alpha}] = B(e_\alpha, e_{-\alpha})h_\alpha = h_\alpha, \quad \forall\ \alpha \in \Delta,\\
&[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}, \quad \forall\ \alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta,\\
&[e_\alpha, e_\beta] = 0, \quad \forall\ \alpha, \beta \in \Delta, \quad \alpha+\beta \neq 0,\ \alpha+\beta \notin \Delta,
\end{aligned}
$$

其中 $N_{\alpha\beta}$ 为有理数.

另一方面, $B(x,y)$ 为复半单李代数 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]^C$ 的 Killing 型, 且在 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ 上为实半单李代数 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ 的 Killing 型, 且 $-B(x,y) = (x,y)$ 为紧半单李代数 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ 的内积, 所以 σ 为 $\mathfrak{H}_1$ 上的正交变换. 再由 $\sigma(\mathfrak{H}_1) = \mathfrak{H}_1$ 有 $\sigma^*(\Delta) = \Delta$, 且可知

$$\sigma(e_\alpha) = \lambda_\alpha e_{\sigma^*(\alpha)}, \quad \forall\ \alpha \in \Delta,$$

于是

$$[\sigma(h), \sigma(e_\alpha)] = B(h, h_\alpha)\sigma(e_\alpha),$$

即

$$[\sigma(h), e_{\sigma^*(\alpha)}] = B(h, h_\alpha)e_{\sigma^*(\alpha)} = B(\sigma(h), h_{\sigma^*(\alpha)})e_{\sigma^*(\alpha)}.$$

这证明了

$$B(h, h_\alpha) = B(\sigma(h), h_{\sigma^*(\alpha)}) = B(h, \sigma^{-1}(h_{\sigma^*(\alpha)})),\ \forall\ h \in \mathfrak{H}^C.$$

所以有

$$\sigma(h_\alpha) = h_{\sigma^*(\alpha)}, \quad \forall\ \alpha \in \Delta.$$

又 $\sigma(e_{-\alpha}) = \lambda_{-\alpha}e_{\sigma^*(-\alpha)} = \lambda_{-\alpha}e_{-\sigma^*(\alpha)}$, 而

$$[\sigma(e_\alpha), \sigma(e_{-\alpha})] = \sigma(h_\alpha),$$

即有

$$\lambda_\alpha\lambda_{-\alpha}[e_{\sigma^*(\alpha)}, e_{-\sigma^*(\alpha)}] = h_{\sigma^*(\alpha)} = [e_{\sigma^*(\alpha)}, e_{-\sigma^*(\alpha)}].$$

这证明了

$$\lambda_\alpha\lambda_{-\alpha} = 1.$$

再当 $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta$ 时，有 $\sigma^*(\alpha),\sigma^*(\beta),\sigma^*(\alpha+\beta)\in\Delta$. 而

$$[\sigma(e_\alpha),\sigma(e_\beta)]=N_{\alpha\beta}\sigma(e_{\alpha+\beta}),$$

即 $\lambda_\alpha\lambda_\beta[e_{\sigma^*(\alpha)},e_{\sigma^*(\beta)}]=N_{\alpha\beta}\lambda_{\alpha+\beta}e_{\sigma^*(\alpha+\beta)}$. 这证明了

$$N_{\sigma^*(\alpha),\sigma^*(\beta)}=\lambda_\alpha^{-1}\lambda_\beta^{-1}\lambda_{\alpha+\beta}N_{\alpha\beta}.$$

记复半单李代数 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]^C$ 的紧实形式 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ 决定的半对合为 τ. 由于 σ 为实李代数 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ 的自同构，所以有 $\sigma\tau=\tau\sigma$. 注意到由根系 Δ 生成的实线性空间 $\mathfrak{H}_R=\sqrt{-1}\mathfrak{H}_1$，即有 $\tau^*(\alpha)=-\alpha,\tau(e_\alpha)=-e_{-\alpha}$. 所以

$$\begin{aligned}\sigma\tau(e_\alpha)&=-\sigma(e_{-\alpha})=-\lambda_{-\alpha}e_{-\sigma^*(\alpha)},\\ \tau\sigma(e_\alpha)&=\tau(\lambda_\alpha e_{\sigma^*(\alpha)})=-\overline{\lambda}_\alpha e_{-\sigma^*(\alpha)}.\end{aligned}$$

这证明了 $\overline{\lambda}_\alpha=\lambda_{-\alpha}$，即有 $|\lambda_\alpha|=1$. 所以 $\lambda_\alpha=\exp(\sqrt{-1}\theta_\alpha$, $0\leq\theta_\alpha<2\pi$, $\forall\ \alpha\in\Delta$. $\lambda_{-\alpha}=\exp(\sqrt{-1}\theta_{-\alpha})=\overline{\lambda}_\alpha=\exp(-\sqrt{-1}\theta_\alpha)$，即有

$$\theta_{-\alpha}=-\theta_\alpha,\quad\forall\ \alpha\in\Delta.$$

又

$$\exp(\sqrt{-1}\theta_\alpha)\exp(\sqrt{-1}\theta_\beta)N_{\sigma^*(\alpha),\sigma^*(\beta)}=\exp(\sqrt{-1}\theta_{\alpha+\beta})N_{\alpha\beta}.$$

由于 $N_{\alpha\beta}$, $N_{\sigma^*(\alpha),\sigma^*(\beta)}$ 为有理数，所以 $\theta_{\alpha+\beta}\equiv\theta_\alpha+\theta_\beta$, $(\mathrm{mod}\ \pi)$.

反之，若 $\sigma(\mathfrak{H}_1)=\mathfrak{H}_1$，有

$$\begin{aligned}&\sigma^*(\Delta)=\Delta,\quad\sigma(e_\alpha)=\exp(\sqrt{-1}\theta_\alpha)e_{\sigma^*(\sigma)},\\ &\theta_{-\alpha}=-\theta_\alpha,\quad\theta_\alpha+\theta_\beta\equiv\theta_{\alpha+\beta},\ (\mathrm{mod}\ \pi),\\ &N_{\sigma^*(\sigma),\sigma^*(\beta)}=\exp(\sqrt{-1}(\theta_{\alpha+\beta}-\theta_\alpha-\theta_\beta))N_{\alpha\beta},\ \forall\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta.\end{aligned}$$

显然 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$, $\sigma(\mathfrak{H}_1)=\mathfrak{H}_1$，所以 $\sigma\in\mathfrak{A}$. 证完.

进一步刻画李子群 $\mathfrak{A}$，我们要考虑子集

$$\mathfrak{A}_0=\{\sigma\in\mathfrak{A}\mid\sigma|_{\mathfrak{H}}=\mathrm{id}\}.$$

显然 $\mathfrak{A}_0$ 为紧李子群 $\mathfrak{A}$ 中的闭普通子群，所以是紧李子群. 我们有

引理 4.2.5 $\mathfrak{A}_0$ 为紧李群 $\mathfrak{A}$ 的紧正规子群，且

$$\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Ad}\, H.$$

证 今任取 $\sigma \in \mathfrak{A}$, 即有 $\sigma \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$, $\sigma(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$. 任取 $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_0$, 即 $\sigma_0 \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$, $\sigma_0|_{\mathfrak{H}} = \mathrm{id}$. 任取 $X \in \mathfrak{H}$, 于是 $\sigma_0\sigma^{-1}(X) = \sigma^{-1}(X)$, 即 $\sigma\sigma_0\sigma^{-1}|_{\mathfrak{H}} = \mathrm{id}$, $\sigma\sigma_0\sigma^{-1} \in \mathfrak{A}$, 这证明了 $\sigma\sigma_0\sigma^{-1} \in \mathfrak{A}_0$. 所以 $\mathfrak{A}_0$ 为李群 $\mathfrak{A}$ 的紧正规子群.

今 H 为紧连通李群 G 的 Cartan 子群，$\mathfrak{H}$ 为其李代数，所以有 $H = \exp\mathfrak{H}$. 任取 $h \in H$, 则存在 $X \in \mathfrak{H}$, 使得 $h = \exp X$. 于是任取 $Y \in \mathfrak{H}$, 由 $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] = 0$, $\mathrm{Ad}\, h = \mathrm{Ad}\,(\exp X) = \exp\,(\mathrm{ad}\, X)$, 有 $(\mathrm{Ad}\, h)Y = Y$. 这证明了 $(\mathrm{Ad}\, H)\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}$, 且 $\mathrm{Ad}\, h|_{\mathfrak{H}} = \mathrm{id}$, $\forall\, h \in \mathfrak{H}$. 即 $\mathrm{Ad}\, H \subset \mathfrak{A}_0$.

反之，任取 $\sigma \in \mathfrak{A}_0$, 即 $\sigma \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$, $\sigma(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$, $\sigma|_{\mathfrak{H}} = \mathrm{id}$. 由引理 4.2.4, 对半单复李代数 $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]^C$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}^C$ 的根子空间分解 $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]^C = \mathfrak{H}_1^C + \sum\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{G}_\alpha$, 有 Weyl 基 $\{e_\alpha \mid \forall\, \alpha \in \Delta\}$, 使得 $\sigma^*(\Delta) = \Delta$. 由 $\sigma|_{\mathfrak{H}} = \mathrm{id}$ 可知 $\sigma^*|_{\mathfrak{H}^*} = \mathrm{id}$, 即有

$$\sigma(e_\alpha) = (\exp\,(\sqrt{-1}\theta_\alpha))e_{\sigma^*(\alpha)} = (\exp\,(\sqrt{-1}\theta_\alpha))e_\alpha.$$

而

$$\begin{aligned}&\theta_{-\alpha} + \theta_\alpha = 0, \quad \forall\, \alpha \in \Delta,\\ &\theta_\alpha + \theta_\beta \equiv \theta_{\alpha+\beta}, \ (\mathrm{mod}\ \pi), \quad \forall\, \alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta.\end{aligned}$$

记 $\lambda_\alpha = \exp\,(\sqrt{-1}\theta_\alpha)$, $\forall\, \alpha \in \Delta$. 在根系 Δ 中任取单根系 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$. 任取 $\alpha \in \Delta^+$, 则有正根序列

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \cdots + \alpha_{i_s} = \alpha.$$

记 $e_{\alpha_i} = e_i$, $\lambda_{\alpha_i} = \lambda_i$, $1 \leq i \leq l$, 于是有

$$\Big[\cdots[[e_{i_1}, e_{i_2}], e_{i_3}], \cdots, e_{i_s}\Big] = \mu_\alpha e_\alpha,$$

其中 μ_α 为非零实常数. 双方作用 σ, 得

$$\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_s}=\lambda_\alpha.$$

令 $\alpha=\sum_{i=1}^{l}m_i\alpha_i$, 其中 $m_1,\cdots,m_l$ 为非负整数, 于是

$$\lambda_\alpha=\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}\cdots\lambda_l^{m_l}=\exp(\sqrt{-1}\sum m_i\theta_i).$$

在实线性空间 $\mathfrak{H}_1$ 上构作线性函数 f, 使得

$$f(\frac{1}{\sqrt{-1}}h_i)=\theta_i,\quad 1\leq i\leq l,$$

其中 $h_i\in\sqrt{-1}\mathfrak{H}_1$ 有 $B(h_i,h)=\alpha_i(h)$, $\forall\ h\in\mathfrak{H}$. 由于实半单李代数 $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ 的 Killing 型 $B(x,y)$ 在 $\mathfrak{H}_1$ 上负定, 所以唯一存在元素 $h_0\in\mathfrak{H}_1$, 使得

$$B(h,h_0)=f(h),\quad \forall\ h\in\mathfrak{H}_1.$$

因此

$$\begin{aligned}\sigma(e_\alpha)&=\lambda_\alpha e_\alpha=(\exp(\sqrt{-1}\sum m_i\theta_i))e_\alpha\\&=(\exp(f(h_\alpha)))e_\alpha=(\exp(B(h_\alpha,h)))e_\alpha.\end{aligned}$$

今 $[h_0,e_\alpha]=B(h_\alpha,h_0)e_\alpha$, 所以 $(\operatorname{ad}h_0)^k e_\alpha=B(h_\alpha,h_0)^k e_\alpha$. 这证明了

$$\begin{aligned}\sigma(e_\alpha)&=\sum\frac{1}{k!}B(h_\alpha,h)^k e_\alpha=\sum\frac{1}{k!}(\operatorname{ad}h_0)^k e_\alpha\\&=(\exp\operatorname{ad}h_0)e_\alpha=(\operatorname{Ad}(\exp h_0))e_\alpha,\quad\forall\ \alpha\in\Delta.\end{aligned}$$

任取 $h'\in\mathfrak{H}^C$, 则由 $\sigma|_{\mathfrak{H}}=\mathrm{id}$, 有

$$\sigma(h')=(\operatorname{Ad}(\exp h_0))h',$$

这证明了 $\sigma=\operatorname{Ad}(\exp h_0)\in\operatorname{Ad}H$. 所以 $\mathfrak{A}_0\subset\operatorname{Ad}H$, 即 $\mathfrak{A}_0=\operatorname{Ad}H$. 引理证完.

今显然

$$\operatorname{Aut}(\mathfrak{G})/\operatorname{Ad}G\cong\mathfrak{A}/(\mathfrak{A}\cap\operatorname{Ad}G)\cong(\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_0)/((\mathfrak{A}\cap\operatorname{Ad}G)/\mathfrak{A}_0).$$

我们有

定义 4.2.6 紧李群 $(\mathfrak{A}\cap \mathrm{Ad}\, G)/\mathfrak{A}_0$ 称为紧连通李群 G 的 **Weyl 群**, 记作 W_G.

Weyl 群在紧连通半单李群的表示论中扮演了重要角色. 下面展开 Weyl 群的讨论, 首先给出 Weyl 群的实现.

引理 4.2.7 记 H 为紧连通半单李群 G 的 Cartan 子群, 则 $\mathrm{N}(H)$ 为李群 G 的紧子群, 它以 H 为紧正规子群, 又 Weyl 群

$$W_G = \mathrm{Ad}\,\mathrm{N}(H)/\mathrm{Ad}\, H.$$

证 由引理 4.2.3, 有 $\mathfrak{A}\cap \mathrm{Ad}\, G = \mathrm{Ad}\,\mathrm{N}(H)$. 由引理 4.2.5, 有 $\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Ad}\, H$. 所以

$$W_G = (\mathfrak{A}\cap \mathrm{Ad}\, G)/\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Ad}\,\mathrm{N}(H)/\mathrm{Ad}\,\mathrm{N}.$$

证完.

引理 4.2.8 紧连通半单李群 G 的 Weyl 群 W_G 为有限群, 且为紧半单李群 G 的 Cartan 子群 H 的李代数 $\mathfrak{H}$ 上的正交群的子群.

证 今 $\mathrm{Ad}\,\mathrm{N}(H)$ 及 $\mathrm{Ad}\, H$ 都紧, 所以 Weyl 群 W_G 为紧群. 再由 $\mathrm{Ad}\,\mathrm{N}(H)$ 和 $\mathrm{Ad}\, H$ 的李代数分别为 $\mathrm{ad}\,\mathrm{N}(\mathfrak{H})$ 和 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$, 由于 $\mathfrak{H}$ 为 Cartan 子代数, 即有 $\mathrm{N}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$, 所以 $\mathrm{ad}\,\mathrm{N}(\mathfrak{H}) = \mathrm{ad}\,\mathfrak{H}$. 因此商群 $W_G = \mathrm{Ad}\,\mathrm{N}(H)/\mathrm{Ad}\, H$ 的李代数为 $\mathrm{ad}\,\mathrm{N}(\mathfrak{H})/\mathrm{ad}\,\mathfrak{H} = 0$. 这证明了 W_G 为零维紧李群, 所以 W_G 为有限群.

另一方面, 任取 $\sigma \in \mathfrak{A}\cap \mathrm{Ad}\, G = \mathrm{Ad}\,\mathrm{N}(H)$, 则 $\sigma \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$, 且 $\sigma(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$. 而 $\sigma \in \mathrm{Ad}\, H$ 当且仅当 $\sigma|_{\mathfrak{H}} = \mathrm{id}$, 因此记 $\tilde{\sigma} = \sigma|_{\mathfrak{H}}$, 于是 $\tilde{\sigma} \in W_G$, $\forall\, \sigma \in \mathfrak{A}\cap \mathrm{Ad}\, G = \mathrm{Ad}\,\mathrm{N}(H)$. 注意到 Killing 型 $B(x, y)$ 在 $\mathfrak{H}$ 上负定, 所以证明了 Weyl 群 W_G 由 Euclid 空间 $\mathfrak{H}$ 上的一批正交变换构成. 证完.

为了给出 Weyl 群的生成元素, 我们引进

定义 4.2.9 记 $\mathfrak{H}$ 为紧半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数, B 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Killing 型. Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 中的元素 X_0 称为**正**

则元素, 如果 $B(h_\alpha, X_0) \neq 0,\ \forall\, \alpha \in \Delta$; 称为 **非正则元素**, 如果存在 $\alpha \in \Delta$, 使得 $B(h_\alpha, X_0) = 0$.

由定义可知， Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 中的所有非正则元素构成集合

$$\bigcup_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha, \quad \mathfrak{H}_\alpha = \{X_0 \in \mathfrak{H} \mid B(X_0, h_\alpha) = 0\}.$$

Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 中的所有正则元素构成集合

$$\mathfrak{H} - \bigcup_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha.$$

定义 4.2.10 紧半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 中的所有正则元素构成的集合的连通分支称为 **Weyl 房**.

引理 4.2.11 设 $\mathfrak{H}$ 为紧半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数，则 $\mathfrak{H}$ 中 Weyl 房为线性空间 $\mathfrak{H}$ 中的以原点为顶点的开凸锥.

证 今任取 $\alpha \in \Delta$, 则

$$\mathfrak{H}_\alpha = \{X_0 \in \mathfrak{H} \mid B(X_0, h_\alpha) = 0\}$$

为线性空间 $\mathfrak{H}$ 中的 $\dim \mathfrak{H} - 1$ 维超平面，且过原点. 所以， $\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha$ 为有限多个过原点的 $\dim \mathfrak{H} - 1$ 维超平面的并集. 这证明了 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha$ 为线性空间 $\mathfrak{H}$ 中的闭子集. 于是 $\mathfrak{H} - \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha$ 为 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 中以原点为顶点的开锥，且其连通分支是以原点为顶点的开凸锥. 证完.

定理 4.2.12 设 $\mathfrak{H}$ 为紧半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数. 记 Δ 为复半单李代数 $\mathfrak{G}^C$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}^C$ 的根系， $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 为根系 Δ 中的单根系. 记 $X_i = \sqrt{-1}h_i \in \mathfrak{H}$, 其中 $h_i = h_{\alpha_i}$, $1 \leq i \leq l$, 则 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 中的子集

$$\Omega_0 = \{h \in \mathfrak{H} \mid B(X_i, h) > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, l\}$$

为一个 Weyl 房.

证 先证 $\Omega_0 \neq \emptyset$. 事实上，由于 Cartan 矩阵 $(B(h_i,h_j)) = (-B(X_i,X_j))$ 正定，所以记 $h = \sum \lambda_i X_i$, 构作线性方程组

$$\sum_{j=1}^{l} B(X_i,X_j)x_j = 1, \quad 1 \leq i \leq l,$$

则有唯一解 $x^{(0)} = (x_1^{(0)},\cdots,x_l^{(0)})$. 记 $h = \sum_{i=1}^{l} x_i^{(0)} X_i \in \mathfrak{H}$, 则 $B(X_i,h) = 1 > 0$, $1 \leq i \leq l$, 即 $h \in \Omega_0$, 这证明了 $\Omega_0 \neq \emptyset$.

显然，Ω_0 是以原点为顶点的开凸锥，而且由于正根为单根的非负整数线性组合，所以任取 $\alpha \in \Delta^+$, 则 $\alpha = \sum m_i\alpha_i$,

$$h_\alpha = \sum m_i h_i = -\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{l} m_i X_i,$$

其中 m_i 为非负整数，$1 \leq i \leq l$. 今任取 $h \in \Omega_0$, 则

$$B(h,h_\alpha) = -\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{l} m_i B(h,X_i) \neq 0, \quad \forall\, \alpha \in \Delta.$$

这证明了 h 为正则元素，即 $\Omega_0 \subset \mathfrak{H} - \bigcup_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha$. 因此，为了证 Ω_0 为 Weyl 房，即为 $\mathfrak{H} - \bigcup_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha$ 的连通分支，我们只要证 Ω_0 为 $\mathfrak{H} - \bigcup_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha$ 中的闭集就够了.

记 $\overline{\Omega}_0$ 为 $\mathfrak{H} - \bigcup_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha$ 中关于集合 Ω_0 的闭包. 由于

$$\begin{aligned}
\Omega_0 &= \{h \in \mathfrak{H} \mid B(X_i,h) > 0, \quad 1 \leq i \leq l\} \\
&= \{h \in \mathfrak{H} \mid B(\sqrt{-1}h_i,h) > 0, \quad 1 \leq i \leq l\} \\
&= \{h \in \mathfrak{H} \mid B(h_i,\sqrt{-1}h) > 0, \quad 1 \leq i \leq l\} \\
&= \{h \in \mathfrak{H} \mid B(h_\alpha,\sqrt{-1}h) > 0, \quad \forall\, \alpha \in \Delta^+\},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\overline{\Omega}_0 &= \{h \in \mathfrak{H} \mid B(h_\alpha,\sqrt{-1}h) \geq 0, \quad \forall\, \alpha \in \Delta^+\} \\
&= \{h \in \mathfrak{H} \mid B(h_\alpha,\sqrt{-1}h) \leq 0, \quad \forall\, \alpha \in \Delta^-\}.
\end{aligned}$$

这证明了

$$\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_0 \cup (\bigcup_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha).$$

由于 $\overline{\Omega}_0$ 为 $\mathfrak{H} - \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha$ 中关于集合 Ω_0 的闭包，即 $\overline{\Omega}_0 \subset \mathfrak{H} - \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha$. 这证明了 $\overline{\Omega}_0 = \Omega_0$. 所以，$\Omega_0$ 为 $\mathfrak{H} - \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha$ 中又开又闭的集合，即为连通分支. 证完.

现在来给出 Weyl 房和单根系间的一一对应关系.

定理 4.2.13 符号同上. 我们有

(1) 取定正则元素 $h_0 \in \mathfrak{H}$. 任取 $X \in \mathfrak{H}_R = \sqrt{-1}\mathfrak{H}$, 在 $\mathfrak{H}_R$ 中引进正方向，使得 $X > 0$, 如果它适合 $B(X, \sqrt{-1}h_0) > 0$. 于是在 $\mathfrak{H}_R$ 中引进了次序，在根系 Δ 中唯一决定了单根系 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$, 使得 $h_0 \in \Omega = \{h \in \mathfrak{H} \mid B(X_i, h) > 0,\ 1 \le i \le l\}$, 其中 $X_i = \sqrt{-1}h_{\alpha_i} = \sqrt{-1}h_i$, $1 \le i \le l$. 用此办法可构造出根系 Δ 中的所有单根系.

(2) 任取 Weyl 房 Ω, 对 Ω 中任一元素 h_0, 由 h_0 按 (1) 的方式决定的单根系都相同. 且不同的 Weyl 房决定了不同的单根系. 即 Weyl 房和单根系之间有按 (1) 给出的自然的一一对应.

证 任取 Weyl 房 Ω 及其中元素 h_0, 由于 h_0 为正则元素，所以 $B(h_\alpha, h_0) \neq 0$, $\forall\, \alpha \in \Delta$. 今 $h_0 \neq 0$, 所以由方程 $B(X, h_0) = 0$ 定义了 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 中一个 $l-1$ 维子空间. 在此子空间中取基 $h_1, \cdots, h_{l-1}$, 则 $\sqrt{-1}h_0, \sqrt{-1}h_1, \cdots, \sqrt{-1}h_{l-1}$ 为实子空间 $\mathfrak{H}_R$ 的一组基. 用这组基引进正方向，因此任取 $X = \sum\limits_{i=0}^{l-1} \lambda_i(\sqrt{-1}h_i) \in \mathfrak{H}_R$, 其中 $\lambda_0, \cdots, \lambda_{l-1} \in \mathbb{R}$, 则当 $\lambda_0 > 0$ 时 $X > 0$. 另一方面，任取 $X \in \mathfrak{H}_R$, 则

$$B(X, \sqrt{-1}h_0) = B(\sum_{i=0}^{l-1} \lambda_i(\sqrt{-1}h_i), \sqrt{-1}h_0) = -B(\lambda_0 h_0, h_0) > 0$$

当且仅当 $\lambda_0 > 0$. 因此，这样决定的正方向给出根系 Δ 中唯一的单根系 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$.

记 $X_i=\sqrt{-1}h_i$, $\alpha_i(h)=B(h_i,h)$, $\forall\, h\in\mathfrak{H}$, $1\le i\le l$. 由 $\alpha_i>0$, $B(h_i,\sqrt{-1}h_0)\ne 0$ 可知 $B(X_i,h_0)>0$. 因此

$$h_0\in\Omega_0=\{h\in\mathfrak{H}\mid B(X_i,h)>0,\quad 1\le i\le l\}.$$

由定理 4.2.12 可知 Ω_0 为 Weyl 房, 今 $\Omega\cap\Omega_0$ 中有元素 h_0, 所以 $\Omega\cap\Omega_0\ne\emptyset$. 但是 Ω 及 Ω_0 都是 $\mathfrak{H}-\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{H}_\alpha$ 中的连通分支, 这证明了 $\Omega=\Omega_0$. 再由 h_0 为 Weyl 房 Ω 中任一元素, 因此推出 $h_0\in\Omega_0$, 其中 Ω_0 由单根系 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 唯一决定. 所以同一 Weyl 房中的元素决定了同一个单根系. 注意到由于我们从 $h_0\in\Omega$ 出发定义正方向, 从而得到 Weyl 房 $\Omega_0=\Omega$. 这也证明了不同的 Weyl 房决定了不同的单根系.

最后, 我们要证明上面的方法给出了所有的单根系. 事实上, 在根系 Δ 中任取单根系 $\Pi'=\{\beta_1,\cdots,\beta_l\}$., 由定理 4.2.12 可知 $\Omega_0'=\{h\in\mathfrak{H}\mid B(h,Y_i)>0,\ 1\le i\le l\}$ 定义了一个 Weyl 房, 其中 $Y_i=\sqrt{-1}h_{\beta_i}=\sqrt{-1}h_i'$, $1\le i\le l$. 由于 $\Omega_0'\ne\emptyset$, 所以任取 $h_0'\in\Omega_0'$, 按 (1) 的办法定义正方向, 且决定了单根系 $\Pi''=\{\delta_1,\cdots,\delta_l\}$. 我们有 $\Pi''=\Pi'$. 事实上, 记 $h_i''=\sqrt{-1}h_{\delta_i}$, $1\le i\le l$, 则有 $B(h_i'',h_0')>0$, $1\le i\le l$. 另一方面, 由 $h_0'\in\Omega_0'$, 有 $B(h_i',h_0')>0$, $1\le i\le l$. 由此可见, $h_i'',\cdots,h_i''$ 关于单根系 $\Pi'=\{\beta_1,\cdots,\beta_l\}$ 为正根, 即有 $h_i''=\sum\limits_{j=1}^{l}m_{ij}h_j'$, $1\le i\le l$, 其中 m_{ij} 为非负整数. 同样, $h_1'',\cdots,h_i''$ 关于单根系 $\Pi''=\{\delta_1,\cdots,\delta_l\}$ 也是正根, 即有 $h_i'=\sum\limits_{j=1}^{l}m_{ij}'h_j''$, $1\le i\le l$, 其中 m_{ij}' 为非负整数. 因此, 易证集合 $\Pi'=\Pi''$, 至此证明了 Weyl 房和单根系之间按照

$$\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}\longleftrightarrow\Omega_0=\{h\in\mathfrak{H}\mid B(h,X_i)>0,\ 1\le i\le l\}$$

建立了一一对应, 其中

$$X_i=\sqrt{-1}h_{\alpha_i}=\sqrt{-1}h_i,\quad B(h_i,h)=\alpha_i(h),\quad \forall\, h\in\mathfrak{H},\ 1\le i\le l.$$

证完.

回到 Weyl 群 W_G, 我们有

引理 4.2.14 任取 $\sigma \in W_G = (\mathfrak{A} \cap \mathrm{Ad}\, G)/\mathrm{Ad}\, H$, σ 作为 $(\mathfrak{A} \cap \mathrm{Ad}\, G)|_{\mathfrak{H}}$ 中的元素，将 Weyl 房映为 Weyl 房.

证 今 $\sigma \in W_G \subset (\mathfrak{A} \cap \mathrm{Ad}\, G)|_{\mathfrak{H}}$, 有 $\sigma(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$, 且 $\sigma^*(\Delta) = \Delta$. 又对 Killing 型 $B(x,y)$, 有 $B(\sigma(x),\sigma(y)) = B(x,y)$, $\forall\, x,y \in \mathfrak{H}$. 今 $\mathfrak{H}_\alpha = \{h \in \mathfrak{H} \mid B(h_\alpha, h) = 0\}$, 于是 $B(\sigma(h_\alpha),\sigma(h)) = 0$, 即 $B(h_{\sigma^*(\alpha)},\sigma(h)) = 0$. 由于 σ 为线性空间 $\mathfrak{H}$ 上的线性自同构，所以有 $\sigma(\mathfrak{H}_\alpha) = \mathfrak{H}_{\sigma^*(\alpha)}$. 这证明了 $\sigma(\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha$. 所以

$$\sigma(\mathfrak{H} - \bigcup_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha) = \mathfrak{H} - \bigcup_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha.$$

自然 σ 将集合 $\mathfrak{H} - \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{H}_\alpha$ 的连通分支映为连通分支，即 σ 将 Weyl 房映为 Weyl 房. 证完.

符号同上，今实线性空间 $\mathfrak{H}$ 有内积 $-B(x,y)$. 而 $h_\alpha \in \mathfrak{H}_R$, 所以由 $\mathfrak{H}_R = \sqrt{-1}\mathfrak{H}$ 可知 $\sqrt{-1}h_\alpha \in \mathfrak{H}$, $\forall\, \alpha \in \Delta$. 以 $\sqrt{-1}h_\alpha$ 为法向量的超平面，若过原点，则必为

$$\mathfrak{H}_\alpha = \{h \in \mathfrak{H} \mid -B(h_\alpha, h) = 0\}.$$

在线性空间 $\mathfrak{H}$ 中任取一向量 X, 则向量 X 关于超平面 $\mathfrak{H}_\alpha$ 的反射为

$$Y = X - \frac{2B(h_\alpha, X)}{B(h_\alpha, h_\alpha)} h_\alpha.$$

于是线性空间 $\mathfrak{H}$ 中关于超平面 $\mathfrak{H}_\alpha$ 的**反射** w_α 为

$$w_\alpha(X) = X - \frac{2B(h_\alpha, X)}{B(h_\alpha, h_\alpha)} h_\alpha, \quad \forall\, \alpha \in \Delta.$$

引理 4.2.15 符号同上. Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 中关于超平面 $\mathfrak{H}_\alpha$ 的反射 w_α 有性质:

(1) $-B(w_\alpha(X), w_\alpha(Y)) = -B(X,Y)$, $\forall\ X,Y \in \mathfrak{H}$, 即映射 w_α 为正交变换，所以是**旋转**;

(2) $w_\alpha^2 = \mathrm{id}$;

(3) w_α 的不动点集为线性空间 $\mathfrak{H}$ 中的超平面 $\mathfrak{H}_\alpha$;

(4) $w_\alpha^*(\alpha) = -\alpha$;

(5) $w_\alpha^*(\Delta) = \Delta$.

证 由反射 w_α 的定义可知 (1)—(4) 成立. 下面只证 (5) 成立. 任取 $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \neq \pm\beta$, 作根链

$$\beta - p\alpha, \cdots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \cdots, \beta + q\alpha \in \Delta \cup \{0\},$$

其中 $\beta - (p+1)\alpha, \beta + (q+1)\alpha \notin \Delta \cup \{0\}$. 于是有

$$\frac{2B(h_\alpha, h_\beta)}{B(h_\alpha, h_\alpha)} = p - q,$$

所以

$$w_\alpha(h_\beta) = h_\beta - \frac{2B(h_\beta, h_\alpha)}{B(h_\alpha, h_\alpha)} h_\alpha = h_\beta - (p-q)h_\alpha = h_{\beta+(q-p)\alpha}.$$

而 $-p \leq q-p \leq q$, 所以 $\beta+(q-p)\alpha \in \Delta\cup\{0\}$. 设若 $\beta+(q-p)\alpha = 0$, 即 $\beta = (p-q)\alpha$, 这推出 $p - q = 1$ 或 $p - q = -1$. 但是 $\beta \neq \pm\alpha$, 这导出矛盾. 因此 $\beta + (q-p)\alpha \in \Delta$, 即证明了 $w_\alpha^*(\beta) \in \Delta$, $\forall\, \beta \in \Delta, \beta \neq \pm\alpha$. 而已知 $w_\alpha(h_\alpha) = h_{-\alpha}$, $w_\alpha(h_{-\alpha}) = h_\alpha$, 即 $w_\alpha^*(\pm\alpha) = \mp\alpha$. 总之, 有 $w_\alpha^*(\Delta) \subset \Delta$. 由 w 的一一性及根系为有限集, 可证 $w_\alpha^*(\Delta) = \Delta$. 证完.

引理 4.2.16 符号同上. Weyl 群 W_G 中的元素 w 将单根系映为单根系.

证 给定单根系 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$. 于是根系 Δ 中的元素可表示为 $\beta = \sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_i$, 其中 $m_1, \cdots, m_l$ 同时为非负整数或同时为非正整数. 今任取 $\sigma \in W_G$, 则由引理 4.2.15 可知 $w^*(\Delta) = \Delta$. 由于 w 为

非异线性变换，于是 $w^*(\alpha_1),\cdots,w^*(\alpha_l)\in\Delta$ 仍为 l 维实线性空间 $\mathfrak{H}_R$ 的一组基，而且

$$w^*(\alpha)=\sum_{i=1}^{l}m_iw^*(\alpha_i).$$

用 $\mathfrak{H}_R$ 中基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 确定的正方向所决定的单根系为

$$\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}.$$

用 $\mathfrak{H}_R$ 中基 $w^*(\alpha_1),\cdots,w^*(\alpha_l)$ 确定的正方向所决定的单根系为

$$\Pi'=\{w^*(\alpha_1),\cdots,w^*(\alpha_l)\}.$$

这证明了引理．证完．

现在给出 Weyl 群的生成元素集如下：

定理 4.2.17 符号同上． Weyl 群 W_G 有性质：

(1) Weyl 群 W_G 是由反射集 $\{w_\alpha\mid\forall\,\alpha\in\Delta\}$ 生成的有限群；

(2) Weyl 群 W_G 在根系 Δ 中所有不同单根系构成的集合上单可递；

(3) Weyl 群 W_G 在所有 Weyl 房构成的集合上单可递．

证 证明较长． (1) 记反射集 $\{w_\alpha\mid\forall\,\alpha\in\Delta\}$ 生成的群为 W'_G，我们来证 $W'_G\subset W_G$; (2) 再取定单根系 Π_0，我们来证 $\{w^*(\Pi_0)\mid\forall\,w\in W_G\}$ 为两两不同的单根系； (3) 再证明 $\{w(\Omega_0)\mid\forall\,w\in W'_G\}$ 遍历所有 Weyl 房，其中 Ω_0 是由单根系 Π_0 决定的 Weyl 房．于是证明了 $\{w^*(\Pi_0)\mid\forall\,w\in W'_G\}$ 遍历所有根系 Δ 中的不同单根系，且 Δ 中的不同单根系的总数为 Weyl 群 W_G 的阶； (4) 最后，证明 $W'_G=W_G$.

(1) 现在先证 $w_\alpha\in W_G$．事实上，任取 $\alpha\in\Delta$，则 $B(h_\alpha,h_\alpha)>0$．任取实数 λ，记

$$X_\alpha=\lambda(e_\alpha-e_{-\alpha})\in\mathfrak{G},$$

及

$$g_\alpha = \exp X_\alpha \in G.$$

今任取 $h \in \mathfrak{H}$, 则

$$(\mathrm{Ad}\, g_\alpha)h = (\mathrm{Ad}\,(\exp X_\alpha))h = (\exp(\mathrm{ad}\, X_\alpha))h = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}\, X_\alpha)^k h.$$

用归纳法可以证明

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ad}\, X_\alpha)^{2k-1}h &= \lambda^{2k-1}(\mathrm{ad}\,(e_\alpha - e_{-\alpha}))^{2k-1}h \\
&= (-1)^k \lambda^{2k-1} 2^{k-1} B(h_\alpha, h) B(h_\alpha, h_\alpha)^{k-1}(e_\alpha + e_{-\alpha}), \\
(\mathrm{ad}\, X_\alpha)^{2k}h &= \lambda^{2k}(\mathrm{ad}\,(e_\alpha - e_{-\alpha}))^{2k}h \\
&= (-1)^k \lambda^{2k} 2^k B(h_\alpha, h) B(h_\alpha, h_\alpha)^{k-1} h_\alpha, \ k = 1, 2, \cdots,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Ad}\, g_\alpha)h = h &+ \frac{B(h_\alpha, h)}{B(h_\alpha, h_\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{2k} 2^k B(h_\alpha, h_\alpha)^k}{(2k)!} h_\alpha \\
&+ \frac{B(h_\alpha, h)}{B(h_\alpha, h_\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{2k-1} 2^{k-1} B(h_\alpha, h_\alpha)^k}{(2k-1)!}(e_\alpha + e_{-\alpha}).
\end{aligned}$$

取

$$\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{(2B(h_\alpha, h_\alpha))}},$$

则有

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Ad}\, g_\alpha)h = h &+ \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k)!} - 1\Big) \frac{B(h_\alpha, h)}{B(h_\alpha, h_\alpha)} h_\alpha \\
&+ \frac{B(h_\alpha, h)}{\sqrt{2B(h_\alpha, h_\alpha)}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k-1}}{(2k-1)!}\Big)(e_\alpha + e_{-\alpha}).
\end{aligned}$$

然而

$$\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{-1}\pi)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k)!} + \sqrt{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \pi^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

所以

$$-1=\cos\pi=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\pi^{2k}}{(2k)!},\quad 0=\sin\pi=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\pi^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

即有

$$(\mathrm{Ad}\,g_\alpha)h=h-\frac{2B(h_\alpha,h)}{B(h_\alpha,h_\alpha)}h_\alpha,\quad \forall\ h\in\mathfrak{H}.$$

注意 $h_\alpha\in\mathfrak{H}_R=\sqrt{-1}\mathfrak{H}$, 至此证明了在线性空间 $\mathfrak{H}$ 上 $\mathrm{Ad}\,g_\alpha=w_\alpha$, $\forall\ \alpha\in\Delta$. 所以 $w_\alpha\in W_G$, $\forall\ \alpha\in\Delta$. 记反射集 $\{w_\alpha\mid\forall\ \alpha\in\Delta\}$ 生成 Weyl 群 W_G 的子群为 W_G'.

(2) 在根系 Δ 中取定单根系 Π_0, 我们来证 $w(\Pi_0)$ 仍为根系 Δ 中的单根系, $\forall\ w\in W_G$. 且对 Weyl 群 W_G 中的不同元素 w',w'', $w'(\Pi_0)$ 和 $w''(\Pi_0)$ 为不同的单根系.

前一断言在引理 4.2.16 已证明了. 后一断言证明如下: 任取 $w',w''\in W_G$, 设 $(w')^*(\Pi_0)=(w'')^*(\Pi_0)$, 所以 $w=(w'')^{-1}w'\in W_G$ 有 $w^*(\Pi_0)=\Pi_0$. 我们来证 $w''=w'$, 即证 $w=\mathrm{id}$.

事实上, 记 $\Pi_0=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$. 由 $w^*(\Pi_0)=\Pi_0$, 所以存在 $1,2,\cdots,l$ 的排列 $j_1j_2\cdots j_l$, 使得

$$w^*(\alpha_i)=\alpha_{j_i},\quad 1\le j\le l.$$

记 Δ^+ 为由单根系 Π_0 决定的正根系. 因此任取 $\alpha\in\Delta^+$, $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{l}m_i\alpha_i$, 其中 $m_1,\cdots,m_l$ 为非负整数, 而

$$w^*(\alpha)=\sum_{i=1}^{l}m_iw(\alpha_i)=\sum_{i=1}^{l}m_i\alpha_{j_i}$$

仍为正根. 这证明了 $w^*(\Delta^+)=\Delta^+$.

w^* 作为有限集 Δ^+ 的排列, 它为有限多个不相连的循环的乘积 $\psi_1\psi_2\cdots\psi_s$. 记 $\psi_i=(\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_{p_i}})$. 在复半单李代数 $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$

中作子空间

$$\mathfrak{L}^{(i)} = \sum_{q=1}^{p_i} \mathfrak{L}_{\beta_{j_q}}, \quad \mathfrak{L}^{-(i)} = \sum_{q=1}^{p_i} \mathfrak{L}_{-\beta_{j_q}},$$

则有

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H}^{C} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{L}_\alpha = \mathfrak{H}^C + \sum_{i=1}^{s}(\mathfrak{L}^{(i)} + \mathfrak{L}^{-(i)}).$$

另一方面，$w \in W_G = (\mathfrak{A}\cap \mathrm{Ad}\, G)/\mathrm{Ad}\, H$ 作为 $(\mathfrak{A}\cap \mathrm{Ad}\, G)|_{\mathfrak{H}}$ 中的元素，由证 (1) 可知，记 $w = \mathrm{Ad}\, g$，其中 $g \in G$，又 $(\mathrm{Ad}\, g)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$，于是有

$$w(\mathfrak{L}^{(i)}) = (\mathrm{Ad}\, g)(\mathfrak{L}^{(i)}),\ w(\mathfrak{L}^{-(i)}) = (\mathrm{Ad}\, g)(\mathfrak{L}^{-(i)}), \quad 1 \le i \le s.$$

先来讨论 $\mathfrak{L}^{(1)}$. 为了指标方便起见，无妨设 $\psi_1 = (\beta_1, \cdots, \beta_r)$，于是

$$(\mathrm{Ad}\, g)e_{\beta_1} = \lambda_1 e_{\beta_2}, \cdots, (\mathrm{Ad}\, g)e_{\beta_{r-1}} = \lambda_{r-1}e_{\beta_r}, (\mathrm{Ad}\, g)e_{\beta_r} = \lambda_r e_{\beta_1}.$$

所以对子空间 $\mathfrak{L}^{(1)}$ 的基 $e_{\beta_1}, \cdots, e_{\beta_r}$，$\mathrm{Ad}\, g$ 对应的方阵表示为

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_{r-1} \\ \lambda_r & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

因此特征多项式为 $\lambda^r - \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r$.

但是 $W_G = (\mathfrak{A}\cap \mathrm{Ad}\, G)/\mathrm{Ad}\, H$，所以 $w \in W_G$ 为 $\mathfrak{A}\cap \mathrm{Ad}\, G$ 关于 $\mathrm{Ad}\, H$ 的左旁集空间，而 $\mathrm{Ad}\, g$ 为其中一个代表元素. 所以任取 $h_0 \in \mathfrak{H}$，则 $\exp h_0 \in H$. 而以 $\mathrm{Ad}\, g$ 为代表元素的左旁集中任一元素可表示为

$$(\mathrm{Ad}\, g)(\mathrm{Ad}\,(\exp h_0)), \quad \forall\ h_0 \in \mathfrak{H}.$$

今

$$(\mathrm{Ad}\,(\exp h_0))e_{\beta_i} = (\exp(\mathrm{ad}\, h_0))e_{\beta_i} = (\exp(\beta_i(h_0)))e_{\beta_i}, \quad 1 \le i \le r,$$

所以 $(\mathrm{Ad}\, g)(\mathrm{Ad}\,(\exp h_0))$ 对应方阵表示为

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 e^{\beta_1(h_0)} & & & \\ 0 & 0 & \lambda_2 e^{\beta_2(h_0)} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{r-1} e^{\beta_{r-1}(h_0)} \\ \lambda_r e^{\beta_r(h_0)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

它的特征多项式为 $\lambda^r - \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r \exp(\beta_1(h_0)+\cdots+\beta_r(h_0))$.

注意到 $\beta_1+\cdots+\beta_r$ 为正根的和，它不等于零，所以我们总能找到 $h_0 \in \mathfrak{H}$, 使得对所有循环 $\psi_1,\cdots,\psi_s$, 总有

$$\exp(-\beta_1(h_0)-\cdots-\beta_r(h_0)) \neq \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r.$$

换句话说，存在 $g \in G$, 使得 $(\mathrm{Ad}\, g)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$. 又 $\mathrm{Ad}\, g$ 在 $\sum\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{L}_\alpha$ 中无特征根 1, 因此 $\mathrm{Ad}\, g$ 的特征根 1 的特征子空间在 $\mathfrak{H}^C$ 中.

但是定理 4.1.21 告诉我们，G 中元素 g 必落在一个 Cartan 子群 H_1 中，于是 $H_1 \subset \mathrm{C}(g)$ 为 g 的中心化子. 注意到记 $\mathfrak{P}$ 为李子群 $\mathrm{C}(g)$ 的李代数，则任取 $X \in \mathfrak{P}$, 有 $(\mathrm{Ad}\, g)X = X$. 所以 $\mathrm{Ad}\, g$ 的特征根为 1 的特征子空间的维数 $\geq \dim \mathrm{C}(g) \geq \dim H_1 = \dim H = l$. 上面已证 $\mathrm{Ad}\, g$ 的特征根为 1 的特征子空间的维数 $\leq \dim H$, 因此证明了 $\mathfrak{H}$ 中元素都是 $\mathrm{Ad}\, g$ 的特征根为 1 的特征向量，即 $(\mathrm{Ad}\, g)|_{\mathfrak{H}} = \mathrm{id}$. 所以 $w = \mathrm{Ad}\, g|_{\mathfrak{H}} = \mathrm{id}$. 这证明了断言.

由此证明了单根系集 $\{w^*(\Pi_0) \mid w \in W_G\}$ 为根系 Δ 中两两不同的单根系. 换句话说， Weyl 群 W_G 在单根系集 $\{w^*(\Pi_0) \mid w \in W_G\}$ 上是单可递的. 由此也推出 Weyl 群 W_G 的阶数等于集合 $\{w^*(\Pi_0) \mid \forall\, w \in W_G\}$ 的元素个数.

(3)　由于定理 4.2.13 证明了 Weyl 房和根系 Δ 中单根系之间有一个自然的一一对应，为了证明 $w^*(\Pi_0)$, $\forall\, w \in W_G'$ 遍历所有的单根系，我们只要证明 $w(\Omega_0), \forall\, w \in W_G'$ 遍历所有的 Weyl 房，其中 Ω_0 是由单根系 Π_0 决定的 Weyl 房.

由引理 4.2.8,Weyl 群 W_G 为有限群，因此子群 W'_G 也有限.
令 $\Pi_0 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$, 记 $h_i = \sqrt{-1}h_{\alpha_i} \in \mathfrak{H}$, $1 \le i \le l$. 记 Weyl 房

$$\Omega_0 = \{h \in \mathfrak{H} \mid B(h, h_i) > 0, \quad 1 \le i \le l\}.$$

另取单根系 $\Pi' = \{\beta_1, \cdots, \beta_l\}$, 记 $h'_i = \sqrt{-1}h_{\beta_i} \in \mathfrak{H}$, $1 \le i \le l$. 记 Weyl 房

$$\Omega' = \{h \in \mathfrak{H} \mid B(h, h'_i) > 0, \quad 1 \le i \le l\}.$$

我们来证存在 $w \in W'_G$, 使得 $w(\Omega_0) = \Omega'$, 其中 W'_G 为由反射集 $\{w_\alpha, \forall\, \alpha \in \Delta\}$ 生成的 Weyl 群 W_G 的子群.

事实上，在 Weyl 房 Ω_0 中任取一点 h_0, 作有限集

$$\mathfrak{S} = \{w(h_0) \mid \forall\; w \in W'_G\} \subset \mathfrak{H}.$$

任取 $h' \in \Omega'$, 由于 $\mathfrak{S}$ 为有限集，所以必存在一元素 $w_0(h_0) \in \mathfrak{S}$, 使得 $|w_0(h_0) - h'| \le |w(h_0) - h'|$, $\forall\; w \in W'_G$. 我们来证 $w_0(h_0) \in \Omega'$. 设若不然，由 $h_0 \in \Omega_0$, 有 $w_0(h_0) \in w_0(\Omega_0)$, 其中 $w_0(\Omega_0)$ 仍为 Weyl 房，因此

$$B(h_\alpha, w_0(h_0)) \ne 0, \quad \forall\; \alpha \in \Delta.$$

特别地， $B(h'_i, w_0(h_0)) \ne 0$, $1 \le i \le l$. 但是 $w_0(h_0) \notin \Omega'$, 所以存在 $p \in \{1, \cdots, l\}$ 使得 $B(h'_p, w_0(h_0)) < 0$. 再作反射 w_{β_p}, 有

$$\begin{aligned}
&- B(w_{\beta_p} w_0(h_0) - h', w_{\beta_p} w_0(h_0) - h') \\
= &- B(w_0(h_0), w_0(h_0)) + 2B(w_{\beta_p} w_0(h_0), h') - B(h', h') \\
= &- B(w_0(h_0) - h', w_0(h_0) - h') - 2B(w_0(h_0), h') \\
&+ 2B(w_0(h_0) - \frac{2B(h'_p, w_0(h_0))}{B(h'_p, h'_p)} h'_p, h') \\
= &- B(w_0(h_0) - h', w_0(h_0) - h') - \frac{4B(h'_p, w_0(h_0))B(h'_p, h')}{B(h'_p, h'_p)}.
\end{aligned}$$

今 $h' \in \Omega'$, 所以 $B(h'_p, h') > 0$, 又 $B(h'_p, h'_p) < 0$. 因此

$$-\frac{4B(h'_p, w_0(h_0))B(h'_p, h')}{B(h'_p, h'_p)} < 0.$$

这证明了 $|w_{\beta_p}w_0(h_0)-h'|<|w_0(h_0)-h'|$. 所以和 w_0 的选取矛盾. 至此证明了 $w_0(h_0)\in\Omega'$, 所以 $w_0(\Omega_0)\cap\Omega'\neq\emptyset$. 这证明了 $\Omega'=w_0(\Omega_0)$.

上面已证 W'_G 为有限群, 且为 Weyl 群 W_G 的子群. 又证明了 $\{w_0(\Omega_0)\mid\forall\, w_0\in W'_G\}$ 遍历所有的 Weyl 房, 因此

$$\{w_0^*(\Pi_0)\mid\forall\, w_0\in W'_G\}$$

遍历所有不同的单根系. 又证明了 Weyl 群 W_G 中的不同元素作用在单根系 Π_0 上得到不同的单根系. 因此证明了 $W'_G=W_G$, 即 Weyl 群 W_G 由所有反射 $W_\alpha,\alpha\in\Delta$ 生成. 且 Weyl 群在所有单根系上单可递, 从而在所有 Weyl 房上单可递. 定理证完.

最后, 有

定理 4.2.18 符号同上面定理. 取定单根系 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$, 则 Weyl 群 W_G 由 l 个反射 $w_i=w_{\alpha_i}$, $1\le i\le l$ 生成.

证 设 $w_1,\cdots,w_l$ 生成 Weyl 群 W_G 的子群 W'_G. 我们来证 $W'_G=W_G$.

记由单根系 Π 决定的正根系为 Δ^+, 则由 $h\in\mathfrak{h}$, 有

$$w_{-\alpha}(h)=h-\frac{2B(h_{-\alpha},h)}{B(h_{-\alpha},h_{-\alpha})}h_{-\alpha}=h-\frac{2B(h_\alpha,h)}{B(h_\alpha,h_\alpha)}h_\alpha=w_\alpha(h),$$

证明了 $w_{-\alpha}=w_\alpha$, $\forall\,\alpha\in\Delta^+$. 因此只要证明任取 $\alpha\in\Delta^+$, 则 w_α 由 $w_1,\cdots,w_l$ 生成就够了.

记 $h_i=h_{\alpha_i}$, $1\le i\le l$, 令 $\alpha\in\Delta^+$, 所以 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{l}m_i\alpha_i$, 其中 $m_1,\cdots,m_l$ 为非负整数. 记 $\mathrm{N}(\alpha)=\sum\limits_{i=1}^{l}m_i$, 称为正根 α 的**长度**. 长度为 1 的正根 α 显然为单根, 这时 w_α 自然由 $w_1,\cdots,w_l$ 生成. 取定长度为 $s>1$ 的正根 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{l}m_i\alpha_i$. 由 $B(h_\alpha,h_\alpha)>0$ 可知 $\sum\limits_{i=1}^{l}m_iB(h_i,h_\alpha)>0$. 于是存在指标 i 使得 $B(h_i,h_\alpha)>0$. 作反射

$$w_i(h_\alpha)=h_\alpha-\frac{2B(h_i,h_\alpha)}{B(h_{\alpha_i},h_i)}h_i.$$

我们来证 $w_i^*(\alpha)\in\Delta^+$. 设若不然, 则 $w_i^*(\alpha)\in\Delta^-$, 于是

$$w_i^*(\alpha)=\alpha-\frac{2B(h_i,h_\alpha)}{B(h_i,h_i)}\alpha_i\in\Delta^-.$$

但是 $\dfrac{2B(h_i,h_\alpha)}{B(h_i,h_i)}>0$, 所以由 $m_1\geq 0,\cdots,m_l\geq 0$ 及

$$\sum_{j=1}^{i-1}m_j\alpha_j+\sum_{j=i+1}^{l}m_j\alpha_j+\Big(m_i-\frac{2B(h_i,h_\alpha)}{B(h_i,h_i)}\Big)\alpha_i\in\Delta^-,$$

证明了 $m_j=0, j\neq i, m_i=1$. 于是 $1<s=\sum\limits_{j=1}^{l}m_j=1$. 这导出矛盾. 所以证明了 $w_i^*(\alpha)\in\Delta^+$, 而

$$\mathrm{N}(w_i^*(\alpha))=\mathrm{N}(\alpha)-\frac{2B(h_i,h_\alpha)}{B(h_i,h_i)}<\mathrm{N}(\alpha).$$

对正根 $w_i^*(\alpha)$ 继续讨论, 便证明了存在 $w\in W_G'$, 使得 $\mathrm{N}(w^*(\alpha))=1$, 即 $w^*(\alpha)=\alpha_j$. 于是 $\alpha=(w^*)^{-1}(\alpha_j)=(w^{-1})^*(\alpha_j)$. 所以

$$\begin{aligned}w^{-1}w_jw(h)&=w^{-1}\Big(w(h)-\frac{2B(w(h),h_j)}{B(h_j,h_j)}h_j\Big)\\&=h-\frac{2B(w(h),h_j)}{B(h_j,h_j)}w^{-1}(h_j).\end{aligned}$$

由 $\alpha=(w^{-1})^*(\alpha_j)$, 可知 $h_\alpha=w^{-1}(h_j)$. 又由 w^{-1} 为实正交变换, 即

$$\begin{aligned}&B(w(h),h_j)=B(h,w^{-1}(h_j))=B(h,h_\alpha),\\&B(h_j,h_j)=B(w^{-1}(h_j),w^{-1}(h_j))=B(h_\alpha,h_\alpha),\end{aligned}$$

所以证明了 $w^{-1}w_jw=w_\alpha$. 由 α 任取, 便证明了 $W_G\subset W_G'\subset W_G$, 即 $W_G'=W_G$. 定理证完.

由

$$\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})/\mathrm{Ad}\,G\cong\mathfrak{A}/\mathrm{Ad}\,(H)/W_G,$$

和引理 4.2.4, 定理 4.2.17 的 (2), 所以为了求李代数 $\mathfrak{G}$ 的外自同构, 只要求自同构 σ, 使得 $\sigma(\Pi) = \Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$. 由 $B(\alpha_i, \alpha_j) = B(\sigma(\alpha_i), \sigma(\alpha_j))$. 所以 σ 使得 Dynkin 图不变, 即为 **图自同构**.

§ 4.3 紧李群的表示

设 G 为紧连通李群, (ρ, V) 为它的表示, 即 ρ 为李群 G 到一般线性群 $\mathrm{GL}(V)$ 内的李群同态, 其中 V 为有限维实 (或复) 线性空间, 相应的表示为实 (或复) 表示.

我们只考虑复表示. 在表示空间 V 中取定一组基 $v_1, \cdots, v_n$, 于是线性空间 V 上的线性变换 $\rho(g)$ 有方阵表示, 仍用 $\rho(g)$ 表示, 即

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} a_{11}(g) & \cdots & a_{1n}(g) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(g) & \cdots & a_{nn}(g) \end{pmatrix}, \quad \forall\, g \in G.$$

由于 ρ 为李群的同态, 所以 $a_{ij}(g)$ 为紧连通李群 G 上的解析函数. 由表示等价的定义可知, 等价表示的方阵表达式之间的关系为在一个非异常数方阵下同时互相相似, 即有: 若表示 (ρ_i, V_i), $i = 1, 2$ 互相等价, 则

$$\rho_2(g) = P\rho_1(g)P^{-1}, \quad \forall\, g \in G,$$

其中 P 为线性空间 V_1 到 V_2 上的线性同构在相应基下的方阵表示.

实际上, 不难证明: 若表示 (ρ_1, V_1) 和 (ρ_2, V_2) 互相等价, 在线性空间 V_1 中取定基后, 则在线性空间 V_2 中必存在一组基, 使得 $\rho_1(g)$, $\rho_2(g)$ 有相同的方阵表示, $\forall\, g \in G$.

定义 4.3.1 (Frobenius) 设 (ρ, V) 为紧连通李群 G 的表示. 则李群 G 上的解析函数

$$ch_\rho(g) = \mathrm{tr}\, \rho(g), \quad \forall\, g \in G$$

称为表示 (ρ, V) 的 **特征函数**, 简称为 **特征**.

显然等价的表示的特征相同. 下面我们来证不等价的表示的特征不同, 因此特征为紧连通李群的表示的全系不变量. 为此, 我们详细讨论特征的性质.

引理 4.3.2(Weyl) 设 G 为紧连通李群, (ρ, V) 为其表示, 则在线性空间 V 上存在 $\rho(G)$ 不变内积.

证 我们约定复线性空间的内积为正定 Hermite 双线性函数, 实线性空间的内积为正定对称双线性函数. 在表示空间 V 上任取内积 $<x, y>$, 定义

$$(x, y) = \int_G <\rho(g)x, \rho(g)y> \Omega(g), \quad \forall x, y \in V.$$

我们来证 (x, y) 为线性空间 V 上的 $\rho(G)$ 不变内积. 事实上, 任取 $g_0 \in G$, 则

$$(\rho(g_0)x, \rho(g_0)y) = \int_G <\rho(g)\rho(g_0)x, \rho(g)\rho(g_0)y> \Omega(g)$$
$$= \int_G <\rho(gg_0)x, \rho(gg_0)y> \Omega(g) = \int_G <\rho(g)x, \rho(g)y> w(gg_0^{-1})$$
$$= \int_G <\rho(g)x, \rho(g)y> \Omega(g) = (x, y).$$

所以 (x, y) 在 $\rho(G)$ 下不变. 下面证它是内积. 事实上,

$$(x, x) = \int_G <\rho(g)x, \rho(g)x> w(g) \geq 0.$$

若等号成立, 即有 $<\rho(g)x, \rho(g)x>$ 在李群 G 上几乎处处为零. 由于 $\rho(g)x$ 关于 g 在李群 G 上解析, 所以证明了 $<\rho(g)x, \rho(g)x>= 0, \forall g \in G$, 即有 $\rho(g)x = 0, \forall g \in G$. 但是 $\rho(g)$ 非异, 这证明了 $x = 0$. 所以 (x, y) 为线性空间 V 上的 $\rho(G)$ 不变内积. 引理证完.

定理 4.3.3 紧连通李群的表示完全可约.

证 设 (ρ, V) 为紧连通李群的表示, (x, y) 为表示空间 V 上的 $\rho(G)$ 不变内积. 在表示空间 V 中任取极小不变子空间 V_1, 则

V_1 关于内积 (x,y) 的正交补 $V_1^{\perp}$ 仍为不变子空间. 又 $V=V_1+V_1^{\perp}$ 为空间直接和. 对 $V_1^{\perp}$ 继续讨论, 所以证明了定理. 证完.

现在可以给出第 1 章中未给出证明的定理:

定理 4.3.4 复半单李代数的表示完全可约.

证 设 (ρ,V) 为复半单李代数的表示. 由于复半单李代数有紧实形式, 自然 (ρ,V) 限制在紧实形式 $\mathfrak{G}$ 上仍为复表示. 记 G 为由紧半单李代数 $\mathfrak{G}$ 所决定的连通且单连通李群. 由于 ρ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 上的同态, 所以可提升为李群 G 的同态 σ, 即 (σ,V) 为紧李群 G 的复表示, 它完全可约. 由于李群的表示中不变子空间为它的李代数的表示的不变子空间, 所以由定理 4.3.3 推出复半单李代数的表示完全可约. 于是证明了定理. 证完.

定义 4.3.5 紧连通李群 G 上的函数 f 称为 **平方可积函数**, 如果

$$\int_G |f(g)|^2\Omega(g)<+\infty,$$

它们的全体构成的函数空间 $L^2(G)$ 称为 **平方可积函数空间**.

引理 4.3.6 平方可积函数空间 $L^2(G)$ 为具有内积

$$(f,h)=\int_G f(g)h(g)\Omega(g),\quad \forall\ f,h\in L^2(G)$$

的线性空间.

证 显然, 任取 $f,h\in L^2(G)$, $\lambda,\mu\in F$, 其中 $F=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 则

$$\int_G|\lambda f+\mu h|^2=|\lambda|^2\int_G|f|^2+|\mu|^2\int_G|h|^2+\lambda\overline{\mu}\int_G f\overline{h}+\overline{\lambda}\mu\int_G\overline{f}h.$$

而

$$\left|\int_G f\overline{h}\right|\le\int_G|f||h|\le\frac{1}{2}\int_G|f|^2+\frac{1}{2}\int_G|h|^2,$$

所以证明了

$$\int_G|\lambda f+\mu g|^2\le(|\lambda|^2+|\lambda||\mu|)\int_G|f|^2+(|\mu|^2+|\lambda||\mu|)\int_G|h|^2<+\infty.$$

即 $\lambda f+\mu g\in L^2(G)$, 这证明了 $L^2(G)$ 为线性空间.

显然，为了证

$$(f,h)=\int_G f(g)\overline{h(g)}\Omega(g)$$

为内积，只要证 $(f,f)=0$ 当且仅当 f 几乎处处为零. 事实上, $(f,f)=\int_G |f(g)|^2 w(g)=0$ 当且仅当 $|f|^2$ 几乎处处为零，即 f 几乎处处为零. 证完.

引理 4.3.7 设 $(\rho_1,V_1),(\rho_2,V_2)$ 同时为紧连通李群 G 的两个不可约复表示. 在表示空间 V_i 中取定关于 $\rho_i(G)$ 不变内积的标准正交基，相应的方阵表示为

$$\rho_1(g)=(a_{ij}(g)),\quad \rho_2(g)=(b_{ij}(g)),\quad \forall\ g\in G.$$

则有

(1) 若 (ρ_1,V_1) 和 (ρ_2,V_2) 互相不等价，则

$$(a_{ij},b_{pq})=\int_G a_{ij}(g)\overline{b_{pq}(g)}\Omega(g)=0,\quad \forall\ i,j,p,q;$$

(2) 若 (ρ_1,V_1) 和 (ρ_2,V_2) 互相等价，则存在表示空间 V_1 到 V_2 上的保持内积的线性同构 $\mathcal{A}$, 使得

$$\rho_2=\mathcal{A}\circ\rho_1\circ\mathcal{A}^{-1}.$$

因此，在表示空间 V_i 中存在基， $i=1,2$, 使得 $\rho_1(g)$ 和 $\rho_2(g)$ 的方阵表示为相同的方阵， $\forall\ g\in G$. 于是无妨取 $\rho_1=\rho_2=\rho$, $V_1=V_2=V$. 这时有

$$(a_{ij},a_{pq})=\int_G a_{ij}(g)\overline{a_{pq}(g)}\Omega(g)=\frac{\delta_{ip}\delta_{jq}}{\dim V},\quad \forall\ i,j,p,q.$$

证 记 $\dim V_1=n,\dim V_2=m$. 任取 $n\times m$ 常数矩阵 A. 由于表示 ρ_i 为李群的同态，所以 a_{ij},b_{pq} 为紧连通李群 G 上的解析函数，因此在平方可积函数空间 $L^2(G)$ 中，构作方阵

$$B=B(A)=\int_G \rho_1(g)A\overline{\rho_2(g)}'\Omega(g).$$

注意到我们可在表示空间 V_i 中取关于 $\rho_i(G)$ 不变内积的标准正交基，所以方阵 $\rho_i(g)$ 为酉方阵， $\forall g \in G, i=1,2$. 因此 $\overline{\rho_2(g)}' = \rho_2(g)^{-1} = \rho_2(g^{-1})$.

今任取 $g_0 \in G$, 则有

$$\rho_1(g_0)B(A) = \int_G \rho_1(g_0)\rho_1(g)A\overline{\rho_2(g)}'\Omega(g)$$

$$= \int_G \rho_1(g_0 g)A\overline{\rho_2(g)}'\Omega(g)$$

$$= \int_G \rho_1(g_1)A\overline{\rho_2(g_0^{-1}g_1)}'\Omega(g_0^{-1}g_1)$$

$$= \int_G \left(\rho_1(g_1)A\overline{\rho_2(g_1)}'\right)\rho_2(g_0)\Omega(g_1) = B(A)\rho_2(g_0).$$

这里，矩阵积分定义为

$$\int_G (c_{ij}(g))\Omega(g) = (\int_G c_{ij}(g)\Omega(g)).$$

由 Schur 引理可知, 若表示 (ρ_1, V_1) 及 (ρ_2, V_2) 不等价, 则 $B(A)=0$; 若 $\rho_1=\rho_2=\rho$, $V_1=V_2=V$, 则 $B(A)=\lambda(A)I$ 为纯量方阵，其中 $\lambda(A)$ 仅依赖于常数方阵 A.

取 $A=E_{jq}$, $1 \le j \le n$, $1 \le q \le m$, 其中 E_{jq} 为 $n \times m$ 矩阵，它的第 j 行、第 q 列的交叉元素为 1, 其余元素为零. 于是

$$\int_G \rho_1(g)E_{jq}\overline{\rho_2(g)}'\Omega(g) = \left(\int_G a_{ij}(g)\ \overline{b_{pq}(g)}\Omega(g)\right) = B(E_{jq}).$$

这证明了若表示 (ρ_1, V_1) 及 (ρ_2, V_2) 不等价，则 $B(E_{jq})=0$, 于是

$$\int_G a_{ij}(g)\overline{b_{pq}(g)}\Omega(g) = 0, \quad \forall \quad i,j,p,q.$$

所以证明了引理的 (1) 成立.

下面证 (2) 成立. 事实上，由 $\rho_1=\rho_2=\rho$, $V_1=V_2=V$, 所以有

$$\lambda(A)I = \int_G \rho(g)A\overline{\rho(g)}'\Omega(g).$$

取 $A=E_{jq}$, 则有

$$\int_G a_{ij}(g)\overline{a_{pq}(g)}\Omega(g)=\lambda(E_{jq})\delta_{ip}.$$

当 $i=p$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\int_G a_{ij}(g)\overline{a_{iq}(g)}\Omega(g)=n\lambda(E_{jq}).$$

由于 $\rho(g)$ 为酉方阵, 所以

$$\sum_i \overline{a_{ij}(g)}a_{iq}(g)=\delta_{jq}.$$

这证明了 $\lambda(E_{jq})=\delta_{jq}/(\dim V)$, 于是

$$\int_G a_{ij}(g)\overline{a_{pq}(g)}\Omega(g)=\frac{\delta_{ip}\delta_{jq}}{\dim V}.$$

引理证完.

定理 4.3.8 设 (ρ,V) 为紧连通李群 G 的不可约复表示, 则其特征的范数为 1, 又互不等价的不可约复表示的特征互相正交.

证 由引理 4.3.7 的 (2) 可知

$$\|a_{ij}\|^2=(a_{ij},a_{ij})=\frac{1}{\dim V},\quad \int_G a_{ii}\overline{a_{jj}}\Omega(g)=0,\quad i\neq j.$$

今表示 (ρ,V) 的特征 $ch_\rho(g)=\operatorname{tr}\rho(g)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}(g)$, 于是

$$\begin{aligned}\|ch_\rho(g)\|^2&=\int_G\Big|\sum_i a_{ii}(g)\Big|^2\Omega(g)=\int_G\sum_{i,j}a_{ii}(g)\overline{a_{jj}(g)}\Omega(g)\\&=\int_G\sum_i|a_{ii}(g)|^2\Omega(g)=1.\end{aligned}$$

证完.

定理 4.3.9 设 (ρ, V) 为紧连通李群 G 的复表示. 设 V 分解为两两正交的极小不变子空间直接和 $V = V_1 + \cdots + V_s$，相应的表示 ρ 分解为两两正交（定义为表示空间两两正交）的不可约子表示直接和 $\rho = \rho_1 + \cdots + \rho_s$. 将等价的表示用同一个符号表示，即有

$$\rho = \sum_{i=1}^{t} m_i \rho_i,$$

其中 $m_1, \cdots, m_t$ 为自然数，$\rho_1, \cdots, \rho_t$ 互相不等价. 则表示 (ρ, V) 的特征有性质

$$\|ch_\rho\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{t} m_i^2}.$$

因此，表示 (ρ, V) 不可约当且仅当 $\|\mathrm{ch}_\rho\| = 1$.

证 在每一个极小不变子空间 V_i 中取标准正交基，于是全体拼成表示空间 V 的标准正交基. 这时 $\rho(g)$ 的方阵表示为

$$\rho(g) = \mathrm{diag}\,(\rho_1(g), \cdots, \rho_s(g)), \quad \forall\ g \in G,$$

而 $\overline{\rho_i(g)}' = \rho_i(g)^{-1} = \rho_i(g^{-1})$，因此 $\mathrm{ch}_\rho(g) = \sum\limits_{i=1}^{s} \mathrm{ch}_{\rho_i}(g)$，$\forall\ g \in G$. 我们选取极小不变子空间 V_i 中的标准正交基，使得当子表示 (ρ_i, V_i) 和 (ρ_j, V_j) 等价时，它们的方阵表示 $\rho_i(g) = \rho_j(g)$，$\forall\ g \in G$. 所以

$$\mathrm{ch}_\rho(g) = \sum_{j=1}^{t} m_j \mathrm{ch}_{\rho_j}(g),$$

其中 $\rho_1, \cdots, \rho_t$ 互不等价. 由引理 4.3.7 的 (1) 可知

$$\int_G \mathrm{ch}_{\rho_i}(g) \overline{\mathrm{ch}_{\rho_j}(g)} \Omega(g) = 0, \quad 1 \le i < j \le t.$$

由定理 4.3.8 可知

$$\int_G |\mathrm{ch}_{\rho_i}(g)|^2 \Omega(g) = 1, \quad 1 \le i \le t,$$

所以证明了

$$\|\mathrm{ch}_\rho\|^2 = \int_G |\mathrm{ch}_\rho(g)|^2\Omega(g) = \int_G \Big|\sum_{i=1}^t m_i\rho_i(g)\Big|^2\Omega(g) = \sum_{i=1}^t m_i^2.$$

定理证完.

引理 4.3.10 设 (ρ, V) 为紧连通李群 G 的复表示, (ρ', V') 为紧李群 G 的不可约复表示. (ρ', V') 等价于表示 (ρ, V) 的某个不可约子表示当且仅当

$$(\mathrm{ch}_\rho, \mathrm{ch}_{\rho'}) = \int_G \mathrm{ch}_\rho(g)\overline{\mathrm{ch}_{\rho'}(g)}\Omega(g) > 0.$$

证 令 $\rho = \sum\limits_{i=1}^t m_i\rho_i$, 其中 $\rho_1, \cdots, \rho_t$ 都不可约, 且互不等价. 若表示 (ρ', V') 和 $\rho_1, \cdots, \rho_t$ 都不等价, 则由引理 4.3.7 的 (2) 可知 $(\mathrm{ch}_\rho, \mathrm{ch}_{\rho'}) = 0$. 若表示 (ρ', V') 和某个 ρ_i 等价, 则由 $(\mathrm{ch}_{\rho_j}, \mathrm{ch}_{\rho'}) = 0, j \neq i$ 及 $(\mathrm{ch}_{\rho_i}, \mathrm{ch}_{\rho'}) = 1$ 可知

$$(\mathrm{ch}_{\rho_i}, \mathrm{ch}_{\rho'}) = \sum_{k=1}^t m_k \int \mathrm{ch}_{\rho_k}(g)\overline{\mathrm{ch}_{\rho'}(g)}\Omega(g) = m_i > 0.$$

至此证明了引理. 证完.

定义 4.3.11 紧连通李群 G 上的函数 f 称为 **类函数**, 如果

$$f((\mathrm{ad}\, g)g_1) = f(g_1), \quad \forall\ g,\ g_1 \in G.$$

引理 4.3.12 紧连通李群 G 的表示 (ρ, V) 的特征函数为类函数.

证 由于任取 $g,\ g_1 \in G$, 则

$$\rho((\mathrm{ad}\, g)g_1) = \rho(g g_1 g^{-1}) = \rho(g)\rho(g_1)\rho(g)^{-1},$$

所以 $\mathrm{tr}\,\rho((\mathrm{ad}\, g)g_1) = \mathrm{tr}\,\rho(g_1)$, 即 $\mathrm{ch}_\rho((\mathrm{ad}\, g)g_1) = \mathrm{ch}_\rho(g_1)$. 这证明了特征为类函数. 证完.

下面给出两个紧李群的重要定理，即证明 Weyl 特征公式及 Peter-Weyl 逼近定理. 先给出紧连通李群 G 的不可约复表示 (ρ, V) 的特征 $\mathrm{ch}_\rho(g)$, $\forall\, g \in G$ 的表达式，即 Weyl 特征公式.

我们知道紧连通李群 G 有如下分解： $G = \mathrm{C}(G)(G,G)$, 其中 $\mathrm{C}(G)$ 为 G 的中心，它是紧交换李群，而换位子群 (G,G) 为紧半单李群，又 $\mathrm{C}(G)$ 及 (G,G) 都是紧连通李群的紧正规子群.

在表示空间 V 上取 $\rho(G)$ 不变内积 (x,y). 任取 $c \in \mathrm{C}(G)$, 则有 $cg = gc, \forall\, g \in G$. 于是有

$$\rho(c)\rho(g) = \rho(g)\rho(c), \quad \forall\, c \in \mathrm{C}(G), \quad g \in G.$$

由 Schur 引理可知 $\rho(c) = \lambda(c)(\mathrm{id}\,)$, 其中 $\lambda(c) \in \mathbb{C}$, 且 $c \to \lambda(c)$ 给出紧交换李群 $\mathrm{C}(G)$ 到 $\mathbb{C}$ 内的表示. 由于 $(\rho(c)x, \rho(c)y) = (x,y)$, $\forall\, c \in \mathrm{C}(G)$, $x, y \in V$, 所以证明了

$$\lambda(c) = \exp\left(\sqrt{-1}\theta(c)\right), \quad \forall\, c \in \mathrm{C}(G),$$

其中

$$\theta(c^{-1}) = -\theta(c), \quad \theta(c_1c_2) = \theta(c_1) + \theta(c_2).$$

这样一来，任取 $g \in G$, 则 $g = cg_1$, 其中 $c \in \mathrm{C}(G)$, $g_1 \in G$. 而

$$\mathrm{ch}_\rho(g) = \mathrm{ch}_\rho(cg_1) = \mathrm{tr}\,\rho(c)\rho(g_1) = (\exp\left(\sqrt{-1}\theta(c)\right))\mathrm{tr}\,\rho(g_1).$$

因此，为了计算紧连通李群的特征，只要计算紧连通半单李群的特征就可以了.

所以下面设 G 为紧连通半单李群. 在 G 中取定 Cartan 子群 H. 定理 4.1.21 告诉我们，任取 $g \in G$, 则存在 $h \in H$ 及 $x \in G$, 使得 $(\mathrm{ad}\, x)g = h$. 于是

$$\mathrm{ch}_\rho(g) = \mathrm{ch}_\rho((\mathrm{ad}\, x)g) = \mathrm{ch}_\rho(h).$$

定理 4.1.13 又告诉我们， $H = \exp \mathfrak{h}$, 其中 $\mathfrak{h}$ 为 Cartan 子群 H 的李代数. 所以为了计算特征，只要计算特征在 Cartan 子群上的值，即只要计算

$$\mathrm{ch}_\rho(h) = \mathrm{ch}_\rho(\exp X), \quad \forall\, X \in \mathfrak{h}, \quad h = \exp X.$$

分别记 $\mathfrak{G}$ 及 $\mathfrak{H}$ 为紧连通半单李群 G 及其 Cartan 子群 H 的李代数，于是 $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C$ 为复半单李代数，且 $\mathfrak{L}$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}^C$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H}^C + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{L}_\alpha,$$

其中 Δ 为根系. 任取 $\alpha \in \Delta$, 记由 α 唯一决定的元素 $h_\alpha \in \sqrt{-1}\mathfrak{H}$ 有 $\alpha(h) = B(h_\alpha, h)$, $\forall\, h \in \mathfrak{H}$, 其中 B 为复半单李代数的 Killing 型. 于是, $\{h_\alpha \mid \forall\, \alpha \in \Delta\}$ 实线性生成 $\mathfrak{H}_R = \sqrt{-1}\mathfrak{H}$. 在根系 Δ 中取定单根系 Π. 另一方面，不可约复表示 (ρ, V) 的表示空间 V 按照 $\rho_*(\mathfrak{H})$ 分解为权子空间直接和

$$V = \sum_{\xi\in\Phi} V_\xi,$$

其中 Φ 为权系. 又唯一存在 $h_\xi \in \sqrt{-1}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_R$, 使得 $B(h_\xi, X) = \xi(X)$, $\forall\, X \in \mathfrak{H}$. 记最高权为 Λ. 则任取 $\xi \in \Phi$, 存在权链

$$\Lambda, \Lambda - \alpha_{i_1}, \Lambda - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2}, \cdots, \Lambda - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - \cdots - \alpha_{i_s} = \xi,$$

所以

$$\xi = \Lambda - \sum_{i=1}^{l} m_i \alpha_i,$$

其中 $m_1, \cdots, m_l$ 为非负整数.

今任取 $h = \exp X \in H$, 这里 $X \in \mathfrak{H}$, 则有

$$\mathrm{ch}_\rho(h) = \mathrm{ch}_\rho(\exp X) = \mathrm{tr}\,(\rho(\exp X)) = \mathrm{tr}\,(\exp \rho_*(X)).$$

由于

$$V_\xi = \{v \in V \mid \rho_*(h)v = \xi(h)v, \quad \forall\, h \in \mathfrak{H}\},$$

所以

$$\mathrm{ch}_\rho(h) = \mathrm{ch}_\rho(\exp X) = \sum_{\xi\in\Phi} (\exp(\xi(X))) \dim V_\xi.$$

另一方面，记 W_G 为 Weyl 群，则由引理 4.2.7 及 G 为紧连通半单李群可知

$$W_G = (\mathfrak{A} \cap \operatorname{Ad} G)/\mathfrak{A}_0 = \operatorname{Ad} \mathrm{N}(H)/\operatorname{Ad} H = \mathrm{N}(H)/H.$$

任给 Cartan 子群 H 上的函数 f，有 $f(h) = f(\exp X)$，$\forall\, h = \exp X \in H$，$X \in \mathfrak{H}$. 如果 f 实际上定义为李群 G 上的类函数，则必须有 $f(gxg^{-1}) = f(x)$，$\forall\, x, g \in G$. 因此当 $g \in \mathrm{N}(H)$，$x \in H$ 时推出 $y = gxg^{-1} \in H$. 于是必须 $f(x) = f(y)$. 所以，f 作为 Cartan 子群 H 上的函数，必须有 $f(x) = f(y)$，其中 x 和 y 在 $\mathrm{N}(H)$ 中元素下共轭. 令 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 中存在 X, Y，$x = \exp X$，$y = \exp Y$. 于是 $\exp tY = g(\exp tX)g^{-1}$，$\forall\, t \in \mathbb{R}$，当且仅当 $\exp tY = (\operatorname{ad} g)(\exp tX) = \exp t(\operatorname{Ad} g)X$，$\forall\, t \in \mathbb{R}$，即 $Y = (\operatorname{Ad} g)X$. 另一方面，显然任取 $g \in H$，则 $(\operatorname{Ad} g)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ 且 $\operatorname{Ad} g|_{\mathfrak{H}} = \mathrm{id}$. 这证明了 $Y = w(X)$，其中 $w \in W_G$.

因此，Cartan 子群 H 上的连续函数 f 开拓为紧李群 G 上的类函数，当且仅当

$$f(\exp X) = f(\exp w(X)), \qquad \forall\, X \in \mathfrak{H}, \quad w \in W_G.$$

由于特征 ch_ρ 是紧李群 G 上的类函数，所以有

$$\operatorname{ch}_\rho(\exp X) = \operatorname{ch}_\rho(\exp w(X)), \quad \forall\, X \in \mathfrak{H}, \quad w \in W_G.$$

即有

$$\sum_{\xi \in \Phi} \exp(\xi(X)) \dim V_\xi = \sum_{\xi \in \Phi} \exp(\xi(w(X))) \dim V_\xi.$$

令 $B(h_\xi, X) = \xi(X)$，$\forall\, X \in \mathfrak{H}$，而 $h_\xi \in \mathfrak{H}_R = \sqrt{-1}\mathfrak{H}$. 记

$$X_\xi = -\sqrt{-1} h_\xi,$$

则有

$$\xi(X) = \sqrt{-1} B(X_\xi, X), \quad \forall\, X \in \mathfrak{H}, \ \xi \in \Phi.$$

于是

$$\mathrm{ch}_\rho(h) = \mathrm{ch}_\rho(\exp X) = \sum_{\xi\in\Phi} n_\xi \exp\sqrt{-1}B(X_\xi, X), \quad \forall\ X \in \mathfrak{H},$$

这里 $\dim V_\xi = n_\xi > 0$. 因此

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ch}_\rho(h) = \mathrm{ch}_\rho(\exp X) = \mathrm{ch}_\rho(\exp w(X)) \\
=& \sum_{\xi\in\Phi} n_\xi \exp\sqrt{-1}B(X_\xi, w(X)) = \sum_{\xi\in\Phi} n_\xi \exp\sqrt{-1}B(w(X_\xi), X) \\
=& \sum_{\xi\in\Phi} n_\xi \exp\sqrt{-1}B(X_{w^*(\xi)}, X),
\end{aligned}$$

其中 $X \in \mathfrak{H}$, $w \in W_G$. 这里用到 $\xi(w(X)) = (w^*\xi)(X)$, $\forall\ X \in \mathfrak{H}$ 以及 Weyl 群 W_G 中元素 w 使得 Killing 型不变，所以有

$$\sum_{\xi\in\Phi} n_\xi \exp\sqrt{-1}B(X_{w^*(\xi)}, X) = \sum_{\xi\in\Phi} n_\xi \exp\sqrt{-1}B(X_\xi, X),$$

其中 $X \in \mathfrak{H}$, $w \in W_G$. 现在来证明

定理 4.3.13 (Weyl 特征公式) 设 G 为紧连通半单李群. H 为 G 中的 Cartan 子群，$\mathfrak{H}$ 为李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 中的 Cartan 子代数，则有 $\exp\mathfrak{H} = H$. 任取紧连通半单李群 G 的不可约复表示 (ρ, V), 则其特征

$$\mathrm{ch}_\rho(\exp X) = \frac{f_{\Lambda+\delta}(X)}{f_\delta(X)}, \quad \forall\ X \in \mathfrak{H},$$

其中

$$f_\lambda(X) = \sum_{\sigma\in W_G} (\mathrm{sign}\,(\sigma)) \exp\,(\sigma^*(\lambda))(X), \quad \forall\ X \in \mathfrak{H},$$

又

$$\lambda \in \mathfrak{H}_R^* = (\sqrt{-1}\mathfrak{H})^*, \quad \delta = \sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha$$

为正根系 Δ^+ 中所有正根的和之半，Λ 为不可约表示 (ρ, V) 的最高权，又任取 $\sigma \in W_G$,

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \sigma \text{ 为根系 } \Delta \text{ 的偶排列;} \\ -1, & \text{当 } \sigma \text{ 为根系 } \Delta \text{ 的奇排列.} \end{cases}$$

证 利用引理 4.1.18、引理 4.1.19 和引理 4.1.20, 我们知道紧连通半单李群 G 的非正则点集 S 为一个维数不超过 $\dim G - 3$ 的解析流形的解析映像，所以紧李群 G 的正则点集 T 为李群 G 中的连通开集. 又解析映射 $\rho: G \times H \to G$ 定义为 $\rho(g, h) = ghg^{-1}$, 使得 ρ_* 将 $G \times H$ 中点 (g, h) 的切向量 $(X_g, (X_0)_h)$ 映为点 $(\operatorname{ad} g)h$ 的切空间中的切向量

$$(\operatorname{Ad} g) \circ (L_h)_*((\operatorname{Ad} h)^{-1} X_e - X_e + (X_0)_e),$$

其中 $X_g \in T_g(G)$, $(X_0)_h \in T_h(H)$. 又 ρ_* 在切空间 $T_{(g,h)}(G \times H)$ 上满秩，当且仅当 h 为 Cartan 子群 H 中的正则元素.

今 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 为紧子代数，所以 $\mathfrak{H}$ 的表示 $(\operatorname{ad}, \mathfrak{G})$ 完全可约. 今 $(\operatorname{ad} \mathfrak{H})\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}$, 所以存在李代数 $\mathfrak{G}$ 的子空间直接和

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{M} + \mathfrak{H},$$

使得 $[\mathfrak{H}, \mathfrak{M}] \subset \mathfrak{M}$. 而且任取 $h \in H$, 则有 $(\operatorname{Ad} h)|_{\mathfrak{H}} = \mathrm{id}$.

今任取 $X \in \mathfrak{G}$, 则 $X = Y + Z$, 其中 $Y \in \mathfrak{M}$, $Z \in \mathfrak{H}$. 而

$$(\operatorname{Ad} h^{-1})X - X = (\operatorname{Ad} h^{-1})Y - Y,$$

所以我们考虑解析映射 $\rho_0: G/H \times H \to G$, 它定义为

$$\rho_0(gH, h) = (\operatorname{ad} g)h, \quad \forall\ g \in G,\ h \in H.$$

我们来证明 ρ_0 为 $G/H \times H \to G$ 上的覆盖映射，覆盖叶数为 $|W_G|$. 事实上，显然当 $g, g' \in G$ 且 $g^{-1}g' \in \mathrm{N}(H)$, 则任取 $h' \in H$, $(\operatorname{ad} g^{-1}g')h' = h \in H$, 又 $(\operatorname{ad} g')h' = (\operatorname{ad} g)h$, 即 $\rho_0(gH, h) = \rho_1(g'H, h')$. 所以集合 $\rho_0^{-1}((\operatorname{ad} g)h)$ 中至少有 $|\mathrm{N}(H)/H| = |W_G|$ 个

点. 另一方面, 由于 G/H 的切空间为 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H} \cong \mathfrak{M}$, 所以我们可取 G/H 的切空间为 $\mathfrak{M}$. 因此 $(\rho_0)_*$ 将点 (gH, h) 的切空间 $\mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$ 映为 $(\mathrm{ad}\, g)h$ 的切空间 $\mathfrak{G}$, 将元素 $(Y_{gH}, (X_0)_h)$ 映为

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{Ad}\, g) \circ (L_h)_*((\mathrm{Ad}\, h^{-1})Y_e - Y_e + (X_0)_e) \\
=& (\mathrm{Ad}\, g) \circ (L_h)_*((\mathrm{Ad}\, h^{-1})X_e - X_e + (X_0)_e),
\end{aligned}
$$

这里 Y 为李代数 $\mathfrak{G}$ 中元素 X 在 $\mathfrak{M}$ 上的投影. 这证明了 $(\rho_0)_*$ 和 ρ_* 的像相同. 因此, 同样在 $h \in H$ 为正则元素时满秩. 所以在 $(\mathrm{ad}\, g)h$ 为正则元素时, ρ_0 为覆盖映射, 覆盖叶数为 $|W_G|$.

现在来计算映射 ρ 的 Jacobian. 上面的讨论告诉我们, 它等于映射 ρ_0 的 Jacobian, 即为 $\det((\mathrm{Ad}\, h)^{-1}|_{\mathfrak{M}} - I)$, 其中 I 为单位方阵.

我们知道, 对于 Weyl 基 $\{e_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$, 有

$$
\mathfrak{G}^C = \mathfrak{H}^C + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{G}_\alpha, \quad e_\alpha \in \mathfrak{G}_\alpha.
$$

而

$$
\mathfrak{M} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathbb{R}(e_\alpha - e_{-\alpha}) + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathbb{R}\sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha}).
$$

记 $h = \exp X \in H$, $X \in \mathfrak{H}$, 则

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{Ad}\, h)^{-1} e_\alpha = (\mathrm{Ad}\,(\exp X))^{-1} e_\alpha \\
=& \exp(-\mathrm{ad}\, X) e_\alpha = (\exp(-\alpha(X))) e_\alpha.
\end{aligned}
$$

所以记 $X_\alpha = \sqrt{-1} h_\alpha$, $\forall\, \alpha \in \Delta$, 则

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{Ad}\, h)^{-1}(e_\alpha - e_{-\alpha}) \\
=& (e_\alpha - e_{-\alpha}) \cos B(X_0, X) + \sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha}) \sin B(X_0, X), \\
&(\mathrm{Ad}\, h)^{-1}\sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha}) \\
=& -(e_\alpha - e_{-\alpha}) \sin B(X_0, X) + \sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha}) \cos B(X_0, X).
\end{aligned}
$$

因此

$$\begin{aligned}\det((\operatorname{Ad}h^{-1})|_{\mathfrak{M}}-I) &= \prod_{\alpha\in\Delta}((\cos B(X_\alpha,X)-1)^2+\sin^2 B(X_\alpha,X)) \\ &= \prod_{\alpha\in\Delta}(4\sin^2\frac{1}{2}B(\sqrt{-1}h_\alpha,X)) \\ &= \prod_{\alpha\in\Delta^+}\left|\exp\frac{1}{2}\alpha(X)-\exp\frac{-1}{2}\alpha(X)\right|^2.\end{aligned}$$

记

$$j(h)=j(\exp X)=\prod_{\alpha\in\Delta^+}(\exp\frac{1}{2}\alpha(X)-\exp\frac{-1}{2}\alpha(X)),$$

则 Jacobian 为 $|j(h)|^2$.

于是可以考虑积分. 由于解析映射 $\rho_0: G/H\times H\to G$ 的 Jacobian 为 $|j(h)|^2$, $\forall\ h\in H$. 又 $(\rho_0)^*$ 满秩当且仅当点 (g,h) 中元素 h 为 Cartan 子群 H 中的正则元素, 它们全体记作 H_0. 注意到 $G-\rho_0(G/H\times H_0)$ 的测度为零, 因此对类函数 f, 有

$$f(\rho_0(g,h))=f((\operatorname{ad}g)h)=f(h),$$

而 $\rho_0: G/H\times H_0\to G$ 为到内的覆盖映射, 覆盖叶数为 $|W_G|$, 所以

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\Omega(x) &= \int_{\rho_0(G/H\times H_0)} f(x)\Omega(x) \\ &= \int_{\rho_0(G/H\times H_0)} f(\rho_0(g,h))\Omega(x) \\ &= \frac{1}{|W_G|}\int_{G/H\times H_0}|j(h)|^2 f(h)\Omega(G/H)\Omega(h),\end{aligned}$$

其中 $\Omega(G/H)$ 为齐性空间 G/H 的标准体积元素, 即

$$\int_{G/H}\Omega(G/H)=1,$$

所以

$$\int_G f(x)\Omega(x) = \frac{1}{|W_G|}\int_{H_0} f(h)|j(h)|^2\Omega(h).$$

在具体导出 Weyl 特征公式前，我们要仔细考查函数

$$f_\lambda(h) = f_\lambda(\exp X) = \sum_{\sigma\in W_G}(\mathrm{sign}\,(\sigma))\exp(\sigma^*(\lambda))(X), \forall\ X \in \mathfrak{H},$$

其中 $\lambda \in \mathfrak{H}_R^* = (\sqrt{-1}\mathfrak{H})^* = \sqrt{-1}\mathfrak{H}^*$. 我们有

(1) 当 $\sqrt{-1}h_\lambda$ 是 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 中的非正则元素时，有 $f_\lambda = 0$; 当 $\sqrt{-1}h_\lambda$ 是 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 中的正则元素时，f_λ 由 $|W_G|$ 个不同项 $\exp\sigma^*(\lambda)(X)$ 乘以 $\mathrm{sign}\,(\sigma)$ 求和而得，即 $\sigma^*(\lambda) = \tau^*(\lambda)$ 当且仅当 $\sigma = \tau$.

事实上，若 $\sqrt{-1}h_\lambda$ 为非正则元素，于是存在根系 Δ 中的元素 β, 使得 $B(h_\beta, h_\lambda) = 0$. 因此 $w_\beta(h_\lambda) = h_\lambda$, 即 $w_\beta^*(\lambda) = \lambda$.

$$\begin{aligned} f_{w_\beta^*(\lambda)}(\exp X) &= \sum_{\sigma\in W_G}(\mathrm{sign}\,\sigma)\exp\sigma^*(w_\beta^*(\lambda))(X) \\ &= \sum_{\zeta\in W_G}(\mathrm{sign}\,\zeta w_\beta^{-1})\exp\zeta^*(\lambda)(X) = (\mathrm{sign}\,w_\beta)f_\lambda(\exp X). \end{aligned}$$

这证明了 $f_\lambda = (\mathrm{sign}\,w_\beta)f_\lambda$. 但是熟知 $\mathrm{sign}\,w_\beta = -1$, 所以证明了 $f_\lambda = 0$.

当 $\sqrt{-1}h_\lambda$ 为正则元素时，$\sqrt{-1}h_\lambda$ 落在一个 Weyl 房中. 由于 Weyl 群作用在由 Weyl 房构成的集合上单可递，所以轨道 $\{\sigma^*(\lambda) \mid \forall\ \sigma \in W_G\}$ 对应了 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 中的轨道

$$\{\sqrt{-1}h_{\sigma^*(\lambda)} = \sqrt{-1}\sigma(h_\lambda) \mid \sigma \in W_G\},$$

它与每个 Weyl 房都相交，且只交于一点. 所以 $\sigma^*(\lambda) = \tau^*(\lambda)$ 当且仅当 $\sigma = \tau$. 这证明了断言.

由 (1) 可知，$f_\lambda \neq 0$ 当且仅当 $\sqrt{-1}h_\lambda$ 为正则元素.

(2) $f_\lambda(\exp w(X)) = (\mathrm{sign}\,(w))f_\lambda(\exp X)$, $\forall\, X \in \mathfrak{H}, w \in W_G$.

事实上，有

$$f_\lambda(\exp w(X)) = \sum_{\sigma\in W_G} (\operatorname{sign}\sigma)\exp(\sigma^*(\lambda))(w(X))$$

$$= \sum_{\sigma\in W_G} (\operatorname{sign}\sigma)\exp w^*(\sigma^*(\lambda))(X)$$

$$= \sum_{\sigma\in W_G} (\operatorname{sign}(w^{-1}\zeta))\exp \zeta^*(\lambda)(X)$$

$$= (\operatorname{sign} w) f_\lambda(\exp X).$$

这证明了断言.

(3) 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s \in \mathfrak{H}_R^*$, 且 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为 $\mathfrak{H}_R^*$ 中的 s 个不同元素，则 $\exp\lambda_i(X), 1\le i\le s$ 复线性无关.

事实上，若 $\exp\lambda_i(X),\cdots,\exp\lambda_s(X)$ 复线性相关，即有复数 c_i, $1\le i\le s$, 使得 $\sum\limits_i c_i\exp\lambda_i\ (X) = 0$. 引进参数 z, 令 $X = zY$, 则有 $\sum c_i\exp z\lambda_i(Y) = 0$. 对 z 求导数，便推出

$$\sum_i c_i(\lambda_i(Y))^k\exp z\lambda_i(Y) = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots,s-1.$$

由于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 两两不等，视 $c_i\exp z\lambda_i(Y) = x_i$ 为自变量，则系数矩阵为 Vandermonde 矩阵. 这推出 $x_i = c_i\exp z\lambda_i(Y) = 0$, 即 $c_i = 0$, $1\le i\le s$. 所以证明了断言.

(4) 设 $\sqrt{-1}h_\lambda$ 为 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 中的正则元素. 由 (1) 的证明有

$$f_{\sigma^*(\lambda)}(\exp X) = (\operatorname{sign}(\sigma))f_\lambda(\exp X), \quad \forall\ X\in\mathfrak{H}.$$

所以我们每次讨论函数 f_λ 时，只要在轨道 $\{\sigma^*(\lambda)\mid\forall\,\sigma\in W_G\}$ 中取出如此的元素，它有 $\lambda > \sigma^*(\lambda)$, $\forall\,\sigma\in W_G$, $\sigma\ne\mathrm{id}$.

因此任取 $\lambda,\mu\in\mathfrak{H}_R^*$, 使得 $\sqrt{-1}h_\lambda$, $\sqrt{-1}h_\mu$ 为 $\mathfrak{H}$ 中的正则元素. 我们可以确定地取 λ,μ, 使得

$$\lambda > \sigma^*(\lambda),\ \mu > \sigma^*(\mu), \quad \forall\ \sigma\in W_G,\ \sigma\ne\mathrm{id},$$

则有

$$\int_H f_\lambda(h)\overline{f_\mu(h)}\Omega(h) = \delta_{\lambda\mu}|W_G|.$$

事实上，有

$$\int_H f_\lambda(h)\overline{f_\mu(h)} = \sum_{\sigma,\tau\in W_G}(\mathrm{sign}\,(\sigma\tau))\int_H \exp\sigma^*(\lambda)(X)\overline{\exp\tau^*(\mu)(X)}.$$

若 $\sigma^*(\lambda)\neq\tau^*(\mu)$, 则积分为零. 若 $\sigma^*(\lambda)=\tau^*(\mu)$, 则积分为 1.

今轨道 $\{\sigma^*(\lambda)\mid\forall\,\sigma\in W_G\}$ 和 $\{\tau^*(\mu)\mid\forall\,\tau\in W_G\}$ 或者相同，或者不相交. 若不相交，便推出 $\sigma^*(\lambda)\neq\tau^*(\mu)$. 若相同，则有 $\sigma,\tau\in W_G$, 使得 $\sigma^*(\lambda)=\mu$, $\tau^*(\mu)=\lambda$. 而 $\lambda=\tau^*(\mu)\leq\mu=\sigma^*(\lambda)\leq\lambda$, 所以证明了 $\lambda=\sigma^*(\lambda)$, $\mu=\tau^*(\mu)$. 由 (2) 有 $\sigma=\tau=\mathrm{id}$, 因此 $\lambda=\mu$. 这时，由于 f_λ 恰好由 $|W_G|$ 个不同项 $\exp\sigma^*(\lambda)(X)$ 构成，所以证明了

$$\int_H f_\lambda(h)\overline{f_\mu(h)}\Omega(h) = \delta_{\lambda\mu}\sum_{\sigma\in W_G}\mathrm{sign}\,(\sigma^2) = \delta_{\lambda\mu}|W_G|,$$

因此断言成立.

(5) 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为 $\mathfrak{H}_R^*$ 中的 s 个不同元素，设

$$F(X)=\sum_{i=1}^{s}c_i\exp\lambda_i(X),$$

其中 $c_1,\cdots,c_s$ 为非零复数，有

$$F(w(X))=(\mathrm{sign}\,(w))F(X),\ \forall\,w\in W_G,\ X\in\mathfrak{H},$$

则存在 t 个不同的正则元素 $k_1,\cdots,k_t\in\mathfrak{H}$. 记 $\mu_1,\cdots,\mu_t$ 有

$$\mu_j(X)=\sqrt{-1}B(k_j,X),\quad j=1,\cdots,t,$$

使得

$$\mu_j>\sigma^*(\mu_j),\quad\forall\,\sigma\in W_G,\quad \sigma\neq\mathrm{id},$$

则

$$\cdot F(X)=\sum_j e_j f_{\mu_j}(\exp X).$$

事实上，由 (3) 可知 $\exp\lambda_i(X)$, $1\le i\le s$ 复线性无关．由于

$$\begin{aligned}F(w(X)) &= \sum c_i\exp\lambda_i(w(X))\\ &= \sum c_i\exp(w^*(\lambda_i))(X)=(\text{sign}(w))F(X),\end{aligned}$$

将 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 按照关于 Weyl 群 W_G 作用下的轨道分成若干组，即 λ_i 和 λ_j, $i\neq j$ 称为等价, 如果属于同一轨道. 因此 $F=F_1+\cdots+F_t$, 其中

$$F_j=\sum_i c_{ij}\exp\lambda_{ij}(X),$$

其中 $\{\lambda_{1j},\lambda_{2j},\cdots\}$ 属于同一个轨道，$j=1,2,\cdots,t$. 而不同指标 j 属于不同轨道，且 $\bigcup_j\{\lambda_{1j},\cdots\}=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_t\}$. 显然，$F(w(X))=\text{sign}(w)F(X)$ 蕴含 $F_j(w(X))=\text{sign}(w)F_j(X)$, $1\le j\le t$, $\forall\, w\in W_G$. 在 $\{\lambda_{1j},\lambda_{2j},\cdots\}$ 中取最大元素，无妨记作 λ_{1j}. 于是

$$F_j(X)-c_{1j}f_{\lambda_{1j}}(\exp X)=f_j(X),$$

仍有 $f_j(w(X))=\text{sign}(w)f_j(X)$, $\forall\, w\in W_G$. 由 $c_{1j}\neq 0$ 可知 $c_{1j}f_{\lambda_{1j}}(\exp X)$ 中含所有非零项 $\exp w^*(\lambda_{1j})(X)$, $\forall\, w\in W_G$. 由此易知 $f_j=0$, 即证明了 $F_j(X)=c_{1j}f_{\lambda_{1j}}(\exp X)$. 至此证明了断言.

(6) 任取 $\lambda\in\mathfrak{H}_R^*$, 作函数

$$g_\lambda(h)=g_\lambda(\exp X)=\frac{f_{\lambda+\delta}(\exp X)}{f_\delta(\exp X)},$$

则 g_λ 可开拓到紧李群 G 上成为类函数，仍记作 $g_\lambda(g)$.

事实上，由于任取 $w\in W_G$, 则

$$\begin{aligned}g_\lambda(\exp w(X)) &= \frac{f_{\lambda+\delta}(\exp w(X))}{f_\delta(\exp w(X))}=\frac{(\text{sign}(w))f_{\lambda+\delta}(\exp X)}{(\text{sign}(w))f_\delta(\exp X)}\\ &= g_\lambda(\exp X),\end{aligned}$$

所以证明了断言.

(7) 任取正则元素 $\sqrt{-1}h_\lambda, \sqrt{-1}h_\mu$, 使得 $\lambda > w^*(\lambda), \mu > w^*(\mu), \forall\, w \in W_G, w \neq \mathrm{id}$, 则有

$$\int_G g_\lambda(g)\overline{g_\mu(g)}\Omega(g) = \delta_{\lambda\mu}.$$

事实上，有

$$\begin{aligned}\int_G g_\lambda(g)\overline{g_\mu(g)}\Omega(g) &= \frac{1}{|W_G|}\int_H g_\lambda(h)\overline{g_\mu(h)}|j(h)|^2\Omega(h)\\ &= \frac{1}{|W_G|}\int_H f_{\lambda+\delta}(h)\overline{f_{\mu+\delta}(h)}\left|\frac{j(h)}{f_\delta(h)}\right|^2\Omega(h).\end{aligned}$$

所以由

$$\int_H f_{\lambda+\delta}(h)\overline{f_{\mu+\delta}(h)}\Omega(h) = \delta_{\lambda+\delta,\mu+\delta} = \delta_{\lambda\mu},$$

可知只要证明 $f_\delta(h) = j(h)$ 就够了.

我们证明如下：令

$$j(h) = j(\exp X) = \prod_{\alpha\in\Delta^+}\left(\exp\frac{1}{2}\alpha(X) - \exp\frac{-1}{2}\alpha(X)\right), \quad \forall\ X \in \mathfrak{h}.$$

将乘积展开为和式，则有

$$j(h) = j(\exp X) = \sum(-1)^s\exp\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\varepsilon_i\alpha^{(i)}(X),$$

其中 Δ^+ 中元素按大小次序排为 $\alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(t)}$, 而 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t$ 取 $+1$ 或 -1, 且 $(-1)^s = \prod_{i=1}^{t}\varepsilon_i$, 即 s 为 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t$ 中 -1 的个数. 和号取遍所有可能的负根，因此最高项为 $\exp\delta(X)$, 最低项为 $\exp(-\delta(X))$. 又同类项合并后，仍为三角和. 令 $j(\exp\sigma(X)) = j(\exp X)$, $\forall\,\sigma \in W_G$, $X \in \mathfrak{h}$. 事实上，按乘积表达，每项为

$$\exp\frac{1}{2}(\sigma^*(\alpha))(X) - \exp\frac{-1}{2}(\sigma^*(\alpha)(X)), \quad \forall\ \alpha \in \Delta^+.$$

若 $\sigma^*(\alpha)\in\Delta^+$, 则提供因子 +1; 若 $\sigma^*(\alpha)\in\Delta^-$, 则可写成

$$-(\exp\frac{1}{2}(\sigma^*(-\alpha))(X)-\exp\frac{-1}{2}(\sigma^*(-\alpha)(X)).$$

所以仍为 $j(h)$ 中一项, 又提供因子 -1. 所以若将根系 Δ 中元素排成 $\alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(t)}$, $-\alpha^{(1)},\cdots,-\alpha^{(t)}$, 则 σ^* 作用给出

$$\sigma^*(\alpha^{(1)}),\cdots,\sigma^*(\alpha^{(t)}),-\sigma^*(\alpha^{(1)}),\cdots,-\sigma^*(\alpha^{(t)})$$

仍为根系 Δ 的一个排列. 如果 $\sigma^*(\alpha^{(1)}),\cdots,\sigma^*(\alpha^{(t)})$ 中有 s 个负根, 则 $-\sigma^*(\alpha^{(1)}),\cdots,-\sigma^*(\alpha^{(t)})$ 中在相同位置有 s 个正根. 例如, 作如下对换

$$\begin{aligned}u_1u_2\cdots u_tv_1v_2\cdots v_t &\to u_1u_2\cdots u_tv_tv_1\cdots v_{t-1}\\ &\to u_1\cdots u_{t-1}v_tv_1\cdots v_{t-1}u_t.\end{aligned}$$

所以作了奇数次对换, 于是不难证明经过奇偶和 s 一样的对换次数, 可将它变为标准排列. 于是我们有 $\mathrm{sign}\,(\sigma)=(-1)^s$, 即证明了

$$j(\exp\sigma(X))=\mathrm{sign}\,(\sigma)j(\exp X),\quad \forall\ X\in\mathfrak{H},\ \sigma\in W_G.$$

另一方面, 从 $j(\exp X)$ 的乘积来看, 在 Weyl 群 W_G 中元素 σ 作用下, 实际上是将所有因子作了一个排列, 且乘积展开后每项为 $\exp\delta(X)$, 这里 δ 为为正根系 Δ^+ 中所有正根的和之半, 因此

$$j(\exp X)=\sum_{\sigma\in W_G}(\mathrm{sign}\,(\sigma))\exp\,(\sigma^*(\delta))(X)=f_\delta(\exp X).$$

至此证明了断言.

现在来证明 Weyl 特征公式. 设 (ρ,V) 为紧半单李群 G 的不可约表示, 它决定的最高权为 Λ. 已知特征 $\mathrm{ch}\,_\rho(g)=\mathrm{tr}\,\rho(g)$ 为类函数, 限制在 Cartan 子群 H 上,

$$\mathrm{ch}\,_\rho(\exp w(X))=\mathrm{ch}\,(\exp X),\quad \forall X\in\mathfrak{H},$$

所以

$$\mathrm{ch}\,_\rho(\exp\,(X))f_\delta(\exp X)=F(X),\quad \forall\ X\in\mathfrak{H}.$$

有

$$F(w(X)) = (\mathrm{sign}\,(w))F(X), \quad \forall\ X \in \mathfrak{H}.$$

由 (5) 便证明了存在复数 $d_1 \neq 0, \cdots, d_t \neq 0$, 使得

$$F(X) = \sum_{j=1}^{t} d_j f_{\mu_j}(\exp X).$$

其中 $\sqrt{-1}h_{\mu_j}$ 为不同的正则元素，因此

$$\mathrm{ch}_{\rho}(\exp X) = \sum_{j=1}^{t} d_j g_{\mu_j}(\exp X).$$

今任取 $X \in \mathfrak{H}$, 则

$$\mathrm{ch}_{\rho}(\exp X) = \sum_{\xi \in \Phi} (\dim V_{\xi}) \exp \xi(X).$$

由 (5) 的证明可知

$$d_1, \cdots, d_t \in \{\dim V_{\xi} \mid \forall\ \xi \in \Phi\},$$

所以 $d_1, \cdots, d_t$ 为正整数. 由定理 4.3.13, 有

$$1 = \int_G |\mathrm{ch}_{\rho}(g)|^2 \Omega(g) = \int_G \Big|\sum_{j=1}^{t} d_j g_{\mu_j}(g)\Big|^2 \Omega(g) = \sum_{j=1}^{t} d_j^2.$$

这证明了 $t = 1, d_1 = 1$, 即

$$\mathrm{ch}_{\rho}(\exp X) = g_{\mu_1}(\exp X).$$

注意到对不可约表示 (ρ, V) 的最高权 Λ, 有 $\Lambda > \xi$, $\forall\ \xi \in \Phi, \xi \neq \Lambda$. 又 $\dim V_{\Lambda} = 1$, 比较 $g_{\mu}(\exp X)$ 的首项，便证明了 $\mu_1 = \Lambda$. 所以证明了 Weyl 特征公式

$$\mathrm{ch}_{\rho}(g) = g_{\Lambda}(g),$$

使得任取 $h = \exp X \in H$, 则

$$\mathrm{ch}_{\rho}(\exp X) = g_{\Lambda}(\exp X) = \frac{f_{\Lambda+\delta}(\exp X)}{f_{\delta}(\exp X)}.$$

定理证完.

定理 4.3.14 (Weyl 维数公式) 设 (ρ,V) 为紧连通半单李群 G 的不可约复表示，则表示空间的维数

$$\dim V=\frac{\prod\limits_{\alpha\in\Delta^+}B(h_\alpha,h_{\Lambda+\delta})}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta^+}B(h_\alpha,h_\delta)},$$

其中 Λ 为表示 (ρ,V) 的最高权,

$$\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha.$$

证 由于 $V=\sum\limits_{\xi\in\Phi}V_\xi$ 为子空间直接和，而

$$\mathrm{ch}_\rho(\exp X)=\sum_{\xi\in\Phi}(\dim V_\xi)\exp\xi(X),$$

所以

$$\dim V=\sum_{\xi\in\Phi}\dim V_\xi=\mathrm{ch}_\rho(e),$$

其中 e 为紧李群 G 的单位元素，即 $e=\exp 0$, 而 0 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的零向量. 今由 Weyl 特征公式，有

$$\mathrm{ch}_\rho(\exp X)=\frac{f_{\Lambda+\delta}(\exp X)}{f_\delta(\exp X)},\quad \forall\ X\in\mathfrak{H}.$$

由于

$$\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha\in\mathfrak{H}_R^*,$$

所以 $\sqrt{-1}\delta\in\mathfrak{H}^*$. 又取 $t\in\mathbb{R}$, 则有

$$f_{\Lambda+\delta}(\exp\sqrt{-1}th_\delta)=\sum_{\sigma\in W_G}(\mathrm{sign}\,(\sigma))\exp t\sqrt{-1}(\sigma^*(\Lambda+\delta))(h_\delta)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in W_G} (\operatorname{sign}(\sigma)) \exp t\sqrt{-1}(\Lambda+\delta)(\sigma(h_\delta)) \\
&= \sum_{\sigma \in W_G} (\operatorname{sign}(\sigma)) \exp t\sqrt{-1}B(h_{\Lambda+\delta}, \sigma(h_\delta)) \\
&= \sum_{\sigma \in W_G} (\operatorname{sign}(\sigma)) \exp t\sqrt{-1}B(h_\delta, \sigma^{-1}(h_{\Lambda+\delta})) \\
&= \sum_{\sigma \in W_G} (\operatorname{sign}(\sigma)) \exp t\sqrt{-1}B(h_\delta, \sigma(h_{\Lambda+\delta})) \\
&= \sum_{\sigma \in W_G} (\operatorname{sign}(\sigma)) \exp t\sqrt{-1}\delta(\sigma(h_{\Lambda+\delta})) \\
&= \sum_{\sigma \in W_G} (\operatorname{sign}(\sigma)) \exp t\sqrt{-1}(\sigma^*(\delta))(h_{\Lambda+\delta}) \\
&= f_\delta(t\sqrt{-1}h_{\Lambda+\delta}).
\end{aligned}
$$

然而

$$
\begin{aligned}
&f_\delta(\exp\sqrt{-1}th_{\Lambda+\delta}) \\
= &\prod_{\alpha\in\Delta^+} \left(\exp\frac{1}{2}\alpha(t\sqrt{-1}h_{\Lambda+\delta}) - \exp\frac{-1}{2}\alpha(t\sqrt{-1}h_{\Lambda+\delta})\right) \\
= &\prod_{\alpha\in\Delta^+} \left(\frac{1}{2}\alpha(\sqrt{-1}h_{\Lambda+\delta}) + o(t)^2\right), \\
&f_\delta(\exp\sqrt{-1}th_\delta) \\
= &\prod_{\alpha\in\Delta^+} \left(\exp\frac{1}{2}\alpha(t\sqrt{-1}h_\delta) - \exp\frac{-1}{2}\alpha(t\sqrt{-1}h_\delta)\right) \\
= &\prod_{\alpha\in\Delta^+} (t\alpha(\sqrt{-1}h_\delta) + o(t^2)).
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
g_\Lambda(\exp\sqrt{-1}th_\delta) &= \frac{f_{\Lambda+\delta}(\exp\sqrt{-1}th_{\delta+\Lambda})}{f_\delta(\exp\sqrt{-1}th_\delta)} \\
&= \frac{\prod\limits_{\alpha\in\Delta^+}(\alpha(\sqrt{-1}h_{\Lambda+\delta}) + o(t))}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta^+}(\alpha(\sqrt{-1}h_\delta) + o(t))}.
\end{aligned}
$$

令 $t \to 0$, 便证明了

$$\dim V = \frac{\prod\limits_{\alpha\in\Delta^+} \alpha(h_{\Lambda+\delta})}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta^+} \alpha(h_\delta)} = \frac{\prod\limits_{\alpha\in\Delta^+} B(h_\alpha, h_{\Lambda+\delta})}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta^+} B(h_\alpha, h_\delta)}.$$

定理证完.

现在考虑 Peter-Weyl 定理. 为此, 我们给出紧连通李群 G 上的三种函数空间:

(1) $L^2(G)$ 为李群 G 上的 **平方可积函数类**;

(2) $C(G)$ 为李群 G 上的 **连续函数类**;

(3) $A(G)$ 为李群 G 上的 **平方可积类函数类**.

于是有

$$A(G) \subset L^2(G),$$
$$A(G) \cap C(G) \subset C(G) \subset L^2(G).$$

显然, 它们都是无限维线性空间, 且在函数乘法下构成结合代数. 我们还可以在这些函数空间中用范数来引进拓扑.

(1) 在 $L^2(G)$ 中引进内积

$$(f, g) = \int_G f(x)\overline{g(x)}\Omega(x).$$

由于 $(f,f) = \int_G |f(x)|^2\Omega(x) = 0$ 推出 $f(x)$ 几乎处处等于零, 所以在 $L^2(G)$ 中, 两个函数的差若几乎处处为零, 我们说它们相等.

(2) 在 $C(G) \subset L^2(G)$ 中用上述内积, 于是相等为普通的相等. 这是因为, 连续函数几乎处处为零可推出它等于零.

范数 定义为

$$\|f\| = \sqrt{\left(\int_G |f(x)|^2\Omega(x)\right)}, \quad \forall\ f \in L^2(G).$$

在 $C(G)$ 中我们还可以引进另外一种拓扑, 即定义范数为

$$\|f\|_0 = \operatorname*{Sup}_{x\in G} |f(x)|, \quad \forall\ f \in C(G).$$

由于紧流形上的连续函数必达到极大模，所以这样定义的范数是有意义的.

上面引进的连续函数空间 $C(G)$ 中的两种拓扑 $(C(G),\|\cdot\|)$ 及 $(C(G),\|\cdot\|_0)$ 有如下关系：

$$\|f\| \leq \|f\|_0, \quad \forall\ f \in C(G).$$

事实上，有

$$\|f\|^2 = \int_G |f(x)|^2\Omega(x) \leq \|f\|_0^2 \int_G \Omega(x) = \|f\|_0^2.$$

所以关于拓扑 $(C(G),\|\cdot\|_0)$ 的收敛序列关于拓扑 $(C(G),\|\cdot\|)$ 也必收敛. 反之，不一定.

另一方面，在 $(L^2(G),\|\cdot\|)$ 中有 Cauchy 不等式

$$\|(f,g)\| \leq \|f\|\|g\|, \quad \forall\ f,g \in L^2(G).$$

事实上，由 Cauchy 不等式有

$$\begin{aligned}|(f,g)|^2 &= \Big|\int_G f(x)\overline{g(x)}\Omega(x)\Big|^2 \\ &\leq \int_G |f(x)|^2\Omega(x) \int_G |g(x)|^2\Omega(x) = \|f\|^2\|g\|^2.\end{aligned}$$

同样，在 $(C(G),\|\cdot\|_0)$ 中，内积仍有

$$|(f,g)| \leq \|f\|_0\|g\|_0, \quad \forall\ f,g \in C(G).$$

事实上，有

$$\begin{aligned}|(f,g)| &= \Big|\int_G f(x)\overline{g(x)}\Omega(x)\Big| \leq \int_G |f(x)||g(x)|\Omega(x) \\ &\leq \int_G \|f\|_0\|g\|_0\Omega(x) = \|f\|_0\|g\|_0 \int_G \Omega(x) = \|f\|_0\|g\|_0.\end{aligned}$$

由泛函分析可知赋范空间 $(E,|\cdot|_E)$ 到赋范空间 $(E',\|\cdot\|_{E'})$ 内的线性算子 $\mathcal{A}$ 称为**连续的**, 如果存在正常数 λ, 使得

$$\|\mathcal{A}(x)\|_{E'} \leq \lambda\|x\|_E, \quad \forall\ x \in E.$$

称为**紧的**，如果任取 E 中有界子集 B，则 $\mathcal{A}(B)$ 中的任意序列必在 E' 中有收敛子序列.

与直线上的有界闭连通区间 $[a,b]$ 上的连续函数空间 $\mathrm{C}[a,b]$ 的 Ascoli 定理一样证明，可以得到

Ascoli 定理 紧连通流形 M 上的连续函数空间 $\mathrm{C}(M)$ 作为赋范空间 $(\mathrm{C}(M),\|\cdot\|_0)$，其中有界的等度连续函数集 B 中的任一序列必有收敛子序列. 这里等度连续定义为任取 $\varepsilon>0$，存在流形 M 中点 x_0 的邻域 U_0，使得 $x\in U_0$ 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\ \forall\ f\in B$.

利用 Ascoli 定理，有

引理 4.3.15 设 M 为紧连通流形，$F(x,y)$ 为 $M\times M$ 上的非零连续函数，则积分算子

$$\mathcal{A}: f(x)\to\int_M F(x,y)f(y)\Omega(y),\quad \forall\ x\in M,\ f\in\mathrm{C}(M)$$

为 $(\mathrm{C}(M),\|\cdot\|)$ 到 $(\mathrm{C}(M),\|\cdot\|_0)$ 内的紧连续线性算子.

证 显然，任取 $f\in\mathrm{C}(M)$，则 $\mathcal{A}(f)\in\mathrm{C}(M)$，所以 $\mathcal{A}$ 为线性空间 $C(M)$ 到自身内的线性算子. 今

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}f\|_0&=\operatorname*{Sup}_{x\in M}\Big|\int_M F(x,y)f(y)\Omega(y)\Big|\\&\le\int_M\big(\operatorname*{Sup}_{x,y\in M}|F(x,y)|\big)\big(\operatorname*{Sup}_{y\in M}|f(y)|\big)\Omega(y)\\&=\|f\|_0\operatorname*{Sup}_{x,y\in M}|F(x,y)|.\end{aligned}$$

注意到 $F(x,y)$ 在 $M\times M$ 上连续，又 $M\times M$ 紧，所以

$$0<a=\operatorname*{Sup}_{(x,y)\in M\times M}|f(x,y)|<+\infty.$$

这证明了算子 $\mathcal{A}$ 连续.

下面证 $\mathcal{A}$ 为紧算子. 在赋范空间 $(\mathrm{C}(M),\|\cdot\|)$ 中任取有界集 B，上界为 k，即 $\|f\|\le k,\ \forall\ f\in B$. 为了证集合 $\mathcal{A}(B)$ 中的任意序

列必有收敛子序列，由 Ascoli 定理可知，只要证集合 $\mathcal{A}(B)$ 等度连续就够了．令任取 $\varepsilon>0$, $f\in B$, $x_0, x\in M$, 则

$$
\begin{aligned}
&|(\mathcal{A}(f))(x)-(\mathcal{A}(f))(x_0)|^2=\Big|\int_M (F(x,y)-F(x_0,y))f(y)\Omega(y)\Big|^2\\
\leq&\int_G |F(x,y)-F(x_0,y)|^2\Omega(y)\int_G |f(y)|^2\Omega(y)\\
\leq& k^2\int_G |F(x,y)-F(x_0,y)|^2\Omega(y).
\end{aligned}
$$

由于 $F(x,y)$ 在 $M\times M$ 上连续，所以任取 $\varepsilon>0,(x_0,y_0)\in M\times M$, 则存在点 x_0 的邻域 $U_{x_0}(y_0)$ 及点 y_0 的邻域 $V_{y_0}(x_0)$, 使得若 $(x,y)\in U_{x_0}(y_0)\times V_{y_0}(x_0)$, 则有 $|F(x,y)-F(x_0,y_0)|<\varepsilon/2k$. 因此

$$
\begin{aligned}
|F(x,y)-F(x_0,y)|\leq&|F(x,y)-F(x_0,y_0)|+|F(x_0,y_0)-F(x_0,y)|\\
<&\varepsilon/k.
\end{aligned}
$$

取定 $x_0\in M$, 则 $\bigcup\limits_{y_0\in M} V_{y_0}(x_0)=M$. 由 M 紧，所以存在有限个点 $y_1,,\cdots,y_s\in M$, 使得 $\bigcup\limits_i V_{y_i}(x_0)=M$. 因此有点 x_0 的邻域

$$
U=\bigcap_{i=1}^{s} U_{x_o}(y_i).
$$

而 $U\times V_{y_j}(x_0)\subset U_{x_0}(y_j)\times V_{y_j}(x_0)$, 因此任取 $x\in U, y\in V_{y_j}(x_0)$, 必有 $|F(x,y)-F(x_0,y)|<\varepsilon$, $1\leq j\leq s$. 这证明了

$$
|F(x,y)-F(x_0,y)|<\varepsilon/k,\quad \forall\ x\in U.
$$

这里 U 和点 $y\in M$ 无关．于是

$$
|(\mathcal{A}(f))(x)-(\mathcal{A}(f))(x_0)|^2\leq\varepsilon^2,\quad \forall f\in B,\ x\in U.
$$

这证明了 $C(M)$ 中的函数集 $\mathcal{A}(B)$ 在点 x_0 等度连续，即算子 $\mathcal{A}$ 为紧算子．证完.

熟知内积空间 E 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 称为 **对称算子**, 如果

$$(\mathcal{A}(x), y) = (x, \mathcal{A}(y)), \quad \forall\ x, y \in E.$$

当内积空间 E 为复时, 内积为正定 Hermite 双线性函数, 所以易证 $\mathcal{A}$ 的特征根必为实数, 且不同特征根对应的特征向量必互相正交. 回到引理 4.3.15, 我们知道、对内积

$$(f, g) = \int_M f(x)\overline{g(x)}\Omega(x), \quad \forall\ f, g \in \mathrm{C}(M),$$

若算子 $\mathcal{A}$ 对称, 即

$$(\mathcal{A}(f), g) = (f, \mathcal{A}(g)),$$

或

$$\int_M (\mathcal{A}(f))(x)\overline{g(x)}\Omega(x) = \int_M f(x)\overline{(\mathcal{A}(g))(x)}\Omega(x),$$

即

$$\begin{aligned} &\int_M \int_M F(x,y)f(y)\overline{g(x)}\Omega(x)\Omega(y) \\ = &\int_M \int_M f(x)\overline{F(x,y)g(y)}\Omega(x)\Omega(y), \quad \forall\ f, g \in \mathrm{C}(M), \end{aligned}$$

当且仅当

$$F(x,y) = \overline{F(y,x)}.$$

我们有

引理 4.3.16 设若引理 4.3.15 给出的算子 $\mathcal{A}$ 对称, 即有

$$F(x,y) = \overline{F(y,x)}, \quad \forall\ x, y \in M,$$

则算子 $\mathcal{A}$ 关于赋范空间 $(\mathrm{C}(M), \|\cdot\|)$ 的范数

$$\|\mathcal{A}\| = \operatorname*{Sup}_{f \in \mathrm{C}(M), \|f\|=1} \|\mathcal{A}(f)\|$$

有

$$\|\mathcal{A}\| = \operatorname*{Sup}_{f\in C(M),\|f\|=1} |(\mathcal{A}(f), f)|.$$

且 $\|\mathcal{A}\|$ 或 $-\|\mathcal{A}\|$ 为算子 $\mathcal{A}$ 的特征根.

证 今任取 $f \in C(M), \|f\| = 1$, 则有

$$|(\mathcal{A}(f), f)| \leq \|\mathcal{A}(f)\|\|f\| = \|\mathcal{A}(f)\| \leq \|\mathcal{A}\|.$$

记

$$a = \operatorname*{Sup}_{f\in C(M),\|f\|=1} |(\mathcal{A}(f), f)|.$$

这证明了 $a \leq \|\mathcal{A}\|$. 反之，记

$$f_0 = \|\mathcal{A}(f)\|^{-1}\mathcal{A}(f),$$

显然 $f_0 \in C(M)$, 且 $\|f_0\| = 1$. 而由 $(\mathcal{A}f, f_0) = (f, \mathcal{A}(f_0))$, 有

$$(\mathcal{A}(f \pm f_0), f \pm f_0) = (\mathcal{A}(f), f) + (\mathcal{A}(f_0), f_0) \pm 2(\mathcal{A}(f), f_0).$$

由于 $(\mathcal{A}(f), f_0) = \|\mathcal{A}(f)\|^{-1}(\mathcal{A}(f), \mathcal{A}(f)) = \|\mathcal{A}(f)\|$. 所以

$$\begin{aligned}4\|\mathcal{A}(f)\| &= (\mathcal{A}(f + f_0), f + f_0) - (\mathcal{A}(f - f_0), f - f_0)\\ &\leq (\|f + f_0\|^2 + \|f - f_0\|^2)a = 4a.\end{aligned}$$

这证明了 $\|\mathcal{A}(f)\| \leq a$, 即 $\|\mathcal{A}\| \leq a$. 至此证明了前一断言.

今 $\|\mathcal{A}\| = \operatorname*{Sup}_{f\in C(M),\|f\|=1} |(\mathcal{A}(f), f)|$, 所以存在序列 $\|f_i\|$ 适合 $\|f_i\| = 1, \lim_{i\to\infty} |(\mathcal{A}(f_i), f_i)| = \|\mathcal{A}\|$. 注意到 $\mathcal{A}$ 为对称算子，因此 $(\mathcal{A}(f_i), f_i)$ 为实数，所以必有无限多个指标 i, 使得 $(\mathcal{A}(f_i), f_i)$ 同时大于 0 或同时小于 0. 因此无妨设序列 $\{f_i\}$ 使得 $(\mathcal{A}(f_i), f_i)$ 同号. 于是

$$\lim_{i\to\infty} (\mathcal{A}(f_i), f_i) = a,$$

其中 $a = \|\mathcal{A}\|$ 或 $a = -\|\mathcal{A}\|$. 由引理假设 $\mathcal{A} \neq 0$, 所以 $a \neq 0$. 另一方面，由于算子 $\mathcal{A}$ 紧，而 $\{f_i\}$ 具有上界 1, 所以序列 $\{\mathcal{A}(f_i)\}$ 必有收敛子序列. 无妨设 $\{\mathcal{A}(f_i)\}$ 收敛于 f_0.

令

$$
\begin{aligned}
0 \leq & \|\mathcal{A}(f_i) - af_i\|^2 = \|\mathcal{A}(f_i)\|^2 + a^2 - 2a(\mathcal{A}(f_i), f_i) \\
\leq & \|\mathcal{A}\|^2 + a^2 - 2a(\mathcal{A}(f_i), f_i) = 2a^2 - 2a(\mathcal{A}(f_i), f_i),
\end{aligned}
$$

当 $i \to \infty$ 时有

$$
0 \leq \|\mathcal{A}(f_i) - af_i\|^2 \to 2a^2 - 2a^2 = 0.
$$

这证明了 $\mathcal{A}(f_i) - af_i$ 按照范数 $\|\cdot\|$ 收敛于零. 已知 $\mathcal{A}(f_i)$ 收敛于 f_0, 这证明了序列 af_i 收敛于 f_0.

今 $a \neq 0$, 所以 $\{f_i\}$ 收敛于 $a^{-1}f_0$, 于是 $\{\mathcal{A}(f_i)\}$ 收敛于 $f_0 = \mathcal{A}(a^{-1}f_0)$, 即 $\mathcal{A}(f_0) = af_0$. 由于 $a \neq 0$, 若 $f_0 = 0$, 则 $\{f_i\}$ 收敛于零. 但是 $\|f_i\| = 1, i = 1, 2, \cdots$, 这导出矛盾. 所以 $f_0 \neq 0$, 即 f_0 为属于特征根 a 的特征向量. 证完.

为了证明 Peter-Weyl 定理, 我们给定紧连通李群 G. 今任取 $f \in L^2(G)$, $g \in G$, 则

$$
(L_g^* f)(x) = f(gx), \quad (R_g^* f)(x) = f(xg), \quad \forall\ x \in G.
$$

任取 $g, g' \in G$, 则

$$
(R_{g-1})^* = R_{g-1}^*, \quad R_e^* = \mathrm{id},
$$

又

$$
(R_g^* R_{g'}^* f)(x) = (R_{g'}^* f)(xg) = f(xgg') = (R_{gg'}^* f)(x),
$$

这证明了

$$
R_g^* R_{g'}^* = R_{gg'}^*.
$$

因此线性空间 $L^2(G)$ 上的线性算子集 $\{R_g^* \mid \forall\ g \in G\}$ 构成普通群, 而且和李群 G 在映射 $\rho_r : g \to R_g^*$ 下为普通群同构, 即 $\rho_r(g) = R_g^*$, $\forall\ g \in G$, 称为李群 G 的 **右正则表示**, 记作 ρ_r. 显然, 在 $\{R_g^* \mid \forall\ g \in G\}$ 中可引进紧李群结构, 使得普通群同构 ρ_r 为李群同构. 右正则表示 ρ_r 实际上是紧李群 G 的无限维表示.

我们在紧连通李群 G 的平方可积函数类 $L^2(G)$ 中引进一个子空间 $B(G)$, 实际上

$$B(G) \subset \mathrm{C}(G) \subset L^2(G).$$

它定义如下:

定义 4.3.17 紧连通李群 G 上的平方可积函数空间 $L^2(G)$ 中元素 f 称为 **表示函数**, 如果在右正则表示 ρ_r 下包含 f 的最小不变子空间为有限维线性空间. 表示函数全体构成集合 $B(G)$.

引理 4.3.18 设 (ρ, V) 为紧连通李群 G 的表示, 在表示空间 V 中任取基, 记表示空间 V 上的线性变换 $\rho(g)$ 的方阵表示为

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} a_{11}(g) & \cdots & a_{1n}(g) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(g) & \cdots & a_{nn}(g) \end{pmatrix},$$

则 $a_{ij}(g)$ 为李群 G 上的解析函数, 且 $a_{ij}(g) \in B(G)$, $1 \leq i,j \leq n = \dim V$.

证 任取 $g, g' \in G$, 所以

$$(R_{g'}^* a_{ij})(g) = a_{ij}(gg').$$

然而 $\rho(gg') = \rho(g)\rho(g')$, 即有

$$a_{ij}(gg') = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}(g)a_{pj}(g'), \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

因此考虑由解析函数 $a_{pq}(g)$,$1 \leq p, q \leq n$ 线性生成的线性空间 $V_1 \subset \mathrm{C}(G)$, 自然 $1 \leq \dim V_1 \leq n^2$. 又任意取定 $g' \in G$, 则

$$R_{g'}^*(a_{ij}) = \sum_{p=1}^{n} a_{pj}(g')a_{ip} \in V_1.$$

这证明了 V_1 为不变子空间, 所以 a_{ij} 为表示函数. 证完.

现在考虑紧连通李群 G 的所有 (有限维) 表示 (ρ, V). 在表示空间 V 中任取基, 则 $\rho(g)$ 的方阵表示给出的 $(\dim V)^2$ 个函数必解析. 当取遍所有表示空间的基及所有表示时, 所有这些解析函数线性生成李群 G 的平方可积函数空间 $L^2(G)$ 中的子空间 $B(G)'$. 我们有

引理 4.3.19 子空间

$$B(G)' = B(G).$$

证 由引理 4.3.18 可知 $B(G)' \subset B(G)$. 现在证明 $B(G) \subset B(G)'$. 事实上, 任取 $f \in B(G)$, 由表示函数的定义可知, 在 $L^2(G)$ 中包含 f 的极小不变子空间 $\mathfrak{M}$ 为有限维线性空间. 在其中取基 $f_1, \cdots, f_s$, 于是存在复数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 使得 $f = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i f_i$. 另一方面, 由不变性有

$$R_g^* f_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ji}(g) f_j, \quad 1 \le i \le s, \quad \forall\ g \in G.$$

且由右正则表示 ρ_r 为李群同构可知, 函数 a_{ij} 在紧李群 G 上解析, 即 $a_{ij} \in L^2(G)$. 再由 $R_g^* R_{g'}^* = R_{gg'}^*$, 以及

$$R_{gg'}^* f_i = \sum_j a_{ji}(gg') f_j,$$

所以

$$R_g^*(R_{g'}^* f_i) = R_g^*(\sum_j a_{ji}(g') f_j) = \sum_{j,k} a_{ji}(g') a_{kj}(g) f_k,$$

即

$$a_{ki}(gg') = \sum_{j=1}^{s} a_{kj}(g) a_{ji}(g'), \quad 1 \le k, i \le s.$$

这证明了

$$\xi(g) = \begin{pmatrix} a_{11}(g) & \cdots & a_{1s}(g) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1}(g) & \cdots & a_{ss}(g) \end{pmatrix}, \quad \forall\ g \in G$$

给出紧连通李群 G 的方阵表示，所以 $a_{ij}(g) \in B(G)'$.

再由

$$(R_g^* f_i)(g') = \sum_{j=1}^{s} a_{ji}(g) f_j(g') = f_i(g'g), \quad 1 \leq i \leq s,$$

取 g' 为紧李群 G 的单位元素 e, 则有

$$f_i(g) = \sum_{j=1}^{2} f_j(e) a_{ji}(g) \in B(G)'.$$

所以证明了 $f = \sum \lambda_i f_i \in B(G)'$. 至此证明了 $B(G) \subset B(G)'$. 引理证完.

引理 4.3.20 取遍紧连通李群 G 的互不等价的不可约表示 (ρ_0, V_0), 在 V_0 中取定关于 $\rho_0(G)$ 不变内积的标准正交基，相应的

$$\rho_0(g) = \begin{pmatrix} a_{11}(g) & \cdots & a_{1m}(g) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(g) & \cdots & a_{mm}(g) \end{pmatrix}, \quad \forall\ g \in G, \quad m = \dim V_0,$$

有 $(\dim V_0)^{\frac{1}{2}} a_{ij}$,$1 \leq i, j \leq \dim V_0$, 它们的全体构成无限维线性空间 $B(G)$ 的一组标准正交基.

证 由引理 4.3.7 可知，当遍历所有互不等价的不可约表示时，所得的函数 $\sqrt{(\dim V_0)} a_{ij}$ 全体为两两正交的单位向量. 我们来证明它构成一组标准正交基. 事实上，任取紧连通李群 G 的表示 (ρ, V), 在表示空间 V 中任取基 $e_1, \cdots, e_n$, 则有方阵表示

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} b_{11}(g) & \cdots & b_{1n}(g) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(g) & \cdots & b_{nn}(g) \end{pmatrix}, \quad \forall\ g \in G.$$

由定理 4.3.3 可知表示 (ρ, V) 完全可约，所以 V 能分解为极小不变子空间直接和 $V = V_1 + \cdots + V_s$，相应的表示 ρ 限制在 V_i 上为不可约表示．且记 (x, y) 为表示 (ρ, V) 的 $\rho(G)$ 不变内积，则 $(V_i, V_j) = 0$, $i \neq j$. 所以在每个 V_i 中取关于内积 (x, y) 的标准正交基，它们拼成表示空间 V 的标准正交基．在这组基下，$\rho(g)$ 有方阵表示

$$\rho(g) = \operatorname{diag}(\rho_1(g), \cdots, \rho_s(g)), \quad \forall\ g \in G.$$

由于基变换公式由非异常数方阵 P 给出，这证明了

$$\begin{pmatrix} b_{11}(g) & \cdots & b_{1n}(g) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(g) & \cdots & b_{nn}(g) \end{pmatrix} = P\operatorname{diag}(\rho_1(g), \cdots, \rho_s(g))P^{-1}.$$

由此可知，为了证明引理，只要证明 $b_{ij}(g), 1 \leq i, j \leq n$ 都是引理叙述中给出的标准正交基的有限线性组合，因此只要证明不可约表示 $(\rho_i, V_i), 1 \leq i \leq s$ 导出的方阵表示有此性质就够了．而任取不可约表示 (ρ, V), 在 V 中任取关于 $\rho(G)$ 不变内积的标准正交基，则方阵表示给出的函数 (由于等价的表示的方阵表示间只差一个常数非异方阵的相似) 必为引理中给出的标准正交基的有限线性组合．引理证完．

实际上，我们在紧连通李群 G 的连续函数空间 $C(G)$ 中找到了一个子空间 $B(G)$ 的一组标准正交基．进一步，有

引理 4.3.21 子空间 $B(G)$ 为平方可积函数空间 $L^2(G)$ 的结合子代数.

证 显然，只要对紧连通李群 G 的两个表示 (ρ_i, V_i), 在 V_i 中任取基，记

$$\rho_i(g) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(i)}(g) & \cdots & a_{1n_i}^{(i)}(g) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n_i1}^{(i)}(g) & \cdots & a_{n_in_i}^{(i)}(g) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

则 $a_{jk}^{(1)}(g)a_{pq}^{(2)}(g) \in B(G)$. 事实上，考虑表示空间 V_1 和 V_2 的张量积 $V_1 \otimes V_2$. 我们引进映射

$$g \to \rho_1(g) \otimes \rho_2(g), \quad \forall\ g \in G,$$

其中

$$(\rho_1(g) \otimes \rho_2(g))(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(g)v_1 \otimes \rho_2(g)v_2,$$
$$\forall\ g \in G,\ v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$$

易证这是紧连通李群 G 的表示，相应的方阵表示为方阵 $\rho_1(g)$ 和 $\rho_2(g)$ 的张量积，所以证明了 $a_{ij}^{(1)}(g)a_{pq}^{(2)}(g) \in B(G)$. 引理证完.

引理 4.3.22 子空间 $B(G)$ 为 $L^2(G)$ 中关于右正则表示的不变子空间.

证 由引理 4.3.18, 有

$$R_g^* a_{ij} = \sum_k a_{kj}(g)a_{ik}, \quad \forall\ g \in G.$$

所以任取 $f \in B(G)$, 则有 $R_g^* f \in B(G), \forall\ g \in G$. 即 $B(G)$ 为 $\mathrm{C}(G)$ 中关于表示 $g \to R_g^*, \forall\ g \in G$ 的不变子空间. 证完.

引理 4.3.23 $f \in B(G)$ 当且仅当 $\overline{f} \in B(G)$.

证 显然，只要证引理 4.3.20 给出的基元素 $\sqrt{\dim V_0}a_{ij}$ 可推出 $\sqrt{\dim V_0}\overline{a}_{ij} \in B(G)$. 事实上，由于 $\rho(g) = (a_{ij})$ 为酉方阵，即有 $\overline{\rho(g)}' = \rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1})$, 所以断言显然成立. 证完.

我们知道，在紧连通李群 G 上的平方可积函数空间 $L^2(G)$ 上可以定义

$$(f,h) = \int_G f(g)\overline{h(g)}\Omega(g),$$

它在 $\mathrm{C}(G)$ 中几乎处处相等意义下为内积. 所以可以引进范数

$$\|f\| = \sqrt{\int_G |f(g)|^2\Omega(g)}, \quad \forall f \in \mathrm{C}(G).$$

现在给出

定理 4.3.24(Peter-Weyl 定理) 设 G 为紧连通李群, 记 $\mathrm{C}(G)$ 为李群 G 上的复连续函数类, $B(G)$ 为李群 G 的表示函数类. 则 $B(G)$ 为赋范空间 $(\mathrm{C}(G), \|\cdot\|_0)$ 中的稠密子集.

证 任取自然数 m, 任取 $f_0 \in \mathrm{C}(G)$. 由李群 G 紧可知, 存在单位邻域 W_m, 使得 $|f_0(xg) - f_0(g)| < \dfrac{1}{3m}$, $\forall\, x \in W_m, g \in G$. 因此存在单位标架 (V_m, φ), 使得 $V_m = V_m^{-1}, V_m^2 \subset W_m$. 又存在 $u_m(x) \in \mathrm{C}(G)$, 使得 $u_m(x)$ 的紧支柱在 V_m 中, 且 $0 \leq u_m(x) < +\infty$, $u_m(x^{-1}) = u_m(x)$, $\int_G u_m(x)\Omega(x) = \int_G \Omega(x) = 1$. 今记

$$F_m(g,h) = u_m(hg^{-1}), \quad \forall\, g,h \in G.$$

显然 $F_m(g,h)$ 在 $G \times G$ 上连续, 且

$$\begin{aligned} F_m(g,h) &= u_m(hg^{-1}) = u_m(gh^{-1}) \\ &= F_m(h,g) = \overline{F_m(h,g)}, \quad \forall\, g,h \in G. \end{aligned}$$

因此积分算子

$$\mathcal{A}_m : f(g) \to \int_G F_m(g,h)f(h)\Omega(h) = \int_G u_m(hg^{-1})f(h)\Omega(h)$$

是 $(\mathrm{C}(G), \|\cdot\|)$ 到 $(\mathrm{C}(G), \|\cdot\|_0)$ 内的紧连续线性算子, 且为对称算子.

首先

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_m(f_0) - f_0\|_0 &= \operatorname*{Sup}_{g\in G}\left|\int_G F_m(g,h)f_0(h)\Omega(h) - f_0(g)\right| \\ &= \operatorname*{Sup}_{g\in G}\left|\int_G u_m(h)f_0(hg)\Omega(h) - f_0(g)\right| \\ &\leq \operatorname*{Sup}_{g\in G}\int_G u_m(h)|f_0(hg) - f_0(g)|\Omega(h) \\ &= \operatorname*{Sup}_{g\in G}\int_{V_m} u_m(h)|f_0(hg) - f_0(g)|\Omega(h) \\ &\leq \frac{1}{3m} < \frac{1}{2m}. \end{aligned}$$

因此如果存在 $f_m \in B(G)$, 使得

$$\|\mathcal{A}_m(f_m) - \mathcal{A}_m(f_0)\|_0 < \frac{1}{2m},$$

则有

$$\|\mathcal{A}_m(f_m) - f_0\|_0 \leq \|\mathcal{A}_m(f_m) - \mathcal{A}_m(f_0)\|_0 + \|\mathcal{A}_m(f_0) - f_0\|_0 < \frac{1}{m}.$$

如果 $g_m = \mathcal{A}_m(f_m) \in B(G)$, 则可证 $B(G)$ 中序列 $\{g_m\}$ 按范数 $\|\cdot\|_0$ 收敛于 f_0. 由 f_0 任取, 便证明了 $B(G)$ 按范数 $\|\cdot\|_0$ 在 $\mathrm{C}(G)$ 中稠密.

下面分别证明若干结论:

(1) 设 a 为算子 $\mathcal{A}_m$ 的特征根, 子空间

$$\mathfrak{M}_a = \{f \in \mathrm{C}(G) \mid \mathcal{A}(f) = af\}$$

称为属于特征根 a 的**特征子空间**. 我们来证当 $a \neq 0$ 时 $\dim \mathfrak{M}_a < +\infty$.

事实上, 若 $\dim \mathfrak{M}_a = +\infty$, 则由 Schmidt 正交化可知, 在 $\mathfrak{M}_a$ 中存在关于内积

$$(f, h) = \int_G f(x)\overline{h(x)}\Omega(x)$$

的两两正交的单位向量序列 $\{f_i\}$, 即 $(f_i, f_j) = \delta_{ij}$. 由于算子 $\mathcal{A}_m$ 紧, 所以在序列 $\{\mathcal{A}_m(f_i)\}$ 中存在关于范数 $\|\cdot\|$ 的收敛子序列, 从而无妨设 $\{\mathcal{A}_m(f_i)\}$ 收敛. 但是由 $\mathfrak{M}_a$ 的定义可知

$$\|\mathcal{A}_m(f_i) - \mathcal{A}_m(f_j)\|^2 = a^2\|f_i - f_j\|^2 = 2a^2, \quad i \neq j$$

推出序列 $\{\mathcal{A}_m(f_i)\}$ 不收敛. 这就导出矛盾, 因此证明了 (1).

(2) 属于特征根 a 的特征子空间 $\mathfrak{M}_a$ 在右正则表示 ρ_r 下不变.

事实上，任取 $f\in\mathfrak{M}_a, g\in G$, 则

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}_m(\rho_r(g)f))(x) &= \int_G u_m(yx^{-1})(R_g^*(f))(y)\Omega(y)\\
&= \int_G u_m(yx^{-1})f(yg)\Omega(y)\\
&= \int_G u_m(z(xg)^{-1})f(z)\Omega(z)\\
&= (\mathcal{A}_m f)(xg) = (af)(xg) = a(\rho_r(g)f)(x),
\end{aligned}
$$

其中 $x\in G$. 这证明了 $\mathcal{A}_m(\rho_r(g)f) = a(\rho_r(g)f)$, 即 $\rho_r(g)f\in\mathfrak{M}_a, \forall\ g\in G$. 所以 (2) 成立.

(3) $\mathfrak{M}_a\subset B(G)$, $\forall\ a\neq 0$, 因此 $\mathfrak{M}=\sum\limits_{a\neq 0}\mathfrak{M}_a\subset B(G)$.

事实上，任取 $f\in\mathfrak{M}_a$, 由 (1) 及 (2) 可知 $\mathfrak{M}_a$ 为有限维不变子空间，所以 f 是表示函数. 这证明了 (3).

(4) $C(G)$ 中子空间

$$\mathfrak{M}=\sum_{a\neq 0}\mathfrak{M}_a$$

关于范数 $\|\cdot\|_0$ 的闭包 $\overline{\mathfrak{M}}$ 关于内积 (f,g) 的正交补 $(\overline{\mathfrak{M}})^\perp\subset\mathfrak{M}_0$.

事实上，任取 $f\in\mathfrak{M}$, 则 $\mathcal{A}_m(f)\in\mathcal{A}_m(\mathfrak{M})\subset\sum\limits_{a\neq 0}\mathcal{A}_m(\mathfrak{M}_a)=\sum\limits_{a\neq 0}\mathfrak{M}_a=\mathfrak{M}$, 即 $\mathcal{A}_m(\mathfrak{M})\subset\mathfrak{M}$, 所以有 $\mathcal{A}_m(\overline{\mathfrak{M}})\subset\overline{\mathfrak{M}}$. 任取 $f\in\overline{\mathfrak{M}}$, $g\in(\overline{\mathfrak{M}})^\perp$, 则 $\mathcal{A}_m(f)\in\overline{\mathfrak{M}}$, 于是 $(\mathcal{A}_m(f),g)=0$. 由 $\mathcal{A}_m$ 对称可知 $(f,\mathcal{A}_m(g))=0$, 即 $\mathcal{A}_m(g)\in(\overline{\mathfrak{M}})^\perp$. 这证明了 $\mathcal{A}_m((\overline{\mathfrak{M}})^\perp)\subset(\overline{\mathfrak{M}})^\perp$. 今显然算子 $\mathcal{A}_m$ 限制在 $(\overline{\mathfrak{M}})^\perp$ 中仍为紧对称连续线性算子，所以 $\mathcal{A}_m$ 在 $(\overline{\mathfrak{M}})^\perp$ 中属于特征根 b 的特征向量 f_b 有 $\mathcal{A}_m(f_b)=bf_b$. 若 $b\neq 0$ 时，则 $f_b\in\mathfrak{M}\subset\overline{\mathfrak{M}}$. 这和 $\overline{\mathfrak{M}}\cap(\overline{\mathfrak{M}})^\perp=0$ 矛盾. 所以证明了 $\mathcal{A}_m$ 限制在子空间 $(\overline{\mathfrak{M}})^\perp$ 上只有特征根零. 由 $\mathcal{A}_m$ 的对称性可知 $\mathcal{A}_m f=0, \forall\ f\in(\overline{\mathfrak{M}})^\perp$. 这证明了 (4).

(5) 子空间 $\mathfrak{M}$ 关于范数 $\|\cdot\|_0$ 的闭包 $\overline{\mathfrak{M}}$ 有性质:

$$\mathcal{A}_m(\overline{\mathfrak{M}})=\overline{\mathcal{A}_m(\mathfrak{M})}=\mathcal{A}_m(C(G)).$$

事实上，由 $\mathcal{A}_m$ 连续可知 $\mathcal{A}_m(\overline{\mathfrak{M}}) = \overline{\mathcal{A}_m(\mathfrak{M})}$. 由于 (4) 证明了 $\mathrm{C}(G) = \overline{\mathfrak{M}} + \mathfrak{M}_0$, 所以

$$\mathcal{A}_m(\mathrm{C}(G)) = \mathcal{A}_m(\overline{\mathfrak{M}}) = \overline{\mathcal{A}_m(\mathfrak{M})}.$$

这证明了 (5).

(6) 由 (5) 显然有，对 $f_0 \in \mathrm{C}(G)$, 存在序列 $f_k^{(m)} \in \mathfrak{M}$, 使得序列 $\{\mathcal{A}_m(f_k^{(m)})\}$ 关于范数 $\|\cdot\|_0$ 收敛于 $\mathcal{A}_m f_0$. 因此存在 $f_m \in \mathfrak{M}$, 使得

$$\|\mathcal{A}_m(f_m) - \mathcal{A}_m(f_0)\|_0 < \frac{1}{2m}.$$

现在来证明定理. 由上面讨论可知, 只要证明 $\mathcal{A}_m(f_m) \in B(G)$ 就行了. 今

$$\mathcal{A}_m(\mathfrak{M}) \subset \sum_{a \neq 0} \mathcal{A}_m(\mathfrak{M}_a) = \sum_{a \neq 0} \mathfrak{M}_a = \mathfrak{M}.$$

而由 (3) 已知 $\mathfrak{M} \subset B(G)$, 所以 $\mathcal{A}_m(f_m) \in B(G)$. 定理证完.

定理 4.3.25 (Peter-Weyl 定理) 设 G 为紧连通李群，记 $A(G)$ 为李群 G 上的复连续类函数类. 记 $B(G)_0$ 为李群 G 的所有不可约表示的特征线性生成的复线性空间，则 $B(G)_0$ 按照范数 $\|\cdot\|_0$ 在 $A(G)$ 中稠密.

证 任取类函数 $f \in A(G)$, 则有 $f \in \mathrm{C}(G)$, 且 $f(xyx^{-1}) = f(y)$, $\forall\, x, y \in G$. 由定理 4.3.24, 所以任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $f_\varepsilon \in C(G)$, 使得 $\|f_\varepsilon - f\|_0 < \varepsilon$. 记

$$F_\varepsilon(y) = \int_G f_\varepsilon(xyx^{-1})\Omega(x),$$

显然 $F_\varepsilon(y) \in \mathrm{C}(G)$. 且

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(zyz^{-1}) &= \int_G f_\varepsilon(xzyz^{-1}x^{-1})\Omega(x) \\ &= \int_G f_\varepsilon(xyx^{-1})\Omega(x) = F_\varepsilon(y), \quad \forall\, y, z \in G. \end{aligned}$$

这证明了 $F_\varepsilon \in A(G)$. 而

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon - f\|_0 &= \operatorname*{Sup}_{x\in G}|f_\varepsilon(x) - f(x)| = \operatorname*{Sup}_{x,y\in G}|f_\varepsilon(yxy^{-1}) - f(yxy^{-1})| \\ &= \operatorname*{Sup}_{x,y\in G}|f_\varepsilon(yxy^{-1}) - f(x)| < \varepsilon,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\|F_\varepsilon - f\|_0 &= \operatorname*{Sup}_{x\in G}|F_\varepsilon(x) - f(x)| = \operatorname*{Sup}_{x\in G}\left|\int_G f_\varepsilon(yxy^{-1})\Omega(y) - f(x)\right| \\ &= \operatorname*{Sup}_{x\in G}\left|\int_G (f_\varepsilon(yxy^{-1}) - f(x))\Omega(y)\right| \\ &\le \int_G \operatorname*{Sup}_{x,y\in G}|f_\varepsilon(yxy^{-1}) - f(x)|\Omega(y) < \varepsilon.\end{aligned}$$

问题化为证明 $F_\varepsilon \in B(G)_0$.

今任取紧李群 G 上的不可约表示 (ρ, V). 在表示空间 V 中取标准正交基 $e_1, \cdots, e_s$, 则

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} a_{11}(g) & \cdots & a_{1s}(g) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1}(g) & \cdots & a_{ss}(g) \end{pmatrix}.$$

由引理 4.3.7 有

$$\int_G a_{ij}(g)\overline{a_{pq}(g)}\Omega(g) = \frac{\delta_{ip}\delta_{jq}}{\dim V}, \quad \forall\, i, j, p, q,$$

于是

$$\int_G \rho(gxg^{-1})\Omega(g) = \int_G \rho(g)\rho(x)\overline{\rho(g)}'\Omega(g),$$

其中第 i 行、第 j 列元素为

$$\begin{aligned}&\int_G \Big(\sum_{p,q} a_{ip}(g)a_{pq}(x)\overline{a_{jq}(g)}\Big)\Omega(g) \\ &= \sum_{p,q}\int_G a_{ip}(g)\overline{a_{jq}(g)}a_{pq}(x)\Omega(g)\end{aligned}$$

$$= \sum_{p,q} \frac{\delta_{ij}\delta_{pq}}{\dim V} a_{pq}(x) = \frac{\delta_{ij}}{\dim V} \operatorname{tr} \rho(x).$$

所以

$$\int_G \rho(gxg^{-1})\Omega(g) = \frac{\operatorname{tr}\rho(x)}{\dim V} I.$$

注意到 $f_\varepsilon \in B(G)$, 所以存在紧李群 G 的有限多个不可约表示 $(\rho^{(i)}, V_i)$, 在表示空间 V_i 中取关于 $\rho^{(i)}(G)$ 不变内积的标准正交基, 则 f_ε 为矩阵表示的元素的线性组合, 即存在 $\dim V_i$ 阶常数方阵 D_i, 使得

$$f_\varepsilon(g) = \sum_i \operatorname{tr} D_i \rho_i(g).$$

因此

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(y) = & \int_G f_\varepsilon(xyx^{-1})\Omega(x) = \sum_i \operatorname{tr} D_i \int_G \rho_i(xyx^{-1})\Omega(x) \\ & = \sum_i \operatorname{tr} D_i \Big(\frac{\operatorname{tr}\rho_i(y)}{\dim V_i} I \Big) = \sum_i \frac{\operatorname{tr} D_i \operatorname{tr}\rho_i(y)}{\dim V_i}. \end{aligned}$$

这证明了 $F_\varepsilon \in B(G)_0$. 定理证完.

作为应用, 我们来证明

定理 4.3.26 紧李群必有一一表示.

证 今任取 $g \neq e$, 其中 e 为单位元素, $g \in G$. 则存在连续函数 f 使得 $f(g) \neq f(e)$. 记 $\varepsilon = |f(g) - f(e)|$. 由于表示函数空间 $B(G)$ 在 $C(G)$ 中稠密, 所以存在 $f_1 \in B(G)$, 使得 $\|f_1 - f\|_0 < \varepsilon/3$, 即 $|f_1(g) - f(g)| < \varepsilon/3$, $|f_1(e) - f(e)| < \varepsilon/3$. 所以

$$\begin{aligned} & |f_1(g) - f_1(e)| = |f(g) - f(e) + f_1(g) - f(g) + f(e) - f_1(e)| \\ \geq & |f(g) - f(e)| - |f_1(g) - f(g)| - |f(e) - f_1(e)| > \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{3} > 0, \end{aligned}$$

即有 $f_1(g) \neq f_1(e)$. 由 $f_1 \in B(G)$, 所以包含 f_1 的关于右正则表示 ρ_r 的极小不变子空间 V_1 的维数有限. 于是 ρ_r 在 V_1 上诱导了子表

示 ξ_1. 记表示 (ξ_1, V_1) 的核 $\ker(\xi_1) = H_1$, 则 H_1 为紧李群 G 的闭李子群. 我们来证 $H_1 \neq G$. 事实上, 若 $H_1 = G$, 则 ξ_1 为平凡表示, 即有 $\xi_1(g) = \xi_1(e)$, 所以 $f_1(xg) = (R_g^* f_1)(x) = (R_e^* f_1)(x) = f_1(x)$, $\forall\, x \in G$. 这证明了 $f_1(g) = f_1(e)$. 于是和 f_1 的选取矛盾. 所以证明了 H_1 为紧李群 G 的真闭李子群.

若 $H_1 = \{e\}$, 表示 (ξ_1, V_1) 为 G 的一一表示; 若 $H_1 \neq \{e\}$, 则存在 $g_2 \in H_1, g_2 \neq e$. 同理可证存在右正则表示 ρ_r 的极小不变子空间 V_2, 它的维数有限, 且 ρ_r 在 V_2 上诱导的子表示 (ξ_2, V_2) 的核 $\ker(\xi_2)$ 使得 $H_2 = \ker(\xi_2) \cap H_1$ 为紧李群 H_1 的真闭李子群. 这样继续作下去, 得到真闭子群的真包含链

$$G \supset H_1 \supset H_2 \supset H_3 \supset \cdots,$$

因此

$$\dim G > \dim H_1 > \dim H_2 > \cdots.$$

但是 $\dim G < +\infty$, 这证明了必在有限步结束, 即有

$$G \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_m = \{e\}.$$

相应地, 有右正则表示 ρ_r 的不可约子表示 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$. 而 $\xi = \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i$ 为紧李群 G 的表示 $\xi_1, \cdots, \xi_m$ 的直接和, 它的核

$$\ker(\xi) = \{x \in G \mid \xi_i(x) = e,\ 1 \leq i \leq m\} = \cap_{i=1}^m H_i = \{e\}.$$

这证明了表示 ξ 为李群同构. 定理证完.

第五章 Hermite 对称空间

在这一章，我们给出非紧型 Hermite 对称空间的分类，且给出它的一种实现，即 Harish-Chandra 嵌入. 在下一章，我们给出非紧型 Hermite 对称空间的另外一种实现，即实现为正规 Siegel 域.

由于非紧型 Hermite 对称空间的全纯自同构群必为一类实半单李群，所以我们在这一章中，也讲述一些实半单李群的结果. 但是我们不讲述实 Riemann 对称空间的分类.

§ 5.1 Riemann 流形和 Hermite 流形

在这一节中我们叙述若干必要的 Riemann 流形及 Hermite 流形的结果. 特别在齐性 Hermite 流形的情形，建立它们和李群、李代数之间的关系.

定义 5.1.1 设 M 为 n 维实光滑流形，M 上的 2 形式 g 称为 **Riemann 度量**, 如果任取点 $p \in M$, 则 g_p 为 p 点切空间 $T_p(M)$ 上的内积，又 $p \to g_p$ 在 M 上光滑. 带有 Riemann 度量 g 的光滑流形称为 **Riemann 流形**, 记作 (M, g).

定义 5.1.2 设 (M_i, g_i) 为 Riemann 流形，$i = 1, 2$. M_1 到 M_2 上的双光滑映射 σ 称为 **等度量变换**, 简称为 **同构**, 如果

$$\sigma^*(g_1) = g_2.$$

当 $M_2 = M_1 = M, g_2 = g_1 = g$ 时，同构 σ 称为 **自同构**. 所有自同构构成普通群 $\mathrm{Aut}\,(M, g)$, 称为 Riemann 流形 (M, g) 的 **自同构群**. 在 Riemann 流形 (M, g) 中取定一点 $p \in M$, 则自同构群

$\mathrm{Aut}(M,g)$ 中的普通子群

$$K_p = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(M,g) \mid \sigma(p) = p\}$$

称为点 p 的 **迷向子群**.

显然, 同构是 Riemann 流形全体构成的集合上的等价关系. 而 Riemann 流形理论的根本问题是在这等价关系下的分类.

下面不加证明地叙述自同构群 $\mathrm{Aut}(M,g)$ 的基本结果:

定理 5.1.3(Myers-Steenrood) Riemann 流形 (M,g) 的自同构群 $\mathrm{Aut}(M,g)$ 在 Zarish 拓扑 (即紧开拓扑) 下构成流形 M 上的李变换群. 又流形 M 中固定点 p 的迷向子群 K_p 为李变换群 $\mathrm{Aut}(M,g)$ 的紧子群.

定义 5.1.4 给定 Riemann 流形 (M,g). 记 $\mathrm{gl}(T(M))$ 为流形 M 的向量场全体构成的实线性空间 $T(M)$ 上的线性算子全体构成的实线性空间. 映射 $\nabla: T(M) \to \mathrm{gl}(T(M))$ 记作 $X \to \nabla_X$, 称为 **Riemann 联络**, 如果映射 ∇ 适合条件

(1) $\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$;

(2) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + (Xf)Y$;

(3) $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) = [X,Y]$;

(4) $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$,

其中 $f,g \in \mathfrak{F}(M)$, $X,Y,Z \in T(M)$.

我们也称映射 ∇ 的像 ∇_X 为沿着 X 方向的 **共变微分**.

定理 5.1.5 给定 n 维 Riemann 流形 (M,g), 则在 (M,g) 上唯一存在 Riemann 联络 ∇. 任取流形 M 的可容许标架 (U,φ), 则 Riemann 度量 g 可表示为

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j,$$

其中 $G(x)=(g_{ij}(x))$ 在 $\varphi(U)$ 上为实正定对称方阵，又 Riemann 联络 ∇ 有

$$\nabla_{X_i}(\frac{\partial}{\partial x_j})=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}(x)\frac{\partial}{\partial x_k},\quad 1\le i,j\le n,$$

其中 $X_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$,

$$\Gamma_{ij}^{k}(x)=\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{n}g^{kq}(x)\Big(\frac{\partial g_{qi}(x)}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{qj}(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x_q}\Big),$$

又 $1\le i,j,k\le n,\quad G(x)^{-1}=(g^{ij}(x))$.

证 由 Riemann 联络的条件 (1) 及 (2) 可知

$$\nabla_{\sum\xi_i(x)X_i}(\sum\eta_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j})=\sum\xi_i\eta_j\Gamma_{ij}^{k}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}+\sum\xi_i\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

由条件 (3) 可知 $\Gamma_{ij}^{k}(x)=\Gamma_{ji}^{k}(x)$. 而条件 (4) 推出

$$\frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x_i}=\sum_{r=1}^{n}(\Gamma_{ij}^{r}g_{rk}+\Gamma_{ik}^{r}g_{rj}).$$

于是有

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}=2\sum_{r=1}^{n}\Gamma_{ij}^{r}g_{rk}.$$

所以证明了唯一存在 Riemann 联络. 证完.

定义 5.1.6 在 n 维 Riemann 流形 (M,g) 中任意取定点 p. 过点 p 的曲线段 $\sigma(t)$, $0\le t<r$ 称为 **测地线** 段，如果存在 (M,g) 上的切向量 X, 使得

(1) $\sigma(0)=p$;

(2) $\sigma(t)$ 在 $t=t_0$ 的切向量为 $X_{\sigma(t_0)}$,$0\le t<r$, 即有

$$\dot{\sigma}(t)=\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}=X_{\sigma(t)},\quad 0\le t<r;$$

(3) 切向量 $X_{\sigma(t)}, 0 \leq t < r$ 互相平行, 即

$$\nabla_X(X)|_{x=\sigma(t)} = 0, \quad 0 \leq t < r.$$

引理 5.1.7 在 n 维 Riemann 流形 (M, g) 中取定一点 p. 任取切向量场 X. 若存在以点 p 为端点的测地线段 $\sigma(t), 0 \leq t < r, \sigma(0) = p$, 任取点 p 的标架 (U, φ), 使得 $\sigma(t) \in U, 0 \leq t < r$, 有 $\varphi(p) = a$. 则测地线段 $\sigma(t)$ 的坐标

$$\varphi(\sigma(t)) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)), \quad 0 \leq t < r$$

适合二阶常微分方程组

$$\ddot{x}_k(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(x(t))\dot{x}_i(t)\dot{x}_j(t) = 0$$

及初值

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = (\xi_1(a), \cdots, \xi_n(a)),$$

其中

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

证 令 $\dot{\sigma}(t) = X|_{\sigma(t)}$ 推出 $\dot{x}_k(t) = \xi_k(x(t)), 1 \leq k \leq n$. 于是

$$\ddot{x}_k(t) = \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j(t)\frac{\partial \xi_k(x)}{\partial x_j}\Big|_{x=\sigma(t)}.$$

另一方面, 有

$$\nabla_X(X) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \xi_i(x)\xi_j(x)\Gamma_{ij}^k(x)\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{i,k=1}^{n} \xi_i(x)\frac{\partial \xi_k(x)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

所以由 $\nabla_X(X)|_{x=x(t)} = 0$ 推出

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \dot{x}_i(t)\dot{x}_j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t))\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{x=x(t)}$$
$$+ \sum_{i,k=1}^{n} \xi_i(x(t))\frac{\partial \xi_k(x)}{\partial x_i}\Big|_{x=x(t)}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{x=x(t)} = 0.$$

这证明了

$$\sum_{i,j=1}^{n} \dot{x}_i(t)\dot{x}_j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(t)\frac{\partial \dot{x}_k(t)}{\partial x_i(t)} = -\ddot{x}_k(t).$$

所以引理成立. 证完.

由常微分方程理论可知, 如果给定初值 $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \xi(a)$, 则存在 $\varepsilon > 0$ 及解 $x = x(t), 0 \le t < \varepsilon$, 且解唯一. 所以由引理 5.1.7 可知, 一定存在由切向量场 X 决定的唯一的测地线段 $x = x(t), 0 \le t < \varepsilon$. 因此, 我们可以引进指数映射 exp 如下:

在流形 M 中任取一点 p, 任取切向量 $X_p \in T_p(M)$, 它唯一决定的测地线段 $\sigma(t), 0 \le t < \varepsilon$ 可改记作 $\exp tX_p, 0 \le t < \varepsilon$. 于是给出了点 p 的切空间 $T_p(M)$ 到流形 M 内的映射 exp, 它有

$$\exp(0X_p) = p, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp tX_p)|_{t=0} = X_p.$$

注意到对全体向量场构成的线性空间 $T(M)$, 则

$$T(M)|_p = \{X_p = X|_p \mid \forall\, X \in T(M)\} = T_p(M).$$

因此我们也可以定义 $\exp X, \forall\, X \in T(M)$, 使得

$$(\exp X)|_p = \exp X_p, \forall\, p \in M,$$

于是也给出了 $T(M)$ 到 M 上的指数映射 exp.

不难证明, 在李群理论中引进的指数映射和上面引进的指数映射相同, 只是对李群 G, 首先要证明存在 G 不变 Riemann 度量和 G 不变 Riemann 联络. 我们将在后面讨论齐性 Riemann 流形时作为特例给出证明.

下面考虑自同构引起的变化.

给定 n 维 Riemann 流形 (M, g). 任取流形 (M, g) 上的自同构 ξ. 在流形 M 上任取可容许标架 (U, φ), 则 $(\xi(U), \varphi \circ \xi^{-1})$ 仍为可容许标架. 任取坐标邻域 U 中的点 p, 记 p 点的坐标为 $\varphi(p) = a$. 于是坐标邻域 $\xi(U)$ 中的点 $q = \xi(p)$ 有坐标 $(\varphi \circ \xi^{-1})(q) = \varphi(p) = a$.

记 ξ 的坐标表达式为 $y=f(x)$. 记 Riemann 度量

$$g=\sum g_{ij}(x)\mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_j.$$

于是

$$\sigma^*(g)=\sum g_{ij}(x)\frac{\partial x_i}{\partial y_u}\frac{\partial x_j}{\partial y_v}\mathrm{d}y_u\otimes\mathrm{d}y_v=\sum g_{ij}(y)\mathrm{d}y_i\otimes\mathrm{d}y_j,$$

因此有

$$G(y)=(\frac{\partial x}{\partial y})'G(x)\frac{\partial x}{\partial y},$$

其中 σ 的 Jacobian $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ 的上标为行指标，下标为列指标．另一方面，由于

$$\Gamma_{ij}^k(x)=\frac{1}{2}\sum_k g^{kt}(x)(\frac{\partial g_{ik}(x)}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x_k}),$$

所以由

$$g_{ij}(y)=\sum_{u,v}g_{uv}(x)\frac{\partial x_u}{\partial y_i}\frac{\partial x_v}{\partial y_j}$$

有

$$\Gamma_{ij}^k(x)=\sum_{u,v,l}\Gamma_{uv}^l(y)\frac{\partial x_k}{\partial y_l}\frac{\partial y_u}{\partial x_i}\frac{\partial y_v}{\partial x_j}+\sum\frac{\partial x_k}{\partial y_l}\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i\partial x_j}.$$

再取向量场 $X=\sum\limits_i\xi_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, 则

$$\xi_*(X)=\sum_i\xi_i(x)\frac{\partial y_j}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_j}=\sum_j\eta_j(y)\frac{\partial}{\partial y_j},$$

所以

$$\eta_j(y)=\sum_i\xi_i(x)\frac{\partial y_j}{\partial x_i},\quad 1\le j\le n.$$

定理 5.1.8 设 (M,g) 为 Riemann 流形，ξ 为 (M,g) 上的自同构. 在流形 M 中取定点 p, 则在点 p 附近有

$$\xi(\exp tX) = \exp t\xi_*(X), \quad 0 \le t < \varepsilon(X).$$

证 由引理 5.1.7 可知，任取 $X = \sum \xi_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, 记 $y(t) = f(x(t)) = \xi(x(t))$, 则

$$\dot{x}_i(t) = \xi_i(x(t)) = \sum \eta_j(y(t))\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \sum \dot{y}_j(t)\frac{\partial x_i}{\partial y_j}.$$

于是

$$\begin{aligned}&\ddot{x}_k(t) + \sum_{i,j} \dot{x}_i(t)\dot{x}_j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t))\\ =& \sum_{l=1}^n(\ddot{y}_l(t) + \sum_{i,j} \dot{y}_i(t)\dot{y}_j(t)\Gamma_{ij}^l(y(t)))\frac{\partial x_k}{\partial y_l}.\end{aligned}$$

这证明了 $x(t)$ 为测地线段当且仅当 $y(t)$ 为测地线段，且有

$$\xi(\exp tX) = \exp t\xi_*(X),\ 0 \le t < \varepsilon(X).$$

证完.

定义 5.1.9 n 维 Riemann 流形 (M,g) 称为 **完备的**, 如果任一测地线段 $\sigma(t), 0 \le t < \varepsilon$ 可开拓到 $t \in \mathbb{R}$, 且仍为测地线.

我们不加证明地给出

定理 5.1.10 设 (M,g) 为完备 Riemann 流形，任取点 $p, q \in M$, 则存在联接 p 及 q 两点的测地线 $\sigma(t)$, 且存在联此两点，长度最小的测地线. 这个长度称为点 p 与点 q 间的距离，记作 $d(p,q)$.

定义 5.1.11 n 维 Riemann 流形 (M,g) 称为 **齐性的**，如果在流形 M 中任取两点 p,q, 则存在自同构 σ, 使得 $\sigma(p) = q$. 这时也称李变换群 Aut(M,g) 在流形 M 上 **可递**.

现在考虑 n 维 Riemann 流形 (M,g). 在 (M,g) 的自同构群 Aut(M,g) 中任取李子群 G, 设 G 在流形 M 上可递，则 G 中点 $p \in M$ 的迷向子群为

$$K = \{\sigma \in G \mid \sigma(p) = p\} = K_p \cap G.$$

显然 K 为李子群 G 中的闭子集，也是紧李群 H_p 中的闭子集，所以为紧子群．回忆 §3.3 可知，李群 G 为流形 M 上的可递李变换群，且 M 和商空间 G/K 同构．同构对应为

$$\tau: \quad G/K \to M,$$

它定义为

$$\tau(xK) = x(p), \forall\, x \in G$$

(参见定理 3.3.12)．令 (M,g) 为 Riemann 流形，不难证明 $\tau^*(g)$ 为商空间 G/K 上的 Riemann 度量，即 $(G/K,\tau^*(g))$ 为 Riemann 流形．又 $\mathcal{A}_G$ 为 G/K 上的可递等度量李变换群．

注意到 K 为紧李群，所以 $\mathrm{Ad}\,K$ 也为紧李群．记李群 G 的李代数为 $\mathfrak{G}$, 因此 $(\mathrm{Ad},\mathfrak{G})$ 为紧李群 K 的表示．由于紧李群的表示完全可约，对紧李群 K 的李代数 $\mathfrak{K}$ 有 $(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{K}\subset\mathfrak{K}$, 所以李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 有子空间直接和分解

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P},$$

使得 $(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{K}\subset\mathfrak{K}$, $(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{P}\subset\mathfrak{P}$. 于是有 $[\mathfrak{K},\mathfrak{K}]\subset\mathfrak{K}$, $[\mathfrak{K},\mathfrak{P}]\subset\mathfrak{P}$. 表示 $(\mathrm{Ad},\mathfrak{P})$ 称为迷向子群 K 的 **迷向表示**.

上面的说明指出，为了考虑一般的 m 维齐性 Riemann 流形，只要考虑商空间 G/K, 其中 G 为连通李群，K 为 G 中的紧子群，且 K 中无 G 的非平凡正规李子群.

记 $\mathfrak{G}$ 及 $\mathfrak{K}$ 分别为李群 G 及 K 的李代数．注意到 K 为紧子群，所以是闭子群．因此在 $\mathfrak{K}$ 中取基 $X_{m+1},\cdots,X_n$, 再在子空间 $\mathfrak{P}$ 中取基 $X_1,\cdots,X_m$. 注意到 $\mathfrak{G}=\mathfrak{P}+\mathfrak{K}$ 为子空间直接和，所以 $\dim\mathfrak{P}=\dim\mathfrak{G}-\dim\mathfrak{K}=\dim G-\dim K=\dim G/K=m$. 在李群 G 中取第三类标准单位标架 (U,φ), 即

$$U = \{(\exp\sum_{i=1}^{m} x_iX_i)(\exp\sum_{i=m+1}^{n} x_iX_i) \mid |x_j|<\varepsilon,\ 1\le j\le n\},$$

则

$$V = K \cap U = \{\exp \sum_{i=m+1}^{n} x_i X_i \mid |x_j| < \varepsilon,\ m+1 \le j \le n\}.$$

令 $U/K = U/(K \cap U) = U/V$, 所以 U/V 为齐性空间 G/K 的元素 eK 的邻域，它有标架 $(U/V, \widetilde{\varphi})$, 定义为 $\widetilde{\varphi}((\exp \sum_{i=1}^{m} x_i X_i)K) = (x_1, \cdots, x_m), \forall\, |x_i| < \varepsilon,\ 1 \le i \le m.$

今任取 $\sigma \in G$, 它诱导了 G/K 上的全纯自同构 $\mathcal{A}_\sigma$, 而 $\mathcal{A}_G = \{\mathcal{A}_\sigma \mid \forall\, \sigma \in G\}$ 为 G/K 上的李变换群，使得 $\sigma \to \mathcal{A}_\sigma$ 给出 G 到 $\mathcal{A}_G$ 上的李群同构．这里

$$\mathcal{A}_\sigma(\tau K) = (\sigma\tau)K, \quad \forall\, \tau, \sigma \in G.$$

所以 $\mathcal{A}_G$ 作为 G/K 上的李变换群，在标架 $(U/K, \widetilde{\varphi})$ 上可表示为

$$y = F(\sigma, x).$$

记李群 G 在标架 (U, φ) 下的乘法函数为 f, 辅助函数为 $l_i^j(x)$. 于是由 $\sigma(xK) = (\sigma x)K$ 可知

$$F_i(\sigma, x) = f_i(\sigma; x, 0), \quad 1 \le i \le m.$$

为确定起见，记 $\alpha \in \{1, 2, \cdots, m\}, i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 则有

$$\xi_i^\alpha(x) = \frac{\partial F_\alpha(\sigma, x)}{\partial \sigma_i}\bigg|_{\sigma=e} = \frac{\partial f_\alpha(\sigma; x, 0)}{\partial \sigma_i}\bigg|_{\sigma=e} = r_i^\alpha(x, 0).$$

而 G/H 上的李变换群 $\mathcal{A}_G$ 的李代数 $\widetilde{\mathfrak{G}}$ 有基

$$\widetilde{X_i} = \sum_{\alpha=1}^{m} \xi_i^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad 1 \le i \le n.$$

回到李群 G 中的单位标架 (U, φ). 我们知道乘法函数 f 有

$$\begin{aligned}
&f_\alpha(\sigma_1, \cdots, \sigma_n; 0, \cdots, 0, x_{m+1}, \cdots, x_n) = \sigma_\alpha,\ 1 \le \alpha \le m, \\
&f_i(\sigma_1, \cdots, \sigma_n; 0, \cdots, 0, x_{m+1}, \cdots, x_n) \\
= &f_i(0, \cdots, 0, \sigma_{m+1}, \cdots, \sigma_n; 0, \cdots, 0, x_{m+1}, \cdots, x_n),\ m+1 \le i \le n.
\end{aligned}$$

于是取 $\sigma = xh \in U$, $x = \exp\sum_{i=1}^{m} x_i X_i$, $h = \exp\sum_{i=m+1}^{n} x_i X_i$, 则 $h \in U \cap H$. 又记

$$l_j^i(x) = \frac{\partial f_i(x,y)}{\partial y_j}\Big|_{y=0}, \ L(x) = (l_j^i(x)), \ \det L(x) > 0,$$

$$r_j^i(x) = \frac{\partial f_i(y,x)}{\partial y_j}\Big|_{y=0}, \ R(x) = (r_j^i(x)), \ \det R(x) > 0,$$

其中 $x \in \varphi(U)$. 于是有

$$R(h) = \begin{pmatrix} I^{(m)} & 0 \\ 0 & R_0(h) \end{pmatrix}; \quad L(\sigma) = \begin{pmatrix} L_0(\sigma) & 0 \\ L_1(\sigma) & L_2(h) \end{pmatrix}.$$

引理 5.1.12 符号同上. 若 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 为基 $X_1, \cdots, X_n$ 的对偶基, 即为 Maurer-Cartan 形式. 对商空间 G/K 上的对称 2 形式 g, 则

$$A_\sigma^*(g) = g, \quad \forall\, \sigma \in G,$$

当且仅当关于自然映射 $\pi : G \to G/K$ 有

$$\pi^*(g) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\omega_i \otimes \omega_j,$$

其中 $m \times m$ 方阵 $A = (a_{ij})$ 为实正定对称方阵, 它有

$$A = L_0(k)' A L_0(k), \quad \forall\, k \in K,$$

$L_0(k)$ 为线性算子 $\mathrm{Ad}\,k$ 在子空间 $\mathfrak{P}$ 上的方阵表示, 即迷向表示.

证 在 G/K 中点 eK 的标架 $(U/(K \cap U), \tilde{\varphi})$ 上, 记

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j, \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x).$$

注意到 $\pi : U \to U/K = U/(K \cap U)$, 所以在标架 (U, φ) 上有

$$\pi^*(g) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j.$$

令 $\mathcal{A}_\sigma^*(g)=g$, 又 $\mathcal{A}_\sigma(x)=\sigma(x)=y$ 的坐标表达式为 $y=F(\sigma,x)$. 确切地，它表示为

$$y_i=f_i(\sigma_1,\cdots,\sigma_m,\sigma_{m+1},\cdots,\sigma_n,x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0),$$

其中 $1\le i\le m$. 于是 $\mathcal{A}_\sigma^*(g)=g$ 给出

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(y)\mathrm{d}y_i\otimes\mathrm{d}y_j\\=&\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(F(\sigma,x))\sum_{p,q=1}^m\frac{\partial F_i(\sigma,x)}{\partial x_p}\frac{\partial F_j(\sigma,x)}{\partial x_q}\mathrm{d}x_p\otimes\mathrm{d}x_q\\=&\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)\mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_j.\end{aligned}$$

所以 $A(x)=(a_{ij}(x))$ 有

$$A(x)=(\frac{\partial F(\sigma,x)}{\partial x})'A(F(\sigma,x))\frac{\partial F(\sigma,x)}{\partial x}.$$

由 S.Lie 第一基本定理，有

$$\frac{\partial f_i(\sigma;x,0)}{\partial x_j}=\sum_{p=1}^n l_p^i(f(\sigma;x,0))\widetilde{l}_j^p(x,0),\quad 1\le i,j\le m,$$

其中 $L(z)=(l_j^i(z))$, $L(z)^{-1}=(\widetilde{l}_j^i(z))$, $\forall\ z\in\varphi(U)$. 因此对 $\varphi(U)$ 中点 $(x,0)$, 有

$$L(x,0)^{-1}=\begin{pmatrix}L_0(x,0)&0\\L_1(x,0)&L_2(e)\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}L_0(x,0)^{-1}&0\\L_3(x,0)&I\end{pmatrix}.$$

所以

$$\frac{\partial F_i(\sigma,x)}{\partial x_j}=\frac{\partial f_i(\sigma;x,0)}{\partial x_j}=\sum_{p=1}^m l_p^i(f(\sigma;x,0))\widetilde{l}_j^p(x,0),$$

其中 $1 \le i,j \le m$. 这证明了

$$\frac{\partial F(\sigma,x)}{\partial x} = L_0(f(\sigma;x,0))L_0(x,0)^{-1},$$

因此

$$\begin{aligned} A(x) &= \left(\frac{\partial F(\sigma,x)}{\partial x}\right)' A(F(\sigma,x)) \frac{\partial F(\sigma,x)}{\partial x} \\ &= (L_0(x,0)')^{-1} L_0(f(\sigma;x,0))' A(F(\sigma,x)) L_0(f(\sigma;x,0)) L_0(x,0)^{-1}. \end{aligned}$$

双方取 $x = 0$, 记 $a_{ij}(0) = a_{ij}, (a_{ij}) = A$, 则有 $a_{ij} = a_{ji}$, 又

$$A = L_0(\sigma)' A(\sigma) L_0(\sigma).$$

这证明了

$$A(\sigma) = (L_0(\sigma)^{-1})' A L_0(\sigma)^{-1},$$

即

$$a_{ij}(\sigma) = \sum_{p,q=1}^{m} a_{pq} \widetilde{l}_i^p(\sigma) \widetilde{l}_j^q(\sigma), \quad 1 \le i,j \le m.$$

所以

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x) \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j = \sum_{i,j,p,q=1}^{m} a_{pq} \widetilde{l}_i^p(x) \widetilde{l}_j^q(x) \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j.$$

由引理 4.1.1, Maurer-Cartan 形式为

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{l}_j^i(x) \mathrm{d}x_j, \quad 1 \le i \le n.$$

所以取 $1 \le i \le m$, 则 $\omega_i = \sum\limits_{j=1}^{m} \widetilde{l}_j^i(x) \mathrm{d}x_j$. 这推出

$$\pi^*(g) = \sum_{p,q=1}^{m} a_{pq} \omega_p \otimes \omega_q, \quad a_{pq} = a_{qp}.$$

令李群 G 上的 Maurer-Cartan 形式左不变，所以 $\pi^*(g)$ 作为李群 G 上的 2 形式也左不变. 另一方面，由于 g 为商空间 G/K 上的 2 形式，所以任取 $k\in K,\sigma\in G$，则 $g_{\sigma K}=g_{\sigma kK}$. 因此 $\pi^*(g_{\sigma K})=\pi^*(g_{\sigma kK})$，即 $(\pi^*g)_\sigma=(\pi^*g)_{\sigma k}=R_k^*((\pi^*g)_\sigma)$. 这证明了 π^*g 在 K 下右不变. 即 π^*g 作为李群 G 上的 2 形式，它在 G 作用下左不变，在 K 作用下右不变，所以在 $\mathrm{ad}\,K$ 作用下不变. 即任取 $k\in K$，则 $(\mathrm{ad}\,k)^*(\pi^*g)=\pi^*g$. 已知 $(\mathrm{ad}\,k)_*=\mathrm{Ad}\,k$. 它在基 $X_1,\cdots,X_n$ 下的对应方阵，由定理 3.2.24 可知为

$$A(k)=R(k)^{-1}L(k)$$

$$=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & R_0(k)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} L_0(k) & 0\\ L_1(k) & L_2(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_0(k) & 0\\ * & *\end{pmatrix}$$

令 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 为 $X_1,\cdots,X_n$ 的对偶基，$(\mathrm{ad}\,k)^*$ 为 $(\mathrm{ad}\,k)_*$ 的对偶变换，所以 $(\mathrm{ad}\,k)^*$ 在基 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 下的对应方阵为

$$A(k)'=\begin{pmatrix} L_0(k)' & *\\ 0 & *\end{pmatrix}.$$

因此

$$(\mathrm{ad}\,k)^*\omega_i=\sum_{j=1}^m l_j^i(k)\omega_j,\quad 1\le i\le m.$$

所以

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\,k)^*(g)&=\sum_{p,q=1}^m a_{pq}((\mathrm{ad}\,k)^*\omega_p)\otimes((\mathrm{ad}\,k)^*\omega_q)\\ &=\sum_{p,q,i,j=1}^m a_{pq}l_i^p(k)l_j^q(k)\omega_i\otimes\omega_j=\sum_{i,j=1}^m a_{ij}\omega_i\otimes\omega_j.\end{aligned}$$

这证明了

$$a_{ij}=\sum_{p,q=1}^m a_{pq}l_i^p(k)l_j^q(k),\quad \forall\, 1\le i,j\le m,\ k\in K.$$

即证明了

$$L_0(k)'AL_0(k) = A,$$

其中 $L_0(k)$ 为线性变换 $\mathrm{Ad}\,K$ 在线性空间 $\mathfrak{P}$ 上的方阵表示.

反之，在李群 G 上任取 2 形式 $\widetilde{g} = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$, 其中 $A = (a_{ij})$ 为 $m \times m$ 实正定对称方阵，它有 $L_0(k)'AL_0(k) = A, \forall\, k \in K$. 于是不难证明 $\widetilde{g}$ 在 G 下左不变，在 K 下右不变. 所以在商空间 G/K 上存在 2 形式 g, 使得 $\pi^*(g) = \widetilde{g}$, 且 g 在 A_G 下不变. 至此证明了引理. 证完.

定理 5.1.13 设 G 为连通李群， K 为其闭子群. 设 K 中无 G 的非平凡正规子群，则在商空间 G/K 上存在 G 不变 Riemann 度量 g, 当且仅当分别记 $\mathfrak{G}$ 及 $\mathfrak{K}$ 为李群 G 及 K 的李代数，则存在子空间 $\mathfrak{P}$, 使得 $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} + \mathfrak{K}$ 为子空间直接和，又 $[\mathfrak{K}, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{P}$, 且 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{P}}(K)$ 为紧李群. 又这时可在子空间 $\mathfrak{P}$ 中取基 $Y_1, \cdots, Y_m$, 在子空间 $\mathfrak{K}$ 中取基 $Y_{m+1}, \cdots, Y_n$, 使得 $Y_1, \cdots, Y_n$ 的对偶基 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 有

$$\pi^*(g) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \otimes \omega_i.$$

证 由引理 5.1.12 的证明可知，我们并未用到子群 K 紧，只用到了子群 K 闭，且表示 $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{G})$ 完全可约，因此 $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} + \mathfrak{K}$ 存在，且为子空间直接和. 所以对商空间 G/K 上的 2 形式 g, 有

$$\pi^*(g) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\omega_i \otimes \omega_j.$$

又 $A = (a_{ij}) > 0$, 而且

$$L_0(k)'AL_0(k) = A.$$

今若 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{P}}(K)$ 为紧李群，即存在 $m \times m$ 非异方阵 P, 使得 $O(k) = PL_0(k)P^{-1} \in \mathrm{O}(m), \forall\, k \in K$. 代入，有

$$(P^{-1}O(k)P)'AP^{-1}O(k)P = A,$$

即

$$O(k)'(P^{-1})'AP^{-1}O(k) = (P^{-1})'AP^{-1}.$$

注意到 A 为正定对称方阵，我们取 $A = P'P > 0$, 则正定对称方阵 A 适合条件，即证明了商空间 G/K 上有 G 不变 Riemann 度量.

反之，假设在商空间 G/K 上有 G 不变 Riemann 度量 g. 由于 G 中子群 K 为 G/K 中点 eK 的迷向子群，由定理 5.1.3,K 为李群 G 中的紧李群. 于是存在子空间 $\mathfrak{P}$ 使得 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 为子空间直接和，且 $[\mathfrak{P}, \mathfrak{K}] \subset \mathfrak{P}$, 又 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{P}} K$ 为紧李群. 又由引理 5.1.12, 有

$$\pi^*(g) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\omega_i \otimes \omega_j,$$

其中 $A = (a_{ij})$ 为实正定对称方阵. 今由 g 为 Riemann 度量可知在李群 G 的单位元素 e 上，有

$$(\pi^*(g))_e = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\omega_i|_e \otimes \omega_j|_e = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(\mathrm{d}x_i)_0 \otimes (\mathrm{d}x_j)_0.$$

它正定对称，这证明了 $A > 0$. 于是可在子空间 $\mathfrak{P}$ 中易基，使得 A 为单位方阵. 定理证完.

定理 5.1.14 设 K 为连通李群 G 的紧子群，且 K 中无 G 的非平凡正规子群. 记 $\mathfrak{G}$ 及 $\mathfrak{K}$ 分别为李群 G 及其子群 K 的李代数. 记 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 为子空间直接和分解，有 $[\mathfrak{K}, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{P}$. 在 $\mathfrak{K}$ 中取基 $X_{m+1}, \cdots, X_n$, 在 $\mathfrak{P}$ 中取基 $X_1, \cdots, X_m$. 记 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 为 $X_1, \cdots, X_n$ 的对偶基，使得

$$g = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \otimes \omega_i$$

为商空间 G/K 的 G 不变 **Riemann 度量**. 则

$$\sigma(t) = (\exp t \sum_{i=1}^{m} a_i X_i)H, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

为商空间 G/K 中过点 eH, 以 $\alpha=(a_1,\cdots,a_m)$ 为方向的测地线.

证 今 $\mathfrak{K}$ 为紧子代数, 所以在 $\mathfrak{G}=\mathfrak{P}+\mathfrak{K}$ 中存在 $\operatorname{ad}K$ 不变内积 (x,y), 使得 $(\mathfrak{K},\mathfrak{P})=0$. 我们在 $\mathfrak{G}$ 中取标准正交基 $X_1,\cdots,X_n$, 其中 $X_1,\cdots,X_m$ 为 $\mathfrak{P}$ 的基 ,$X_{m+1},\cdots,X_n$ 为 $\mathfrak{K}$ 的基. 于是

$$[X_\alpha,X_i]=\sum_{j=1}^{m}C_{\alpha i}^{j}X_j,\quad 1\le i\le m,\ m+1\le\alpha\le n,$$

$$[X_\alpha,X_\beta]=\sum_{\delta=m+1}^{n}C_{\alpha\beta}^{\delta}X_\delta,\quad m+1\le\alpha,\beta\le n.$$

而

$$((\operatorname{ad}X_\alpha)X_i,X_k)+(X_i,(\operatorname{ad}X_\alpha)X_k)=0,$$

即

$$\sum_{j=1}^{m}C_{\alpha i}^{j}(X_j,X_k)+\sum_{j=1}^{m}C_{\alpha k}^{j}(X_i,X_j)=0.$$

由 $(X_j,X_k)=\delta_{jk}$ 推出

$$C_{\alpha i}^{k}+C_{\alpha k}^{i}=0,\quad 1\le i,k\le m,\ m+1\le\alpha\le n.$$

下面来计算 $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{P}}h,\forall\, h\in K$ 的方阵表示. 由于 $h\in K$, 所以存在 $X\in\mathfrak{K}$, 使得 $k=\exp X$. 因此 $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{P}}k=\operatorname{Ad}_{\mathfrak{P}}\exp X=\exp(\operatorname{ad}X)_{\mathfrak{P}}$. 记 $X=\sum\limits_{\alpha=m+1}^{n}\lambda_\alpha X_\alpha$, 于是当 $1\le i\le m$ 时, 有

$$(\operatorname{ad}X)X_i=\sum_{\alpha=m+1}^{n}\lambda_\alpha[X_\alpha,X_i]=\sum_{\alpha=m+1}^{n}\lambda_\alpha\sum_{j=1}^{m}C_{\alpha i}^{j}X_j.$$

因此 $\operatorname{ad}X$ 有方阵表示

$$A_X=(\sum_\alpha\lambda_\alpha C_{\alpha j}^{i}),$$

于是 A_X+A_X' 中的元素为 $\sum\limits_\alpha\lambda_\alpha(C_{\alpha j}^{i}+C_{\alpha i}^{j})=0$. 这证明了 $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{P}}k$ 的方阵表示为实正交方阵. 由定理 5.1.13, 所以 $g=\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i\otimes\omega_i$ 为 G 不变 Riemann 度量.

按照前面在 $\mathfrak{G}$ 中选取第三类标准标架 (U,φ), 在 U 中取元素 $\exp\sum\limits_{i=1}^{m}x_iX_i$, 其坐标为 $(x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0)$. 于是

$$L(x)=\begin{pmatrix} L_0(x)^{(m)} & 0\\ L_1(x) & I\end{pmatrix},\quad L(x)^{-1}=\begin{pmatrix} L_0(x)^{-1} & 0\\ -L_1(x)L_0(x)^{-1} & I\end{pmatrix},$$

且我们取乘法函数, 使得

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}x_il_i^k(x)=x_k, & 1\le k\le m,\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_il_i^k(x)=0, & m+1\le k\le n.\end{cases}$$

我们希望证明 $(\exp t\sum\limits_{i=1}^{m}a_iX_i)H$ 为 Riemann 流形 G/K 中的测地线, 即证明任取 $a=(a_1,\cdots,a_m)\in\mathbb{R}^m$, 则 $x(t)=ta$ 适合测地线方程, 其中初值为 $x(0)=0,\dot{x}(t)=a$, 又 $\ddot{x}(t)=0$. 所以要证

$$\sum_{i,j=1}^{m}a_ia_j\Gamma_{ij}^k(ta)=0,\quad \forall\,|t|<\varepsilon,\ 1\le k\le m.$$

为此要计算 $\Gamma_{ij}^k(x)$. 今

$$g=\sum_{i=1}^{m}\omega_i\otimes\omega_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{p,q=1}^{m}\widetilde{l_p^i}(x)\widetilde{l_q^i}(x)\mathrm{d}x_p\otimes\mathrm{d}x_q,$$

所以记 $g=\sum g_{ij}(x)\mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_j$, 则

$$G(x)=(g_{ij}(x))=(L_0(x)^{-1})'L_0(x)^{-1},$$

于是

$$G(x)^{-1}=(g^{ij}(x))=L_0(x)L_0(x)',$$

即

$$g_{ij}(x)=\sum_p\widetilde{l_i^p}(x)\widetilde{l_j^p}(x),\quad g^{ij}(x)=\sum_p l_p^i(x)l_p^j(x).$$

因此

$$\sum_{i,j} a_i a_j \Gamma^k_{ij}(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j,p} a_i a_j g^{kp}(x)\Big(\frac{\partial g_{ip}(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jp}(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x_p}\Big)$$

$$= \sum a_i a_j \Big(\sum l^k_u \frac{\partial \widetilde{l}^u_i}{\partial x_j} + \sum l^k_u l^p_u \widetilde{l}^v_i \big(\frac{\partial \widetilde{l}^v_p}{\partial x_j} - \frac{\partial \widetilde{l}^v_j}{\partial x_p}\big)\Big).$$

今 $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i l^k_i(x) = x_k, 1 \le k \le m, \sum\limits_{i=m+1}^{n} x_i l^\alpha_i(x) = 0, m+1 \le \alpha \le n.$ 所以记 $y = (x_1, \cdots, x_m)$, 有 $L_0(x)y' = y', L_1(x)y' = 0$. 这证明了 $L_0(x)^{-1}y' = y'$, 且由 $L(x)^{-1} = \begin{pmatrix} L_0(x)^{-1} & 0 \\ -L_1(x)L_0(x)^{-1} & I \end{pmatrix}$ 可知

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \widetilde{l}^k_i(x) = x_k, & 1 \le k \le m, \\ \sum\limits_{i=m+1}^{n} x_i \widetilde{l}^\alpha_i(x) = 0, & m+1 \le k \le n. \end{cases}$$

于是

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_i a_j \Gamma^k_{ij}(ta)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j,p} a_i a_j g^{kp}(ta)\Big(\frac{\partial g_{ip}(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jp}(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x_p}\Big)_{x=ta}$$

$$= \sum a_i a_j \big(\sum l^k_u \frac{\partial \widetilde{l}^u_i}{\partial x_j} + \sum l^k_u l^p_u \widetilde{l}^v_i \big(\frac{\partial \widetilde{l}^v_p}{\partial x_j} - \frac{\partial \widetilde{l}^v_j}{\partial x_p}\big)\Big).$$

由 S.Lie 第二基本定理可知

$$\frac{\partial \widetilde{l}^v_p}{\partial x_j} - \frac{\partial \widetilde{l}^v_j}{\partial x_p} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} C^v_{\alpha\beta} \widetilde{l}^\alpha_p \widetilde{l}^\beta_j$$

$$= \sum_{r,s=1}^{m} C^v_{rs} \widetilde{l}^r_p \widetilde{l}^s_j + \sum_{r=1}^{m}\sum_{\alpha=m+1}^{n} C^v_{\beta r}(\widetilde{l}^\beta_p \widetilde{l}^r_j - \widetilde{l}^r_p \widetilde{l}^\beta_j).$$

代入后得到四项. 第一项为

$$\sum a_i a_j l_u^k \frac{\partial \widetilde{l}_i^u}{\partial x_j} = -\sum a_i a_j \widetilde{l}_i^q \frac{\partial l_q^k}{\partial x_j},$$

因此有

$$-\sum a_i a_j \frac{\partial l_i^k}{\partial x_j}\Big|_{x=ta} = -\sum a_j \frac{\partial \sum a_i l_i^k}{\partial x_j}\Big|_{x=ta} = 0.$$

由 $C_{rj}^i + C_{ri}^j = 0$, 可知第二项为零. 利用 $\sum a_v a_r C_{\beta r}^v = 0$, 可知第三项等于零. 利用 $\sum a_j \widetilde{l}_j^\beta = 0$, 可知第四项等于零. 至此证明了 $\exp t \sum_{i=1}^m a_i X_i, |t| < \varepsilon$ 为测地线段. 利用它是单参数子群, 所以推出当 $t \in \mathbb{R}$ 时也是测地线. 定理证完.

现在应用到连通李群 G 本身, 即取紧子群 $K = \{e\}$ 为李群 G 的单位元素. 因此有

定理 5.1.15 设 G 为实连通李群, $\mathfrak{G}$ 为其李代数. 在 $\mathfrak{G}$ 中任意取基 $X_1, \cdots, X_n$. 记 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 为 Maurer-Cartan 形式. 则 G 有 G 不变 Riemann 度量

$$g = \sum_{i=1}^n \omega_i \otimes \omega_i.$$

而单参数子群 $\exp t \sum a_i X_i$ 为有方向 $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 的过点 e 的测地线.

现在考虑 n 维复流形 M. 在 M 中取定标架 (U, φ). 坐标为 $z = (z_1, \cdots, z_n)$. 记 $z_i = x_i + \sqrt{-1} y_i = x_i + \sqrt{-1} x_{n+i}, 1 \leq i \leq n$, 则 $x = (x_1, \cdots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$. 注意到全纯函数的实部及虚部都是实解析函数, 所以 M 可以看作 $2n$ 维实解析流形. 反之, $2n$ 维实解析流形 M 若能作为复流形, 则必须有复结构 I, 使得

$$I\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{n+i}}, \quad I\left(\frac{\partial}{\partial x_{n+i}}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

于是有

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\mathrm{d}z,\overline{\mathrm{d}z})\begin{pmatrix} I^{(n)} & -\sqrt{-1}I^{(n)} \\ I & \sqrt{-1}I^{(n)} \end{pmatrix},$$

其中 $I^{(n)}$ 为 $n\times n$ 单位方阵，又

$$\mathrm{d}z=(\mathrm{d}z_1,\cdots,\mathrm{d}z_n),\ \overline{\mathrm{d}z}=(\overline{\mathrm{d}z_1},\cdots,\overline{\mathrm{d}z_n}),\ \mathrm{d}x=(\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_{2n}).$$

另一方面，对复流形 M 上的全纯向量场

$$\begin{aligned}2X&=2\sum\xi_i(z)\frac{\partial}{\partial z_i}\\&=\sum(\mathrm{Re}\,(\xi_i)+\sqrt{-1}\mathrm{Im}\,(\xi_i))(\frac{\partial}{\partial x_i}-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_{n+i}})\\&=\sum(\mathrm{Re}\,(\xi_i)\frac{\partial}{\partial x_i}+\mathrm{Im}\,(\xi_i)\frac{\partial}{\partial x_{n+i}})\\&\quad+\sqrt{-1}\sum(\mathrm{Im}\,(\xi_i)\frac{\partial}{\partial x_i}-\mathrm{Re}\,(\xi_i)\frac{\partial}{\partial x_{n+i}})\end{aligned}$$

为 M 作为实流形的两个实解析向量场的线性组合，组合系数为 $1,\sqrt{-1}$.

定义 5.1.16 n 维复流形 M 上的 (1,1) 型共变张量场 h 称为 M 上的 Hermite 度量，如果任取 $p\in M$, 则 h_p 为复流形 M 上的点 p 的切空间 $T_p(M)$ 上的内积，即 h_p 为正定 Hermite 双线性函数，又 $p\to h_p$ 关于 $(z,\overline{z})$ 全纯. 这时 M 称为 **Hermite 流形**, 记作 (M,h).

用标架 (U,φ) 中的坐标来表达，则 Hermite 度量的

$$h=\sum_{i,j=1}^{n}h_{ij}(z,\overline{z})\mathrm{d}z_i\otimes\overline{\mathrm{d}z_j}=\mathrm{d}zH(z,\overline{z})\overline{\mathrm{d}z}',$$

其中 $n\times n$ 复方阵

$$H(z,\overline{z})=(h_{ij}(z,\overline{z}))>0,$$

又 $h_{ij}(z,\overline{z})$ 关于 z 及 $\overline{z}$ 都全纯，$1\leq i,j\leq n$.

将它写成实的形式，有

$$\begin{aligned}h &= g+\sqrt{-1}\widetilde{g}\\ &= \sum(\operatorname{Re}h_{ij}+\sqrt{-1}\operatorname{Im}h_{ij})(\mathrm{d}x_i+\sqrt{-1}\mathrm{d}x_{n+i})\\ &\quad\otimes(\mathrm{d}x_j-\sqrt{-1}\mathrm{d}x_{n+j}),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}g &= \sum(\operatorname{Re}h_{ij})(\mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_j+\mathrm{d}x_{n+i}\otimes\mathrm{d}x_{n+j})\\ &\quad+\sum(\operatorname{Im}h_{ij})(\mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_{n+j}-\mathrm{d}x_{n+i}\otimes\mathrm{d}x_j),\\ \widetilde{g} &= \sum(\operatorname{Re}h_{ij})(\mathrm{d}x_{n+i}\otimes\mathrm{d}x_j-\mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_{n+j})\\ &\quad+\sum(\operatorname{Im}h_{ij})(\mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_{n+j}+\mathrm{d}x_{n+i}\otimes\mathrm{d}x_{n+j}).\end{aligned}$$

对 $\widetilde{g}$ 我们来证明

$$\widetilde{g}(X,Y)=g(X,IY),$$

其中 X,Y 为 $2n$ 维实解析流形 M 上的向量场.

事实上，有

$$\begin{aligned}&\widetilde{g}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)=\operatorname{Im}h_{ij},\quad \widetilde{g}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_{n+j}}\Big)=-\operatorname{Re}h_{ij},\\ &\widetilde{g}\Big(\frac{\partial}{\partial x_{n+i}},\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)=\operatorname{Re}h_{ij},\quad \widetilde{g}\Big(\frac{\partial}{\partial x_{n+i}},\frac{\partial}{\partial x_{n+j}}\Big)=\operatorname{Im}h_{ij},\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}&g\Big(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)=\operatorname{Re}h_{ij},\quad g\Big(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_{n+j}}\Big)=\operatorname{Im}h_{ij},\\ &g\Big(\frac{\partial}{\partial x_{n+i}},\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)=-\operatorname{Im}h_{ij},\quad g\Big(\frac{\partial}{\partial x_{n+i}},\frac{\partial}{\partial x_{n+j}}\Big)=\operatorname{Re}h_{ij},\end{aligned}$$

所以断言成立.

令

$$g=\mathrm{d}x\begin{pmatrix}\operatorname{Re}H(z,\overline{z}) & \operatorname{Im}H(z,\overline{z})\\ -\operatorname{Im}H(z,\overline{z}) & \operatorname{Re}H(z,\overline{z})\end{pmatrix}\mathrm{d}x',$$

记

$$J_0 = \begin{pmatrix} I & -\sqrt{-1}I \\ I & \sqrt{-1}I \end{pmatrix},$$

由

$$J_0 \begin{pmatrix} \operatorname{Re} H(z,\overline{z}) & \operatorname{Im} H(z,\overline{z}) \\ -\operatorname{Im} H(z,\overline{z}) & \operatorname{Re} H(z,\overline{z}) \end{pmatrix} \overline{J_0}' = 2 \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & \overline{H} \end{pmatrix} > 0$$

可知 g 为实解析流形上的 Riemann 度量，它适合条件

$$g(I(X), I(Y)) = g(X, Y).$$

事实上，显然 g 为对称双线性函数，$\widetilde{g}$ 为斜对称双线性函数．而

$$\begin{aligned} g(I(X), I(Y)) &= \widetilde{g}(I(X), Y) = -\widetilde{g}(Y, I(X)) = -g(Y, I^2(X)) \\ &= -g(Y, -X) = g(Y, X) = g(X, Y). \end{aligned}$$

我们来证明

定理 5.1.17 设 M 为 n 维复流形，它作为 $2n$ 维实流形，有 Riemann 度量 g. 则 M 有 Hermite 度量 h, 使得 $\operatorname{Re} h = g$, 当且仅当

$$g(I(X), I(Y)) = g(X, Y)$$

对一切实解析流形 M 上的向量场 X, Y 成立.

证 上面已证 Hermite 度量 h 的实部 g 为 Riemann 度量，且 $g(I(X), I(Y)) = g(X, Y)$.

反之，若复流形 M 作为实流形，有 Riemann 度量 g, 它适合 $g(I(X), I(Y)) = g(X, Y)$, 即记

$$g = \sum_{i,j=1}^{2n} g_{ij}(x) \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j,$$

则有

$$g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = g(I(\frac{\partial}{\partial x_i}), I(\frac{\partial}{\partial x_j})) = g(\frac{\partial}{\partial x_{n+i}}, \frac{\partial}{\partial x_{n+j}}),$$
$$g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_{n+j}}) = g(I(\frac{\partial}{\partial x_i}), I(\frac{\partial}{\partial x_{n+j}})) = g(\frac{\partial}{\partial x_{n+i}}, -\frac{\partial}{\partial x_j}),$$

所以 $g_{ij}=g_{n+i,n+j}$, $g_{i,n+j}=-g_{n+i,j}$. 即记 $G(x)=(g_{ij}(x))$, 将它按前 n 行列分块，则有

$$G(x)=\begin{pmatrix} S(x) & B(x) \\ -B(x) & S(x) \end{pmatrix}>0,$$

其中 $S(x)$ 实对称， $B(x)$ 实斜对称. 所以

$$H(z,\overline{z})=S(x)+\sqrt{-1}B(x)$$

为 Hermite 方阵，而

$$\begin{aligned} g &= \mathrm{d}xG(x)\otimes \mathrm{d}x' \\ &= \frac{1}{4}(\mathrm{d}z,\overline{\mathrm{d}z})\otimes J_0\begin{pmatrix} S(x) & B(x) \\ -B(x) & S(x) \end{pmatrix}\overline{J_0}'\begin{pmatrix} \overline{\mathrm{d}z}' \\ \mathrm{d}z' \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{d}zH(z,\overline{z})\otimes\overline{\mathrm{d}z}'+\frac{1}{2}\overline{\mathrm{d}zH(z,\overline{z})}\otimes \mathrm{d}z'. \end{aligned}$$

记 $\widetilde{g}(X,Y)=g(X,IY)$, 其中 X,Y 为实流形 M 上的向量场，则

$$\begin{aligned} \widetilde{g} &= \mathrm{d}xG(x)\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}\otimes \mathrm{d}x' \\ &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\mathrm{d}zH(z,\overline{z})\otimes\overline{\mathrm{d}z}'+\frac{\sqrt{-1}}{2}\overline{\mathrm{d}zH(z,\overline{z})}\otimes \mathrm{d}z'. \end{aligned}$$

所以

$$h=g+\sqrt{-1}\widetilde{g}=\mathrm{d}zH(z,\overline{z})\otimes\overline{\mathrm{d}z}'.$$

另一方面，易证 $G(x)>0$ 当且仅当 $H(z,\overline{z})>0$. 至此证明了定理. 证完.

定义 5.1.18 设 (M_i,h_i) 为 Hermite 流形. M_1 到 M_2 上的全纯同构称为 **等度量变换**, 如果 $\sigma^*(h_1)=h_2$. 这时，称 (M_1,h_1) 和 (M_2,h_2) **互相全纯同构**.

当 $M_2=M_2=M,h_2=h_1=h$ 时，称全纯同构为 **全纯自同构**. 它们的全体构成的普通群 Aut(M,h) 称为 Hermite 流形 (M,h) 的 **全纯自同构群**.

由于 Hermite 流形是一类特殊的 Riemann 流形，而全纯同构是一类特殊的等度量变换，而且由于实映射全纯当且仅当 $\sigma_* \circ I = I \circ \sigma_*$，所以 Hermite 流形 (M, h) 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(M, h)$ 为 (M, h) 作为 Riemann 流形的等度量变换群的闭普通子群，所以为李子群.

显然，Hermite 流形的根本问题是在全纯同构下的分类.

由定理 5.1.17 立即有

定义 5.1.19 设 (M, h) 为 Herimte 流形，则

$$\Omega = \mathrm{Im}\, h = \frac{1}{\sqrt{-1}} \sum h_{ij}(z, \overline{z}) \mathrm{d}z_i \wedge \overline{\mathrm{d}z_j}$$

为 (M, h) 上的 $(1, 1)$ 形式，称为 (M, h) 上的 **Kähler 形式**.

当 $d\Omega = 0$ 时，Hermite 流形 (M, h) 称为 **Kähler 流形**.

定义 5.1.20 Hermite 流形 (M, h) 称为**齐性 Hermite 流形**，如果 (M, h) 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(M, h)$ 在流形 M 上可递.

由于 Hermite 流形 (M, h) 是实 Riemann 流形 (M, g)，而且有复结构 I 和 Hermite 度量 h. 而齐性 Hermite 流形 (M, h) 的全纯自同构群 $\sigma \in \mathrm{Aut}(M, h)$ 有

(1) $\sigma_* \circ I = I \circ \sigma_*$;

(2) $\sigma^*(h) = h$.

作为实 Riemann 流形 (M, g)，还有

(3) $g(IX, IY) = g(X, Y)$;

(4) $h(X, Y) = g(X, Y) + \sqrt{-1} g(X, IY)$.

由 (M, h) 在 $\mathrm{Aut}(M, h)$ 下可递，在流形 M 中取定一点 p，记 K 为点 p 的迷向子群. 任取 $q \in M$，任取 $\sigma \in \mathrm{Aut}(M, h)$，使得 $q = \sigma(p)$. 于是有

(1) $\sigma_* \circ I_p = I_q \circ \sigma_*$;

(2) $h_p(X_p, Y_p) = (\sigma^* h_q)_p(X_p, Y_p) = h_q(\sigma_*(X_p), \sigma_*(Y_p))$,

即

$$h_p(X_p, Y_p) = h_q(\sigma_*(X_p), \sigma_*(Y_p)).$$

因此记 $G = \mathrm{Aut}\,(M, h)$, 则 I 称为 **G 不变复结构**, h 称为 **G 不变 Hermite 度量**. 从这个角度, 我们有

引理 5.1.21 设 (M, g) 为齐性 Riemann 流形, G 为流形 M 上的李变换群. 如果在 M 中一点 p, 群 G 中关于点 p 的迷向子群 K 为紧李子群. 在流形 M 中点 p 的切空间 $T_p(M)$ 上若有线性变换 I_p, 适合条件

(1) $I^2 = -\mathrm{id}$;

(2) $[X_p, Y_p] + I_p[X_p, I_pY_p] + I_p[I_pX_p, Y_p] = [I_pX_p, I_pY_p]$;

(3) $g_p(I_p(X_p), I_p(Y_p)) = g_p(X_p, Y_p)$.

在流形 M 中任取一点 q, 任取 $\sigma \in G$, 使得 $\sigma(p) = q$. 在点 q 的切空间 $T_q(M)$ 上定义线性变换

$$I_q = \sigma_* \circ I_p \circ \sigma_*^{-1}$$

及内积

$$g_q = (\sigma^*)^{-1}(g_p),$$

使得 I 为流形 M 上的 G 不变复结构, g 为流形上的 G 不变 Riemann 度量, 当且仅当它适合条件

(1) $I_p \circ \sigma_* = \sigma_* \circ I_p$, $\forall\, \sigma \in K$;

(2) $\sigma^*(g_p) = g_p$, $\forall\, \sigma \in K$.

这时, 流形 M 有 Hermite 度量

$$h(X, Y) = g(X, Y) + \sqrt{-1}g(X, IY),$$

且 (M,h) 为齐性 Hermite 流形，使得 $G\subset \mathrm{Aut}\,(M,h)$.

证 今若 $\sigma,\tau\in G$, $\sigma(p)=\tau(p)=q$, 即 $\xi=\tau^{-1}\sigma\in K$. 为了在切空间 $T_q(M)$ 上的线性变换 I_q 及内积 g_q 有意义，当且仅当

$$I_q=\sigma_*\circ I_p\circ\sigma_*^{-1}=\tau_*\circ I_p\circ\tau_*^{-1},$$
$$g_q=(\sigma^*)^{-1}(g_p)=(\tau^*)^{-1}(g_p).$$

于是 $\xi_*\circ I_p=(\tau^*)^{-1}\circ\sigma_*\circ I_p=I_p\circ(\tau_*)^{-1}\circ\sigma_*=I_p\circ\xi_*$. 因为 $\xi^*=\sigma^*\circ(\tau^*)^{-1}$, 所以还有 $\xi^*(g_p)=g_p$, $\forall\,\xi\in K$. 这时，显然 $q\to I_q$, $q\to g_q$ 都解析，所以定义了复结构 I 及 Riemann 度量 g.

今已知 $g_p(I_p(X_p),I_p(Y_p))=g_p(X_p,Y_p)$, 所以

$$\begin{aligned}&g_q(I_q(X_q),I_q(Y_q))=g_p(\sigma_*^{-1}(I_q(X_q)),\sigma_*^{-1}(I_q(Y_q)))\\&=g_p(I_p(\sigma_*^{-1}(X_q)),I_p(\sigma_*^{-1}(Y_q))=g_p(\sigma_*^{-1}(X_q),\sigma_*^{-1}(Y_q))\\&=g_q(X_q,Y_q).\end{aligned}$$

这证明了上面定义的 Riemann 度量 g 有 $g(I(X),I(Y))=g(X,Y)$, 因此

$$h(X,Y)=g(X,Y)+\sqrt{-1}g(X,\sqrt{-1}Y)$$

定义了 Hermite 度量，且有 $\sigma_*h=h$. 引理证完.

由于实李群 G 在 Hermite 流形 (M,h) 上可递，我们有解析映射

$$G\xrightarrow{\pi}G/K\xrightarrow{\tau}M,$$

它定义为

$$\pi(g)=gK,\quad \tau(gK)=g(p),\quad \forall\,g\in G.$$

注意到由于 G 为流形 M 上的李变换群，又 K 紧，所以 τ 为双解析同胚. 利用

$$\widetilde{I}=\tau_*^{-1}\circ I\circ\tau_*,\quad \tau^*(h)=\widetilde{h}.$$

于是 $(G/K,\widetilde{h})$ 仍为 Hermite 流形，且 τ 为全纯同构. 由引理 5.1.21, 我们只需考虑 Hermite 流形 $(G/K,\widetilde{h})$ 在点 eK 的复结构 $\widetilde{I}_{eK}$ 及内积 $\widetilde{h}_{eK}$. 今 e 为李群 G 的单位元素，而 $\pi(e)=eK$. 考虑李群 G

的单位元素 e 的切空间 $T_e(G)$. 已知利用 $X \to X_0, \forall X \in \mathfrak{G}$, 其中 $\mathfrak{G}$ 为李群 G 的李代数, 则 $T_e(G)$ 是和李代数 $\mathfrak{G}$ 同构的李代数. 另一方面, 商流形 G/K 在点 eK 的切空间 $T_{eK}(G/K)$ 可看作线性空间 $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$. 在上述含意下, 给出到上的线性映射

$$\pi_*: \quad \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}/\mathfrak{K}.$$

今 $\widetilde{I}$ 为线性空间 $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ 上的线性变换, 所以在线性空间上存在许多线性变换 J, 使得

$$\pi_* \circ J = \widetilde{I} \circ \pi_*.$$

若另有线性空间 $\mathfrak{G}$ 上的线性变换 J_1, 适合 $\pi_* \circ J_1 = \widetilde{I} \circ \pi_*$, 于是 $\pi_* \circ (J - J_1) = 0$, 即 $\pi_*(JX - J_1X) = 0, \forall X \in \mathfrak{G}$. 今 $\pi_*^{-1}(0) = \mathfrak{K}$, 所以 $J(X) - J_1(X) \in \mathfrak{K}$, 即有 $J(X) \equiv J_1(X), (\mathrm{mod}\, \mathfrak{K})$. 反之, 任取线性空间 $\mathfrak{G}$ 上的线性变换 J_1, 只要适合 $J_1(X) \equiv J(X), (\mathrm{mod}\, \mathfrak{K})$, 则 $\pi_* \circ J_1 = \widetilde{I} \circ \pi_*$. 由此可见, 我们可取线性变换 J, 使得 J 适合条件

$$J(\mathfrak{K}) = 0, \quad \pi_* \circ J = \widetilde{I} \circ \pi_*,$$

则 J 唯一确定.

另一方面, 由于 $\mathrm{Im}\, h_p$ 为线性空间 $T_p(M)$ 上的斜对称双线性函数, 所以 $\mathrm{Im}\, \widetilde{h}_p$ 是线性空间 $T_{eK}(G/K)$ 上的斜对称双线性函数. 于是

$$F = \pi^*(\mathrm{Im}\,(\widetilde{h}))$$

为线性空间 $\mathfrak{G}$ 上的斜对称双线性函数.

下面给出 J 及 F 的全部性质.

定义 5.1.22 设 $\mathfrak{K}$ 为实李代数 $\mathfrak{G}$ 的紧子代数. 设 J 为李代数 $\mathfrak{G}$ 上的微分算子, F 为李代数 $\mathfrak{G}$ 上的实斜对称双线性函数. 李代数 $(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}; J, F)$ 称为 **Hermite 李代数**, 如果

(1) 紧子代数 $\mathfrak{K}$ 中无李代数 $\mathfrak{G}$ 的非零理想;

(2) $J(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{K}$;

(3) $(J^2 + \mathrm{id})(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{K}$;

(4) $[J, \mathrm{ad}\, X](\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{K}, \quad \forall\, X \in \mathfrak{K}$;

(5) $[X, Y] + J[X JY] + J[JX, Y] - [J(X), J(Y)] \in \mathfrak{K}$,

其中 $\forall\, X, Y \in \mathfrak{G}$;

(6) $F(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}) = 0$;

(7) $F(JX, JY) = F(X, Y), \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{G}$;

(8) $F(JX, X) \geq 0, \quad \forall\, X \in \mathfrak{G}$,

又等号成立当且仅当 $X \in \mathfrak{K}$.

我们有

定理 5.1.23 设 (M, g) 为齐性 Riemann 流形，它在流形 M 上的解析自同构群 $\mathrm{Aut}\,(M, h)$ 的连通李子群 G 的作用下可递. 在流形 M 中取定一点 p, 记 K 为李群 G 中点 p 的迷向子群. 记 $\mathfrak{G}$ 及 $\mathfrak{K}$ 分别为李群 G 及 K 的李代数. 则 (M, h) 为齐性 Hermite 流形，当且仅当李代数 $\mathfrak{G}$ 上存在斜对称双线性函数 F 及线性变换 J, 使得 $(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}; J, F)$ 为 Hermite 李代数，且有

(a) $[J, \mathrm{Ad}\, h](\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{K}, \quad \forall\, h \in K$;

(b) $F((\mathrm{Ad}\, h)X, (\mathrm{Ad}\, h)Y) = F(X, Y), \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{G}, h \in K$.

证 由于 G 为流形 M 上的李变换群，K 为 G 中的迷向子群，易证 K 中无李群 G 的非平凡正规子群. 所以 Hermite 李代数的条件 (1) 成立.

由于 $\pi_* \circ J = \widetilde{I} \circ \pi_*$, $\pi_*^{-1}(0) = \mathfrak{K}$, 其中 $\pi_* : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ 为到上的线性同态，所以证明了 $J(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{K}$, 即条件 (2) 成立. 由 $(\widetilde{I}^2 + \mathrm{id})(\mathfrak{G}/\mathfrak{K}) = 0$ 立即有 $(J^2 + \mathrm{id})(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{K}$. 即条件 (3) 成立.

由于 $\widetilde{I}$ 是定义在整个流形 G/K 上的. 由引理 5.1.21, 有 $\sigma_* \circ I = I \circ \sigma_*$, $\forall\, \sigma \in K$. 今商流形 G/K 上的解析自同构 $\mathcal{A}_g: xK \to (gx)K$ 有

$$\tau \circ \mathcal{A}_g = g \circ \tau, \quad \forall\, g \in G.$$

所以有

$$\tau_* \circ (\mathcal{A}_g)_* = g_* \circ \tau_*, \quad \forall\, g \in G.$$

设 $\sigma \in K$, 则

$$\mathcal{A}_h(xK) = (\sigma x)K = (\sigma x \sigma^{-1})K = ((\mathrm{ad}\,\sigma)x)K = (\mathrm{ad}_{G/K}\sigma)(xK).$$

所以

$$\mathcal{A}_\sigma = \mathrm{ad}_{G/K}(\sigma), \quad \forall\, \sigma \in K.$$

因此 $(\mathcal{A}_\sigma)_* = \mathrm{Ad}_{G/K}(\sigma), \forall\, \sigma \in K$. 于是有

$$\tau_* \circ \mathrm{Ad}_{G/K}(\sigma) \circ \tau_*^{-1} \circ I = I \circ \tau_* \circ \mathrm{Ad}_{G/K}(\sigma) \circ \tau_*^{-1}.$$

这证明了

$$\mathrm{Ad}_{G/K}(\sigma) \circ \widetilde{I} = \widetilde{I} \circ \mathrm{Ad}_{G/K}(\sigma), \quad \forall\, \sigma \in K.$$

于是

$$\mathrm{Ad}_{G/K}(\sigma) \circ \pi_* \circ J \circ \pi_*^{-1} = \pi_* \circ J \circ \pi_*^{-1} \circ \mathrm{Ad}_{G/K}(\sigma), \forall\, \sigma \in K.$$

因此证明了

$$\mathrm{Ad}\,(\sigma) \circ J \equiv J \circ \mathrm{Ad}\,(\sigma),\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{K}),\ \forall\, \sigma \in K,$$

即定理 5.1.23 的条件 (a) 成立.

由 $F = \pi^*(\mathrm{Im}\,\widetilde{h})$, 于是

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}) &= (\pi^*(\mathrm{Im}\,(\widetilde{h})))(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}) = (\mathrm{Im}\ \widetilde{h})(\pi_*(\mathfrak{G}), \pi_*(\mathfrak{K})) \\ &= (\mathrm{Im}\ \widetilde{h})(\pi_*(\mathfrak{G}), 0) = 0. \end{aligned}$$

即 Hermite 李代数的条件 (6) 成立. 由于

$$(\mathrm{Im}\ \widetilde{h})(\widetilde{I}X, \widetilde{I}Y) = (\mathrm{Im}\ \widetilde{h})(X, Y),$$

立即可知条件 (7) 成立. 最后, 由于 Riemann 度量 $g = \mathrm{Re}(\widetilde{h})$. 因此

$$(\mathrm{Im}\,\widetilde{h})(X,Y) = g(X,\widetilde{I}Y).$$

于是 $(\mathrm{Im}\,\widetilde{h})(\widetilde{I}X,\widetilde{I}Y) = g(\widetilde{I}X,\widetilde{I}Y) = g(X,Y)$ 正定. 由此立即可推出条件 (8) 成立. 最后, 由

$$F((\mathrm{Ad}\,\sigma)X,(\mathrm{Ad}\,\sigma)Y) = (\pi^*(\mathrm{Im}\,\widetilde{h}))((\mathrm{Ad}\,\sigma)X,(\mathrm{Ad}\,\sigma)Y)$$
$$= (\mathrm{Im}\,\widetilde{h})(\pi_*(\mathrm{Ad}\,\sigma)X,\pi_*(\mathrm{Ad}\,\sigma)Y), \quad \forall\, \sigma \in K.$$

令

$$\mathrm{Ad}\,\sigma = \pi_*^{-1} \circ \mathrm{Ad}_{G/K}(\sigma) \circ \pi_*,$$

所以

$$F((\mathrm{Ad}\,\sigma)X,(\mathrm{Ad}\,\sigma)Y)$$
$$= (\mathrm{Im}\,\widetilde{h})(\mathrm{Ad}_{G/K}(\sigma) \circ \pi_*(X),\mathrm{Ad}_{G/K}(\sigma) \circ \pi_*(Y)).$$

注意到 $(\mathrm{ad}\,\sigma)^*(\mathrm{Im}\,\widetilde{h}) = \mathrm{Im}\,\widetilde{h}, \forall\, \sigma \in G$, 今

$$F((\mathrm{Ad}\,\sigma)X,(\mathrm{Ad}\,\sigma)Y) = ((\mathrm{ad}\,\sigma)^*(\mathrm{Im}\,\widetilde{h}))(\pi_*(X),\pi_*(Y))$$
$$= (\mathrm{Im}\,\widetilde{h})(\pi_*(X),\pi_*(Y)) = F(X,Y), \ \forall\, X,Y \in \mathfrak{G}, \sigma \in K,$$

所以证明了定理中式 (b) 成立.

反之, 按上面的讨论反过来推, 由引理 5.1.21 便证明了齐性流形 (M,g) 为齐性 Hermite 流形. 实际上证明了商空间 G/K 上可引进 G 不变复结构 $\widetilde{I}$ 及 G 不变 Hermite 度量 $\widetilde{h}$, 使得 $(G/K,\widetilde{h})$ 为齐性 Hermite 流形. 证完.

由定理 5.1.23, 我们将齐性 Hermite 流形的条件全部化为李代数的条件.

这里要注意, 记 K^0 为紧李群 K 的单位连通分支, 则由于 $\exp\mathfrak{K} = K^0$, 所以条件 (a) 及 (b) 在 K^0 上等价于条件

(a) $\quad [J,\mathrm{ad}\,\mathfrak{K}](\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{K}$;

(b) $\quad F((\mathrm{ad}\,X)Y,Z) + F(Y,(\mathrm{ad}\,X)Z) = 0,$

其中 $X \in \mathfrak{K}, Y, Z \in \mathfrak{G}$. 因此，条件 (a) 和 (b) 是对紧李子群 K 的连通分支的代表元素所加的条件. 由于紧李群的连通分支必有限，所以条件 (a) 和 (b) 是指：对所有分量代表元素 k_i，有 $[J, \operatorname{Ad} k_i](\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{K}, F((\operatorname{Ad} k_i)X, (\operatorname{Ad} k_i)Y) = F(X, Y), \ \forall\ X, Y \in \mathfrak{G}$.

定义 5.1.24 设 $(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}; J, F)$ 为 Hermite 李代数，如果还有条件

$$(9) \quad F(X, [Y, Z]) + F(Z, [X, Y]) + F(Y, [Z, X]) = 0,$$

其中 $X, Y, Z \in \mathfrak{G}$, 则它称为 **Kähler 李代数**.

定理 5.1.25 条件和定理 5.1.23 相同. 则齐性 Hermite 流形 (M, h) 为齐性 Kähler 流形，当且仅当 Hermite 李代数 $(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}; J, F)$ 为 Kähler 李代数，且适合定理 5.1.23 的 $(a), (b)$.

证 显然，只要证明 $\mathrm{d}(\operatorname{Im} h) = 0$ 当且仅当

$$F(X, [Y, Z]) + F(Z, [X, Y]) + F(Y, [Z, X]) = 0.$$

注意到 $\tau : G/K \to M$ 为全纯同构，于是 $\tau^* \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ \tau^*$. 而 $\tau^*(\operatorname{Im} h) = \operatorname{Im} \widetilde{h}$, 所以 $\mathrm{d}(\operatorname{Im} h) = 0$ 当且仅当 $\mathrm{d}(\operatorname{Im} \widetilde{h}) = 0$. 由外微分的定义可知，任取 $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z} \in \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$, 有

定义 5.2.1 Hermite 流形 (M,h) 称为 **Hermite 对称空间**, 如果任取点 $p\in M$, 则存在 $\sigma_p\in \mathrm{Aut}\,(M,h)$, 使得 $\sigma_p^2=\mathrm{id}$, 且 σ_p 以点 p 为孤立不动点. 全纯自同构 σ_p 称为点 p 的 **对称变换**.

显然, 当 σ_p 为点 p 的对称变换时, 若全纯自同构 τ 有 $\tau(p)=q$, 则 $\tau\sigma_p\tau^{-1}$ 为点 q 的对称变换.

定理 5.2.2(É.Cartan) Hermite 对称空间为齐性 Hermite 流形.

证 令 (M,h) 为 Hermite 对称空间. 在流形 M 中任取两点 p,q. 作简单连续曲线 $\Gamma(t),0\le t\le 1$, 它以点 p 及点 q 为两个端点, 即 $\Gamma(0)=p,\Gamma(1)=q$. 今 $[0,1]$ 紧, 所以 $\Gamma(t),0\le t\le 1$ 紧. 因此存在有限多个流形 M 的标架 (U_i,φ_i), 使得 $U_i\cap U_{i+1}\ne\emptyset,i=0,\cdots,s-1$.

$$\bigcup_{0\le i\le s}U_i\supset\Gamma(t),0\le t\le 1.$$

且在 $U_{i-1}\cap U_i,U_i\cap U_{i+1}$ 中各取一点 p_{i-1},p_i, 其中 $p_0=p,p_s=q$, 则存在测地线 τ_{i-1} 联结 p_{i-1},p_i. 取测地线 τ_{i-1} 中关于 p_{i-1},p_i 的中点 q_i, 因此点 q_i 有对称变换 σ_i. 由于 σ_i 只有孤立不动点 q_i, 所以 $\sigma_i(p_{i-1})=p_i$. 因此 $\sigma_s\cdots\sigma_1=\sigma$ 为 Hermite 流形 (M,h) 的全纯自同构, 它有 $\sigma(p)=q$. 这证明了 (M,h) 为齐性 Hermite 流形. 证完.

显然, 对称 Hermite 流形在等度量变换下仍变为 Hermite 对称流形. 为了展开对称 Hermite 流形的分类理论, 我们先来考虑对称变换在切空间上的作用.

由定理 5.2.2, 我们设 (M,h) 为对称 Hermite 流形. $\mathrm{Aut}\,(M,h)$ 为全纯自同构群. 由定理 5.2.2, 它在流形 M 上的作用可递. 记 G 为 $\mathrm{Aut}\,(M,h)$ 中的李子群, 设 G 在 M 上作用可递. 在流形 M 中取定一点 p, 记 $K=\{\sigma\in G\mid\sigma(p)=p\}$ 为李群 G 中点 p 的迷向子群, 所以 K 为实李群 G 的紧子群. 分别记 $\mathfrak{G}$ 及 $\mathfrak{K}$ 为李群 G 及 K 的李代数. 由于对点 $p\in M$, 则对称变换 $\sigma_p\in K$, 于是 $\mathrm{Ad}\,\sigma_p$ 给出李代数 $\mathfrak{G}$ 的自同构. 由 $(\mathrm{Ad}\,\sigma_p)^2=\mathrm{Ad}\,\sigma_p^2=\mathrm{id}$, 所以线性变换的特征根只有 ±1. 且在李代数 $\mathfrak{G}$ 中存在基 $X_1,\cdots,X_n$, 使得 $\mathrm{Ad}\,\sigma_p$

有方阵表示 $\operatorname{diag}(-I^{(m)}, I^{(n-m)})$. 因此以 $X_1, \cdots, X_m$ 为基的子空间记为 $\mathfrak{G}_-$, 以 $X_{m+1}, \cdots, X_n$ 为基的子空间记作 $\mathfrak{G}_+$. 所以有空间直接和分解

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_- + \mathfrak{G}_+,$$

其中

$$\mathfrak{G}_\pm = \{X \in \mathfrak{G} \mid (\operatorname{Ad}\sigma_p)X = \pm X\}.$$

由于 $\operatorname{Ad}\sigma_p$ 为李代数的自同构，立即有

$$[\mathfrak{G}_+, \mathfrak{G}_+] \subset \mathfrak{G}_+, \quad [\mathfrak{G}_+, \mathfrak{G}_-] \subset \mathfrak{G}_-, \quad [\mathfrak{G}_-, \mathfrak{G}_-] \subset \mathfrak{G}_+.$$

引理 5.2.3 符号同上，则 $\mathfrak{G}_+ = \mathfrak{K}$.

证 今任取 $X_\pm \in \mathfrak{G}_\pm$, 则 $(\operatorname{Ad}\sigma_p)X_\pm = \pm X_\pm$. 所以

$$(\operatorname{ad}\sigma_p)(\exp tX_\pm) = \exp t(\operatorname{Ad}\sigma_p)X_\pm = \exp(\pm tX_\pm), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

这证明了

$$\sigma_p(\exp tX_\pm) = \exp(\pm tX_\pm)\sigma_p.$$

作用在点 p, 有

$$\sigma_p((\exp tX_\pm)(p)) = (\exp tX_\pm)^{\pm 1}(p).$$

即 $(\exp tX_+)(p)$ 为全纯自同构 σ_p 的不动点集， $\forall\, t \in \mathbb{R}$. 由于 σ_p 以 p 为孤立不动点，所以证明了

$$(\exp tX_+)(p) = p, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

即 $\exp tX_+ \in K$, 所以 $X_+ \in \mathfrak{K}$, 即 $\mathfrak{G}_+ \subset \mathfrak{K}$.

反之，我们来证 $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{G}_+$. 事实上，考虑全纯自同构 σ_p 在切空间 $T_p(M)$ 上的作用，我们可证 $(\sigma_p)_* = -(\mathrm{id})$. 这是因为 $\sigma_p^2 = \mathrm{id}$ 推出 $(\sigma_p)_*^2 = \mathrm{id}$, 即 $(\sigma_p)_*$ 有特征根 ± 1. 若 $(\sigma_p)_*$ 有特征根 $+1$, 则存在特征向量 β, 即 $(\sigma_p)_*\beta = \beta$, 过点 p 作方向 β 的测地线 $p(t)$, $|t| < \varepsilon$. 今 $\sigma_p(p) = p$, $(\sigma_p)_*\beta = \beta$. 所以有 $\sigma_p(p(t)) = p(t)$, $|t| < \varepsilon$. 但是 σ_p 以点 p 为孤立不动点，因此 $p(t) = p, \forall\, |t| < \varepsilon$. 这证明了 $p(t)$ 的方向为 0, 所以 $\beta = 0$. 这和特征向量非零矛盾. 这证明了 $(\sigma_p)_*$ 在切空间 $T_p(M)$ 上只有特征根 -1. 由 $(\sigma_p^*)^2 = \mathrm{id}$ 可知 $(\sigma_p)_* = -(\mathrm{id})$.

现在任取 $k \in K$, 由 K 为点 p 的迷向子群可知 $k' = \sigma_p k \sigma_p^{-1} \in K$. 今 $(k')_* = (\sigma_p k \sigma_p^{-1})_* = k_*$, 因此任取 $\alpha \in T_p(M)$, 作过点 p, 方向为 α 的测地线 $p(t)$. 于是由 $k(p) = k'(p) = p$, $k'_* = k_*$, 可知 $k'(p(t)) = k(p(t))$, $\forall\ |t| < \varepsilon$. 由于齐性 Riemann 流形是完备流形, 所以 $k'(p(t)) = k(p(t))$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$. 其中 $p(t), t \in \mathbb{R}$ 为测地线. 另一方面, 任取流形 M 中一点 q, 则存在点 p 和 q 相联的测地线, 记作 $q(t)$. 由上面 $\alpha \in T_p(M)$ 任取, 便证明了 $k'(q) = k(q), \forall\ q \in M$, 即 $k' = k$. 于是 $k \circ \sigma_p = \sigma_p \circ k, \forall\ k \in K$, 即 $\sigma_p \in \mathrm{C}_K(K)$, 其中 $\mathrm{C}_K(K)$ 为紧子群 K 的中心化子.

任取 $X \in \mathfrak{K}$, 则 $k = \exp tX \in K, \forall\ t \in \mathbb{R}$. 因此

$$(\mathrm{ad}\,\sigma_p)(\exp tX) = \exp t(\mathrm{Ad}\,\sigma_p)X = \exp tX, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

这证明了 $(\mathrm{Ad}\,\sigma_p)X = X$, 所以 $X \in \mathfrak{G}_+$, 即证明了 $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{G}_+$. 证完.

引理 5.2.4 符号同上. 改记 $\mathfrak{G}_-$ 为 $\mathfrak{P}$, 则有空间直接和分解

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P},$$

其中

$$[\mathfrak{K}, \mathfrak{K}] \subset \mathfrak{K}, \quad [\mathfrak{K}, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{P}, \quad [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{K}.$$

又

$$(\sigma_p)_*|_{\mathfrak{K}} = \mathrm{id}, \quad (\sigma_p)_*|_{\mathfrak{P}} = -\mathrm{id}, \quad \mathrm{C}(\sigma_p)^0 \subset K \subset \mathrm{C}(\sigma_p),$$

其中 $\mathrm{C}(\sigma_p)^0$ 为李子群 $\mathrm{C}(\sigma_p)$ 的单位分支.

证 上面的引理已经证明了 $\mathrm{C}_K(K) \ni \sigma_p$, 即证明了 $K \subset \mathrm{C}(\sigma_p)$. 我们来证 $\mathrm{C}(\sigma_p)^0 \subset K$. 事实上, 任取 $\tau \in \mathrm{C}(\sigma_p)$, 则有 $\sigma_p \circ \tau = \tau \circ \sigma_p$. 由上面引理证明可知 $(\mathrm{ad}\,\sigma_p)(\exp tX) = \exp tX$, 其中 X 属于闭李子群 $C(\sigma_p)$ 的李代数. 所以 $X \in \mathfrak{G}_+ = \mathfrak{K}$. 这证明了连通李群 $\mathrm{C}(\sigma_p)^0$ 的生成元素在 K 中, 所以 $\mathrm{C}(\sigma_p)^0 \subset K$. 证完.

由定理 5.1.14 可知, $\mathrm{Aut}\,(M, h)$ 不变 Riemann 度量

$$\mathrm{Re}\,(h) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \omega_i \otimes \omega_j,$$

其中 $A=(a_{ij})$ 为实正定对称方阵. 且我们可以在子空间 $\mathfrak{K}$ 及 $\mathfrak{P}$ 中分别取基, 使得 A 为单位方阵, 即

$$\mathrm{Re}\,(h)=\sum_{i=1}^{m}\omega_i\otimes\omega_i.$$

令 $\mathfrak{P}$ 中的基为 $X_1,\cdots,X_m$. 于是过点 p, 以 $\alpha=(a_1,\cdots,a_m)$ 为方向的测地线为

$$\sigma(t)=(\exp t\sum_{i=1}^{m}a_iX_i)(p),\quad \forall\, t\in\mathbb{R}.$$

定理 5.2.5 Hermite 对称空间 (M,h) 为齐性 Kähler 流形.

证 熟知任取 $\sigma\in\mathrm{Aut}\,(M,h)$, 则 $\mathrm{d}\circ\sigma^*=\sigma^*\circ\mathrm{d}$, 其中 d 为外微分. 今 $\mathrm{Im}\,h$ 为 $(1,1)$ 形式, $\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,h)$ 为 (2,1) 形式及 (1,2) 形式的和. 考虑点 p 的对称变换 σ_p, 于是商空间 G/K 上有点 eK 的对称变换 $\mathcal{A}_{\sigma_p}$, 且在点 eK 的切空间 $T_{eK}(G/K)=\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ 上有 $(\mathcal{A}_{\sigma_p})_*=-(\mathrm{id})$. 因此对 (1,1) 形式 $\mathrm{Im}\,\widetilde{h}$, 有 $(\mathcal{A}_{\sigma_p})^*(\mathrm{Im}\,\widetilde{h})=\mathrm{Im}\,\widetilde{h}$, 对 (2,1) 形式及 (1,2) 形式的和 $\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,\widetilde{h})$, 有 $(\mathcal{A}_{\sigma_p})^*(\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,\widetilde{h}))=-\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,\widetilde{h})$. 于是

$$-\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,\widetilde{h})=(\mathcal{A}_{\sigma_p})^*(\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,\widetilde{h}))=\mathrm{d}(\mathcal{A}_{\sigma_p}^*(\mathrm{Im}\,\widetilde{h}))=\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,\widetilde{h}).$$

这证明了 $\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,\widetilde{h})=0$, 即商空间 G/K 为齐性 Kähler 流形, 所以 Hermite 流形 (M,h) 为齐性 Kähler 流形. 证完.

由定理 5.2.5 可知, 设 (M,h) 为 Hermite 对称空间, G 为 $\mathrm{Aut}\,(M,h)$ 中的连通李子群, 它在流形 M 上可递. 对 M 中固定点 p, 记 K 为李群 G 中点 p 的迷向子群. 记 σ_p 为点 p 的对称变换, 有 $\sigma_p\in K$. 分别记 $\mathfrak{G}$ 及 $\mathfrak{K}$ 为李群 G 及 K 的李代数. 于是由 M 上的 G 不变复结构 I 诱导了李代数 $\mathfrak{G}$ 上的线性变换 J, 它不唯一. 又由 M 上的 Kähler 形式 $\mathrm{Im}\,h$ 诱导了李代数 $\mathfrak{G}$ 上的斜对称双线性函数 F, 使得 $(\mathfrak{G},\mathfrak{K};J,F)$ 为 Kähler 李代数. 另外, 还有

(a) $[\mathrm{Ad}\,k,J](\mathfrak{G})\subset\mathfrak{K}$;

(b) $F((\mathrm{Ad}\,k)X,(\mathrm{Ad}\,k)Y)=F(X,Y),\quad \forall X,Y\in\mathfrak{G},k\in K.$

另一方面，存在李代数 $\mathfrak{G}$ 的子空间 $\mathfrak{P}$，使得

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$$

为子空间直接和，而且有 $(\sigma_p)_*|_{\mathfrak{K}}=\mathrm{id}$，$(\sigma_p)_*|_{\mathfrak{P}}=-\mathrm{id}$. 又有

$$[\mathfrak{K},\mathfrak{K}]\subset\mathfrak{K},\quad [\mathfrak{K},\mathfrak{P}]\subset\mathfrak{P},\quad [\mathfrak{P},\mathfrak{P}]\subset\mathfrak{K}.$$

于是，我们有

引理 5.2.6 设 G 为实连通李群，K 为 G 中的紧子群. 分别记 G 及 K 的李代数为 $\mathfrak{G}$ 及 $\mathfrak{K}$. 则旁集空间 G/K 为 Hermite 对称空间，使得 G 在 G/K 上的作用有效，当且仅当

(1) 紧李群 K 中无李群 G 的非平凡正规子群;

(2) 存在 $e\neq\sigma_0\in K$ 使得 $\sigma_0^2=e$，其中 e 为群 G 的单位元素，且李代数 $\mathfrak{G}$ 有子空间直接和分解

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P},\quad (\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{K}=\mathfrak{K},\quad (\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{P}=\mathfrak{P},$$

使得

$$\mathrm{Ad}\,\sigma_0|_{\mathfrak{K}}=\mathrm{id},\quad \mathrm{Ad}\,\sigma_0|_{\mathfrak{P}}=-(\mathrm{id}),$$

这蕴含

$$[\mathfrak{K},\mathfrak{K}]\subset\mathfrak{K},\quad [\mathfrak{K},\mathfrak{P}]\subset\mathfrak{P},\quad [\mathfrak{P},\mathfrak{P}]\subset\mathfrak{K};$$

(3) 在李代数 $\mathfrak{G}$ 上存在线性变换 J，适合

$$J(\mathfrak{K})=0,\quad J(\mathfrak{P})=\mathfrak{P},$$

记 $J|_{\mathfrak{P}}=J_0$，则有

$$J_0^2=-\mathrm{id},\quad [J_0,\mathrm{Ad}_{\mathfrak{P}}K]=0;$$

(4) 在李代数 $\mathfrak{G}$ 上存在斜对称双线性函数 F，适合 $\ker F=\{x\in\mathfrak{G}\mid F(\mathfrak{G},x)=0\}=\mathfrak{K}$，又

$$F(J_0X,J_0Y)=F(X,Y),\ F((\mathrm{Ad}_{\mathfrak{P}}\mathfrak{K})X,(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{P}}\mathfrak{K})Y)=F(X,Y),$$

其中 $X, Y \in \mathfrak{P}$, 且

$$F(J_0 X, Y) = (X, Y), \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{P}$$

为子空间 $\mathfrak{P}$ 上的内积.

证 注意到 $J(\mathfrak{K}) = 0, (\mathrm{Ad}\, K)\mathfrak{K} = \mathfrak{K}$. 所以由 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 可知定理 5.1.23 的条件 $(a), (b)$ 等价于

$$[J_0, \mathrm{Ad}_{\mathfrak{P}} K] = 0, \quad F((\mathrm{Ad}\, k)X, (\mathrm{Ad}\, k)Y) = F(X, Y),$$

其中 $k \in K$, $X, Y \in \mathfrak{P}$. 而 Kähler 李代数的条件 (9) 是自然推论. 事实上, 由

$$F((\mathrm{Ad}\, k)X, (\mathrm{Ad}\, k)Y) = F(X, Y), \ \forall\, k \in K,\ X, Y \in \mathfrak{G}$$

推出

$$F([Z, X], Y) + F(X, [Z, Y]) = 0, \ \forall\, Z \in \mathfrak{K},\ X, Y \in \mathfrak{G}.$$

而 $F(Z, [X, Y]) = 0$, 所以当 X, Y, Z 中至少有一个元素属于 $\mathfrak{K}$ 时式 (9) 成立. 余下设 $X, Y, Z \in \mathfrak{P}$, 由于 $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{K}$, 所以式 (9) 成立. 这证明了断言.

再 Hermite 李代数的条件 (3) 等价于 $(J_0^2 + \mathrm{id})(\mathfrak{P}) = 0$. 条件 (4) 为 $[J, \mathrm{Ad}\, K](\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{K}$ 的推论. 它等价于 $[J_0, \mathrm{Ad}_{\mathfrak{P}} K] = 0$. 条件 (5) 是自然推论. 事实上, 若 $X \in \mathfrak{K}$, 则 $JX = 0$, 所以

$$[X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] = [X, Y] + J[X, JY].$$

当 $Y \in \mathfrak{K}$ 时, 由 $JY = 0$ 可知 $[X, Y] \in \mathfrak{K}$. 当 $Y \in \mathfrak{P}$ 时, 由 $[J_0, \mathrm{ad}_{\mathfrak{P}} X] = 0$ 可知 $[X, Y] + J[X, JY] \in \mathfrak{K}$. 因此, 只要在 $X, Y \in \mathfrak{P}$ 时证明. 由于 $J\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$, $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{K}$, 这时条件 (5) 显然成立. 至此证明了断言.

条件 (6),(7),(8) 等价于引理中的 (4). 引理证完.

注意到李代数 $\mathfrak{G}$ 上的 Killing 型 $B(x, y)$ 有

$$B(\mathfrak{P}, \mathfrak{K}) = 0.$$

事实上，任取 $X \in \mathfrak{P}, Y \in \mathfrak{K}$, 则 $(\mathrm{Ad}\,\sigma_p)X = X, (\mathrm{Ad}\,\sigma_p)Y = -Y$. 于是

$$B(X,Y) = B((\mathrm{Ad}\,\sigma_p)X, (\mathrm{Ad}\,\sigma_p)Y) = -B(X,Y).$$

这证明了断言.

引理 5.2.7 符号同上. Killing 型 $B(x,y)$ 的核 $\ker B = \mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}$, 且 Killing 型 $B(x,y)$ 在紧子代数 $\mathfrak{K}$ 上负定.

证 由于点 p 的对称变换 σ_p 使得 $\mathrm{Ad}\,\sigma_p \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$, 所以任取 $X \in \ker B$, 则

$$B(\mathfrak{G}, (\mathrm{Ad}\,\sigma_p)X) = B((\mathrm{Ad}\,\sigma_p)\mathfrak{G}, X) = 0.$$

这证明了 $(\mathrm{Ad}\,\sigma_p)X \in \ker B$, 所以 $(\mathrm{Ad}\,\sigma_p)(\ker B) \subset \ker B$. 因此

$$\ker B = (\ker B) \cap \mathfrak{K} + (\ker B) \cap \mathfrak{P}$$

为子空间直接和. 为了证明 $\ker B = \mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}$, 只要证 $(\ker B) \cap \mathfrak{K} = 0$ 就够了. 任取 $X \in (\ker B) \cap \mathfrak{K}$. 今紧李代数 $\mathfrak{K}$ 有表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{G})$, 所以有不变内积 $< x, y >$. 由 $< (\mathrm{ad}\,X)Y, Z > + < Y, (\mathrm{ad}\,X)Z >= 0$, 因此在李代数 $\mathfrak{G}$ 中取定关于内积 $< x, y >$ 的标准正交基, 则 $\mathrm{ad}\,X$ 的方阵表示为实斜对称方阵, 它的非零特征根为纯虚数. 但是 $X \in \ker B$, 即有 $B(X,X) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,X)^2 = 0$. 今 $(\mathrm{ad}\,X)^2$ 的非零特征根为负实数, 所以 $\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,X)^2 \leq 0$, 等号成立当且仅当 $\mathrm{ad}\,X = 0$. 这证明了 $(\ker B) \cap \mathfrak{K} \subset \mathrm{C}(\mathfrak{G})$. 由于 $\mathfrak{K}$ 中没有 $\mathfrak{G}$ 的非零理想, 因此证明了 $(\ker B) \cap \mathfrak{K} = 0$. 引理证完.

现在来考虑引理 5.2.6 给出的李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 的一种分解. 我们有

引理 5.2.8 符号同引理 5.2.6. 记 $B(x,y)$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Killing 型, $\mathfrak{P}_0 = \ker B$ 为 Killing 型 $B(x,y)$ 的核. 记 $\mathfrak{P}$ 中子空间 $\mathfrak{P}_0$ 关于内积 (x,y) 的正交补为 $\mathfrak{P}'$. 记 $\mathfrak{K}' = [\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'] \subset \mathfrak{K}$. 记 $\mathfrak{K}$ 中子空间 $\mathfrak{K}'$ 关于内积 $-B(x,y)$ 的正交补为 $\mathfrak{K}_0$. 记

$$\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{K}_0 + \mathfrak{P}_0, \quad \mathfrak{G}' = \mathfrak{K}' + \mathfrak{P}'.$$

则有

(1) $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_0+\mathfrak{G}'$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的理想直接和;

(2) $J\mathfrak{G}_0\subset\mathfrak{G}_0, J\mathfrak{G}'\subset\mathfrak{G}'$, 因此 $(\mathfrak{G}_0,\mathfrak{K}_0;J,F)$ 及 $(\mathfrak{G}',\mathfrak{K}';J,F)$ 都是 Kähler 李代数;

(3) $(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{G}_0\subset\mathfrak{G}_0,\quad(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{G}'\subset\mathfrak{G}'$;

(4) $\mathfrak{P}_0$ 为 $\mathfrak{G}$ 的交换理想, $\mathfrak{G}'$ 为 $\mathfrak{G}$ 的半单理想.

又 $\mathfrak{G}'=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}'$ 为 Cartan 分解, $\mathrm{Ad}\,\sigma_p$ 为 Cartan 对合.

证 (1) 显然, 李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Killing 型 B 的核 $\mathfrak{P}_0$ 为理想. 由引理 5.2.7 有 $\mathfrak{P}_0\subset\mathfrak{P}$, 所以

$$[\mathfrak{P}_0,\mathfrak{P}]\subset\mathfrak{P}_0\cap\mathfrak{K}=0.$$

这推出 $\mathfrak{P}_0$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的交换理想.

(2) 我们有 $[\mathfrak{G}_0,\mathfrak{G}']=0$.

事实上, 由 (1) 已知 $[\mathfrak{P}_0,\mathfrak{P}']=0$. 而 $[\mathfrak{K},\mathfrak{P}']\subset\mathfrak{P}$, 所以 $(\mathfrak{P}_0,[\mathfrak{K},\mathfrak{P}'])=-([\mathfrak{K},\mathfrak{P}_0],\mathfrak{P}')=(\mathfrak{P}_0,\mathfrak{P}')=0$. 这推出 $[\mathfrak{K},\mathfrak{P}']\subset\mathfrak{P}'$. 再

$$0=B(\mathfrak{K}_0,\mathfrak{K}')=B(\mathfrak{K}_0,[\mathfrak{P}',\mathfrak{P}'])=B([\mathfrak{K}_0,\mathfrak{P}'],\mathfrak{P}'),$$

又 $B([\mathfrak{K}_0,\mathfrak{P}'],\mathfrak{K})=B(\mathfrak{P},\mathfrak{K})=0$, 所以证明了 $B([\mathfrak{K}_0,\mathfrak{P}'],\mathfrak{G})=0$, 即 $[\mathfrak{K}_0,\mathfrak{P}']\subset\mathfrak{P}_0\cap\mathfrak{P}'=0$. 因此

$$[\mathfrak{K}_0,\mathfrak{K}']=[\mathfrak{K}_0,[\mathfrak{P}',\mathfrak{P}']]=0,\quad[\mathfrak{P}_0,\mathfrak{K}']=[\mathfrak{P}_0,[\mathfrak{P}',\mathfrak{P}']]=0.$$

总之, 有

$$[\mathfrak{G}_0,\mathfrak{G}']=[\mathfrak{P}_0,\mathfrak{P}']+[\mathfrak{P}_0,\mathfrak{K}']+[\mathfrak{K}_0,\mathfrak{P}']+[\mathfrak{K}_0,\mathfrak{K}']=0.$$

(3) 由 $\mathfrak{P}_0,\mathfrak{P}',\mathfrak{K}'$ 及 $\mathfrak{K}_0$ 的定义, 可知有空间直接和

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_0+\mathfrak{G}'.$$

由 (2) 可知只要证明 $[\mathfrak{G}_0,\mathfrak{G}_0]\subset\mathfrak{G}_0$, $[\mathfrak{G}',\mathfrak{G}']\subset\mathfrak{G}'$, 则李代数 $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_0+\mathfrak{G}'$ 为理想直接和.

事实上，由 (1) 及 (2) 的证明可知

$$\begin{aligned}[\mathfrak{G}_0,\mathfrak{G}_0]&=[\mathfrak{P}_0,\mathfrak{P}_0]+[\mathfrak{P}_0,\mathfrak{K}_0]+[\mathfrak{K}_0,\mathfrak{K}_0]\subset\mathfrak{P}_0+[\mathfrak{K}_0,\mathfrak{K}_0],\\ [\mathfrak{G}',\mathfrak{G}']&=[\mathfrak{P}',\mathfrak{P}']+[\mathfrak{P}',\mathfrak{K}']+[\mathfrak{K}',\mathfrak{K}']\subset\mathfrak{P}'+\mathfrak{K}'+[\mathfrak{K}',\mathfrak{K}'].\end{aligned}$$

而

$$B([\mathfrak{K}_0,\mathfrak{K}_0],\mathfrak{K}')=-B(\mathfrak{K}_0,[\mathfrak{K}_0,\mathfrak{K}'])=0,$$

所以 $[\mathfrak{K}_0,\mathfrak{K}_0]\subset\mathfrak{K}_0$. 再

$$\begin{aligned}[\mathfrak{K}',\mathfrak{K}']&=[\mathfrak{K}',[\mathfrak{P}',\mathfrak{P}']]=[[\mathfrak{K}',\mathfrak{P}'],\mathfrak{P}']+[\mathfrak{P}',[\mathfrak{K}',\mathfrak{P}']]\\ &\subset[\mathfrak{P}',\mathfrak{P}']=\mathfrak{K}'.\end{aligned}$$

至此证明了 $[\mathfrak{G}_0,\mathfrak{G}_0]\subset\mathfrak{G}_0$, $[\mathfrak{G}',\mathfrak{G}']\subset\mathfrak{G}'$. 即断言 (3) 成立.

(4) 由于李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Killing 型限制在任意理想上都为此理想的 Killing 型，今 Killing 型 B 的核 $\mathfrak{P}_0=\ker B\subset\mathfrak{G}_0$, 这推出李代数 $\mathfrak{G}'$ 的 Killing 型非退化，所以 $\mathfrak{G}'$ 半单. 由 $(\mathrm{Ad}\,\sigma_p)^2=\mathrm{id}$ 以及 $\mathrm{Ad}\,\sigma_p|_{\mathfrak{K}'}=\mathrm{id}$, $\mathrm{Ad}\,\sigma_p|_{\mathfrak{P}'}=-\mathrm{id}$, $\mathfrak{K}'$ 为紧李代数 $\mathfrak{K}$ 的子代数，所以仍紧. 因此证明了 $\mathfrak{G}'=\mathfrak{K}'+\mathfrak{P}'$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}'$ 的 Cartan 分解，显然 $\mathrm{Ad}\,\sigma_p$ 为 $\mathfrak{G}'$ 的 Cartan 对合.

(5) $(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{G}_0\subset\mathfrak{G}_0$, $(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{G}'\subset\mathfrak{G}'$.

事实上，由于李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Killing 型在自同构下不变，于是显然有 $(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{P}_0=(\mathrm{Ad}\,K)(\ker B)=\ker B=\mathfrak{P}_0$. 又因为对内积 (x,y) 而言，有 $((\mathrm{Ad}\,k)X,(\mathrm{Ad}\,k)Y)=(X,Y)$, $\forall\,k\in K,X,Y\in\mathfrak{P}$, 所以证明了 $\mathfrak{P}_0$ 在 $\mathfrak{P}$ 中的正交补 $\mathfrak{P}'$ 仍有 $(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{P}'=\mathfrak{P}'$. 由 $\mathfrak{K}'=[\mathfrak{P}',\mathfrak{P}']$ 可知 $(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{K}'=\mathfrak{K}'$. 由于 $\mathfrak{K}_0$ 为 $\mathfrak{K}$ 中关于内积 $-B$ 的正交补，所以 $(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{K}_0\subset\mathfrak{K}_0$. 这证明了断言 (5).

(6) 为了证 $(\mathfrak{G}_0,\mathfrak{K}_0;J,F)$ 及 $(\mathfrak{G}',\mathfrak{K}';J,F)$ 为 Kähler 李代数，先要证 $\mathfrak{K}_0$ 中无 $\mathfrak{G}_0$ 的非零理想， $\mathfrak{K}'$ 中无 $\mathfrak{G}'$ 的非零理想. 事实

上，由于 $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_0+\mathfrak{G}'$ 为理想直接和，所以 $\mathfrak{G}_0$ 及 $\mathfrak{G}'$ 的理想都是 $\mathfrak{G}$ 的理想. 由于 $\mathfrak{K}$ 中无 $\mathfrak{G}$ 的非零理想，所以断言成立.

(7) 最后证明 $J\mathfrak{G}_0\subset\mathfrak{G}_0, J\mathfrak{G}'\subset\mathfrak{G}'$.

事实上，若 $J\mathfrak{G}_0\neq\mathfrak{G}_0$，则 $J\mathfrak{G}_0$ 在 $\mathfrak{G}'$ 上的投影 $\mathfrak{P}_0'$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 中子空间. 由于 $J\mathfrak{K}=0$，所以 $J\mathfrak{G}_0=J\mathfrak{K}_0+J\mathfrak{P}_0=J\mathfrak{P}_0\subset J\mathfrak{P}=\mathfrak{P}$. 这证明了 $\mathfrak{P}_0'\subset\mathfrak{P}\cap\mathfrak{G}'=\mathfrak{P}'$. 今

$$[\mathfrak{K}',J\mathfrak{P}_0]=J[\mathfrak{K}',\mathfrak{P}_0]=0,\quad [\mathfrak{K}',\mathfrak{G}_0]=0,$$

所以有 $[\mathfrak{K}',\mathfrak{P}_0']=0$. 再 $[\mathfrak{P}',\mathfrak{P}_0']\subset[\mathfrak{P}',\mathfrak{P}']=\mathfrak{K}'$，而

$$B([\mathfrak{P}',\mathfrak{P}_0'],\mathfrak{K}')=B(\mathfrak{P}',[\mathfrak{P}_0',\mathfrak{K}'])=0.$$

由于 Killing 型 B 使得 $-B$ 在 $\mathfrak{K}'$ 上为内积，所以证明了 $[\mathfrak{P}',\mathfrak{P}_0']=0$. 已知 $[\mathfrak{G}_0,\mathfrak{P}_0']\subset[\mathfrak{G}_0,\mathfrak{G}']=0$，这证明了 $\mathfrak{P}_0'\subset \mathrm{C}(\mathfrak{G})\subset\ker B=\mathfrak{P}_0$，所以 $\mathfrak{P}_0'\subset\mathfrak{P}_0\cap\mathfrak{P}'=0$. 这证明了 $J\mathfrak{P}_0=J\mathfrak{G}_0$ 在 $\mathfrak{G}'$ 的投影为零，所以 $J\mathfrak{G}_0\subset\mathfrak{G}_0$.

另一方面，$J\mathfrak{G}'=J\mathfrak{K}'+J\mathfrak{P}'=J\mathfrak{P}'$. 而

$$(\mathfrak{P}_0,J\mathfrak{P}')=(J\mathfrak{P}_0,J^2\mathfrak{P}')=-(J\mathfrak{P}_0,\mathfrak{P}')=-(\mathfrak{P}_0,\mathfrak{P}')=0,$$

所以 $J\mathfrak{P}'\subset\mathfrak{P}'\subset\mathfrak{G}'$. 即证明了 $J\mathfrak{G}'\subset\mathfrak{G}'$，因此断言 (7) 成立. 至此证明了引理. 证完.

下面进一步讨论李代数 $\mathfrak{G}'$. 为了方便起见，我们无妨设 $\mathfrak{P}_0=0$，即 $\mathfrak{G}'=\mathfrak{G}$. 我们有

引理 5.2.9 条件同上. 则在实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 中唯一存在元素 c，使得 $\mathrm{C}_{\mathfrak{G}}(c)=\mathfrak{K}$，且

$$F(X,Y)=B(c,[X,Y]),\quad \forall\, X,Y\in\mathfrak{G},$$

其中 B 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Killing 型.

证 今任取 $X\in\mathfrak{G}$，则 $F(X,Y),\forall\, Y\in\mathfrak{G}$ 为关于 Y 的线性函数. 由于李代数 $\mathfrak{G}$ 半单，所以 Killing 型非退化. 因此唯一存在

元素 $Z=Z(X)$, 使得

$$F(X,Y)=B(Z,Y), \quad \forall Y\in \mathfrak{G}.$$

当 X 遍历李代数 $\mathfrak{G}$ 时，因为 Z 由 X 唯一决定，所以证明了 $X\to Z=Z(X)$ 为单值映射．显然这是线性变换．所以我们证明了在半单李代数 $\mathfrak{G}$ 上唯一存在线性变换 $\mathcal{A}$, 使得

$$F(X,Y)=B(\mathcal{A}(X),Y)=-B(\mathcal{A}(Y),X)=-B(X,\mathcal{A}(Y)).$$

我们来证 $\mathcal{A}$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 上的微分．事实上，任取 $X,Y,Z\in\mathfrak{G}$, 则

$$F([X,Y],Z)+F([Z,X],Y)+F([Y,Z],X)=0,$$

即有

$$B(\mathcal{A}([X,Y]),Z)-B([Z,X],\mathcal{A}(Y))-B([Y,Z],\mathcal{A}(X))=0.$$

由 Killing 型不变性，可知

$$B(\mathcal{A}([X,Y]),X)-B([X,\mathcal{A}(Y)),Z)-B([\mathcal{A}(X),Y],Z)=0.$$

由 Killing 型 B 非退化，有

$$\mathcal{A}([X,Y])=[X,\mathcal{A}(Y)]+[\mathcal{A}(X),Y],$$

即 $\mathcal{A}$ 为微分算子．由于实半单李代数的微分为内微分，所以存在元素 $c\in\mathfrak{G}$, 使得 $\mathcal{A}=\mathrm{ad}\,c$. 这证明了

$$F(X,Y)=B((\mathrm{ad}\,c)X,Y)=B([c,X],Y)=B(c,[X,Y]).$$

注意到实半单李代数的中心 $C(\mathfrak{G})=0$, 所以由 $c,c_1\in\mathfrak{G},\mathrm{ad}\,c=\mathrm{ad}\,c_1$ 可推出 $c_1=c$. 即 c 是唯一的．

最后证 $\mathfrak{K}=C_{\mathfrak{G}}(c)$. 事实上，任取 $Y\in\mathfrak{G}$, 则 $F(X,Y)=0$ 当且仅当 $X\in\mathfrak{K}$, 而 $F(X,Y)=B([c,X],Y)$. 所以 $B([c,X],\mathfrak{G})=0$ 当且仅当 $X\in\mathfrak{K}$, 即 $[c,X]=0$ 当且仅当 $X\in\mathfrak{K}$. 这证明了元素 c 的中心化子 $C_{\mathfrak{G}}(c)=\mathfrak{K}$, 特别地， $c\in\mathfrak{K}$. 证完.

由引理 5.2.9, 当 $\mathfrak{G}$ 为实半单李代数时，我们知道存在 $c \in \mathfrak{K}$, 使得 $C(c) = \mathfrak{K}$, 因此 $\operatorname{ad} c$ 在子空间 $\mathfrak{P}$ 上非退化. 又

$$F(X,Y) = B(c,[X,Y]) = B([c,X],Y), \quad \forall\, X,Y \in \mathfrak{G}.$$

这时引理 5.2.9 的条件 (4) 等价于

$$B([c,J_0X],J_0Y) = B([c,X],Y),$$
$$B([c,(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{P}}k)X],(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{P}}k)Y) = B([c,X],Y),$$

其中 $X,Y \in \mathfrak{P}, k \in K$, 又 $B([c,J_0X],Y)$ 为子空间 $\mathfrak{P}$ 上的内积.

但是 $[(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{P}}k),J_0] = 0$, 所以 $[\operatorname{ad}_{\mathfrak{P}}c, J_0] = 0$. 因此

$$B(J_0[c,X],J_0Y) = B([c,X],Y), \quad \forall\, X,Y \in \mathfrak{P}.$$

但是 $\operatorname{ad}_{\mathfrak{P}}c$ 非异，即 $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{P}}c)\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$. 这证明了上式等价于

$$B(J_0X,J_0Y) = B(X,Y), \quad \forall\, X,Y \in \mathfrak{P}.$$

同理

$$B((\operatorname{Ad}_{\mathfrak{P}}k)X,(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{P}}k)Y) = B(X,Y), \quad \forall\, X,Y \in \mathfrak{P}, k \in K.$$

又

$$(X,Y) = B(J_0[c,X],Y) = -B([c,X],J_0Y), \quad \forall\, X,Y \in \mathfrak{P}.$$

为子空间 $\mathfrak{P}$ 上的内积.

今

$$B([c,(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{P}}k)X],(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{P}}k)Y) = B([c,X],Y),$$

其中 $k \in K$, $X,Y \in \mathfrak{P}$. 由于 $\operatorname{Ad} k$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的自同构，所以

$$B([c,(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{P}}k)X],(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{P}}k)Y) = B([(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{P}}k)^{-1}c,X],Y).$$

这证明了

$$B([c-(\operatorname{Ad} k)^{-1}c,X],Y) = B(c-(\operatorname{Ad} k)^{-1}c,[X,Y]) = 0,$$

其中 $X,Y\in\mathfrak{P}$. 由 $[\mathfrak{P},\mathfrak{P}]=\mathfrak{K}$ 以及 Killing 型 B 在 $\mathfrak{K}$ 上负定，所以证明了

$$(\mathrm{Ad}\,k)c=c,\quad \forall\, k\in K.$$

即等价于

$$\exp t(\mathrm{Ad}\,k)c=(\mathrm{ad}\,k)(\exp tc)=\exp tc,\quad \forall\, t\in\mathbb{R},k\in K.$$

此即 $\exp tc$ 和 K 中元素可交换，即 $\exp tc\in \mathrm{C}_K(K)$, $\forall\, t\in\mathbb{R}$. 反之，由 $\exp tc\in \mathrm{C}_K(K)$, 不难证明

$$B([c,(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{P}}k)X],(\mathrm{Ad}_{p}k)Y)=B([c,X],Y),$$

其中 $k\in K$, $X,Y\in\mathfrak{P}$.

我们有

引理 5.2.10 条件同上. 则在实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 中唯一存在元素 c', 使得 $c'\in \mathrm{C}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$, $\mathrm{C}(c')=\mathfrak{K}$. 所以 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{P}}c'$ 非异. 又 $\exp tc'\in \mathrm{c}_K(K)$, $\forall\, t\in\mathbb{R}$, 而且

$$J=\mathrm{ad}\,c',\quad J_0=\mathrm{ad}_{\mathfrak{P}}c',\quad \mathrm{Ad}\,(\sigma_p)=\exp\pi\mathrm{ad}\,(c').$$

证 我们先证

$$[X,J_0Y]=[J_0X,Y]=0,\quad \forall\, X,Y\in\mathfrak{P}.$$

事实上，由 $[\mathfrak{P},\mathfrak{P}]\subset\mathfrak{K}$, 任取 $X,Y\in\mathfrak{P}$, 则

$$\begin{aligned}&B(\mathfrak{K},[X,J_0Y])=-B([X,\mathfrak{K}],J_0Y)=B(J_0[X,\mathfrak{K}],Y)\\=&B([J_0X,\mathfrak{K}],Y)=-B(\mathfrak{K},[J_0X,Y]).\end{aligned}$$

所以由 $[X,J_0Y]+[J_0X,Y]\in[\mathfrak{P},\mathfrak{P}]\subset\mathfrak{K}$ 及 Killing 型 B 在 $\mathfrak{K}$ 上负定，便证明了断言.

接下去证 J 为半单李代数 $\mathfrak{G}$ 上的微分. 事实上， $J(\mathfrak{K})=0,J\mathfrak{P}=\mathfrak{P}$. 所以当 $X,Y\in\mathfrak{P}$ 时，有

$$J[X,Y]=0=[JX,Y]+[X,JY].$$

由 $X\in\mathfrak{K},Y\in\mathfrak{P}$, 有

$$J[X,Y]=[X,JY]=[JX,Y]+[X,JY].$$

当 $X,Y\in\mathfrak{K}$ 时，由 $[\mathfrak{K},\mathfrak{K}]\subset\mathfrak{K},J\mathfrak{K}=0$ 可知 J 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 上的微分. 因此存在 $c'\in\mathfrak{G}$, 使得 $J=\operatorname{ad}c'$. 由于 $J\mathfrak{K}=0$, 可知 $[c',\mathfrak{K}]=0$. 但是 $J=\operatorname{ad}c'$ 在 $\mathfrak{P}$ 上非异，所以有元素 c' 的中心化子 $\mathrm{C}(c')=\mathfrak{K}$. 特别地， $c'\in\mathfrak{K}$, 因此 $c'\in\mathrm{C}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$.

另一方面，由 $J(\mathfrak{K})=0,J\mathfrak{P}=\mathfrak{P}$ 及 $J_0^2=-\mathrm{id}$ 在 $\mathfrak{P}$ 上成立，因此有 $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{P}}c')^2=-\mathrm{id}$. 于是

$$(\exp\pi\operatorname{ad}c')_{\mathfrak{K}}=\mathrm{id}\,,$$

$$\begin{aligned}(\exp\pi\operatorname{ad}c')_{\mathfrak{P}}&=\sum\frac{\pi^j}{j!}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{P}}c')^j\\&=\sum\frac{(-1)^j\pi^{2j}}{(2j)!}(\mathrm{id}\,)+\sum\frac{(-1)^j\pi^{2j+1}}{(2j+1)!}\operatorname{ad}_{\mathfrak{P}}c'\\&=(\cos\pi)(\mathrm{id}\,)+(\sin\pi)J_0=-(\mathrm{id}\,).\end{aligned}$$

因此证明了

$$J=\operatorname{ad}c',\quad \operatorname{Ad}(\sigma_0)=\exp\pi\operatorname{ad}c'.$$

最后，由 $[J_0,\operatorname{Ad}_{\mathfrak{P}}K]=0$ 有 $[J,\operatorname{Ad}K]=0$. 于是

$$[\exp t\operatorname{ad}c',\operatorname{Ad}k]=0,\quad \forall\, k\in K,\ t\in\mathbb{R},$$

即

$$\operatorname{Ad}((\exp tc')k)=\operatorname{Ad}(k\operatorname{Ad}(\exp tc')).$$

于是 $(\exp tc')k(\exp tc')^{-1}k^{-1}\in\mathrm{C}(G),\forall\, t\in\mathbb{R},k\in K$. 但是李群 G 为连通半单李群，所以 G 的中心 $\mathrm{C}(G)$ 为零维李群，因此

$$(\exp tc')k(\exp tc')k^{-1}=e,\quad \forall\, k\in K,t\in\mathbb{R}.$$

这证明了 $\exp tc'\in\mathrm{C}_K(K)$. 引理证完.

因此，由引理 5.2.6 中李群 G 及李代数 $\mathfrak{G}$ 适合的充要条件及引理 5.2.10 可知，在 $\mathfrak{G}$ 为实半单李代数时，有

引理 5.2.11 符号同上. 充要条件为

(1) 紧李群 K 中没有李群 G 的非平凡正规子群;

(2) $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 分解, 它还有

$$(\operatorname{Ad} K)\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K},\ (\operatorname{Ad} K)\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P};$$

(3) 在李代数 $\mathfrak{K}$ 的中心 $C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$ 中存在元素 c 及 c', 使得

$$C(c) = C(c') = \mathfrak{K},$$

又

$$(\operatorname{ad}_{\mathfrak{P}} c')^2 = -\mathrm{id}, \quad \exp tc,\ \exp tc' \in C_K(K),\ \forall\, t \in \mathbb{R};$$

(4) $(X, Y) = -B([c, X], [c', Y])$, $\forall\, X, Y \in \mathfrak{P}$ 为子空间 $\mathfrak{P}$ 上的内积.

证 取 $J = \operatorname{ad} c'$, 则 J 为 $\mathfrak{G}$ 上的线性变换, 而且有 $J\mathfrak{K} = 0, J\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$, 又 $J^2 = -\mathrm{id}$ 在子空间 $\mathfrak{P}$ 上成立. 取 $F(X, Y) = B(c, [X, Y])$, $\forall\, X, Y \in \mathfrak{P}, F(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}) = 0$, 则 F 为 $\mathfrak{G}$ 上的斜对称双线性函数. 由 $\exp tc' \in C_K(K)$, 可知 $[\operatorname{Ad}(\exp tc'), \operatorname{Ad} K] = 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. 于是 $[\operatorname{ad} c', \operatorname{Ad} K] = 0$, 即 $[J, \operatorname{Ad} K] = 0$. 再当 $X \in \mathfrak{P}$ 时, $F(JX, X) = B(c, [JX, X]) = -B([c, X], [c', X])$. 由条件 (4) 可知 $F(JX, X) \geq 0$, 且等号成立当且仅当 $X \in \mathfrak{K}$. 最后, 任取 $X, Y \in \mathfrak{P}$, 则

$$\begin{aligned} F[JX, JY] &= B(c, [[c', X], [c', Y]]) \\ &= B(c, [[[c', X], c'], Y] + [c', [[c', X], Y]]). \end{aligned}$$

由 $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{P}} c')^2 = -\mathrm{id}$, $[[c', X], Y] \in [[\mathfrak{K}, \mathfrak{P}], \mathfrak{P}] \subset [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{K}$, $[c', \mathfrak{K}] = 0$ 可知

$$F(JX, JY) = B(c, [X, Y]) = F(X, Y).$$

至此证明了引理.

现在在子空间 $\mathfrak{P}$ 上讨论. 由于 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$ 为 Cartan 分解, 所以 Killing 型 B 有 $B(\mathfrak{K},\mathfrak{P})=0$. 又 $-B$ 在紧子代数 $\mathfrak{K}$ 上为内积, B 在子空间 $\mathfrak{P}$ 上非退化.

在 $\mathfrak{P}$ 中取关于内积 $(X,Y)=-B([c,X],[c',Y])$ 的标准正交基. 记 Killing 型 $B(x,y)$ 关于这组标准正交基的方阵表示为 S, 它是非异对称方阵. 记 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{P}}c$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{P}}c'$ 的方阵表示分别为 A,D, 则有

$$I=-ASD',\quad AS+SA'=0,\quad DS+SD'=0,\quad D^2=-I.$$

又任取 $k\in K$, 记 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{P}}k$ 的方阵表示为 A_k, 则有

$$A_kSA_k'=S,\quad AA_k=A_kA,\quad DA_k=A_kD,$$

特别地,

$$AD=DA.$$

显然存在实正交方阵 O, 使得

$$OSO'=\Lambda=\mathrm{diag}\,(\lambda_1I_1,\cdots,\lambda_sI_s),\ \lambda_1>\cdots>\lambda_s,$$

又 $\det S\neq 0$. 于是可易标准正交基, 即无妨设 $S=\Lambda$. 于是

$$A=-(D')^{-1}\Lambda^{-1}=D'\Lambda^{-1},$$

由 $AD=DA$ 有 $D'\Lambda^{-1}D=DD'\Lambda^{-1}$. 由 $AS+SA'=0$ 有 $D'+D=0$. 因此有 $D+D'=0,D^2=-I$. 由 $D\Lambda+\Lambda D'=0$ 有 $D\Lambda=\Lambda D$. 所以 $D=\mathrm{diag}\,(D_1,\cdots,D_s)$, 其中 D_i 和 I_i 的阶相同, 且 $D_j'+D_j=0$, $D_j^2=-I_j$. 记

$$J_j=\begin{pmatrix}0 & -\widetilde{I}_j\\ \widetilde{I}_j & 0\end{pmatrix},$$

其中单位方阵 $\widetilde{I}_j$ 的阶为单位方阵 I_j 的阶之半. 且无妨取标准正交基, 使得

$$\begin{aligned}&S=\Lambda=\mathrm{diag}\,(\lambda_1I_1,\cdots,\lambda_sI_s),\\&A=\mathrm{diag}\,(-\lambda_1^{-1}J_1,\cdots,-\lambda_s^{-1}J_s),\\&D=\mathrm{diag}\,(J_1,\cdots,J_s),\end{aligned}$$

其中 $\lambda_1 > \cdots > \lambda_s$. 今 $AA_k = A_kA$, 所以 $D'\Lambda^{-1}A_k = A_kD'\Lambda^{-1}$, 又有 $DA_k = A_kD$, 所以 $A_k\Lambda = \Lambda A_k$. 即

$$A_k = \mathrm{diag}\,(A_k^{(1)}, \cdots, A_k^{(s)}),$$

其中 $A_k^{(i)}$ 和 J_i 阶相同，又 $J_iA_k^{(i)} = A_k^{(i)}J_i$, $A_k^{(i)}(A_k^{(i)})' = I_i$.

我们按上面的次序将标准正交基分成 s 组，第 i 组对应 λ_iI_i. 以它们为基得到 s 个子空间 $\mathfrak{P}_i$, 且有

$$\mathfrak{P} = \sum_{i=1}^{s} \mathfrak{P}_i, \quad B(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_j) = 0, \quad i \neq j.$$

它有

(1) $\mathrm{ad}\,c$ 在 $\mathfrak{P}_i$ 中标准正交基对应的方阵表示为 $-\lambda_i^{-1}J_i$;

(2) $\mathrm{ad}\,c'$ 在 $\mathfrak{P}_i$ 中标准正交基下对应的方阵表示为 J_i;

(3) Killing 型 B 在 $\mathfrak{P}_i$ 中标准正交基下对应的方阵表示为 λ_iI_i.

又 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{P}}K$ 中元素在 $\mathfrak{P}_i$ 中标准正交基下对应的方阵表示为 $A_k^{(i)}$. 它正交，且和 J_i 可交换. 总之，有 $(\mathrm{ad}\,c)\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}_i$, $(\mathrm{ad}\,c')\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}_i$, $(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{P}}K)\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}_i$.

再考虑紧李子群 K 的表示 $(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{P}}, \mathfrak{P})$. 上面的讨论证明了 $\mathfrak{P}_i$ 为此表示的不变子空间. 由于紧李群 K 的表示完全可约，所以我们可以将每个 $\mathfrak{P}_i$ 分解为极小不变子空间直接和，使得它们关于 Killing 型两两正交. 至此，我们证明了

引理 5.2.12 符号同上. 对实半单李代数的 Cartan 分解 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$, 则 $\mathfrak{P}$ 可分解为关于紧李子群 K 的表示 $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{P})$ 的极小不变子空间直接和

$$\mathfrak{P} = \sum_{i=1}^{t} \mathfrak{P}_i,$$

其中存在非零实数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$, 有 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_t$, 且

$$B(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_j) = 0, \ i \neq j,$$

又 $\lambda_i^{-1} B$ 限制在 $\mathfrak{P}_i$ 上为内积. 且在 $\mathfrak{P}_i$ 上有

$$(\mathrm{ad}\, c)\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}_i, \quad (\mathrm{ad}\, c')\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}_i,$$

又 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{P}_i} c' = -\lambda_i \mathrm{ad}_{\mathfrak{P}_i} c = \mathrm{ad}_{\mathfrak{P}_i}(-\lambda_i c)$.

现在证明

引理 5.2.13 符号同上. 则

$$\mathfrak{G} = \sum_{i=1}^{t} \mathfrak{G}_i, \quad \mathfrak{G}_i = \mathfrak{K}_i + \mathfrak{P}_i, \quad \mathfrak{K}_i = [\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_i]$$

为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的理想直接和. 当 $\lambda_i > 0$ 时, Killing 型 B 在 $\mathfrak{P}_i$ 上正定, $\mathfrak{G}_i$ 为 **非紧型单李代数**, $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{K}_i + \mathfrak{P}_i$ 为 Cartan 分解; 当 $\lambda_i < 0$ 时, Killing 型 B 在 $\mathfrak{P}_i$ 上负定, 所以 $\mathfrak{G}_i$ 为紧单李代数. 又不论 $\lambda_i > 0$ 或 $\lambda_i < 0$, 总有 $\dim \mathrm{C}_{\mathfrak{K}_i}(\mathfrak{K}_i) = 1$.

证 今取 $i \neq j$. 由于 $\mathfrak{P}_i$ 为不变子空间, 所以有 $[\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_k] \subset \mathfrak{P}_k$, $1 \leq k \leq t$. 又有 $[\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_j] \subset [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{K}$, 而

$$B([\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_j], \mathfrak{K}) = -B(\mathfrak{P}_j, [\mathfrak{P}_i, \mathfrak{K}]) = B(\mathfrak{P}_j, \mathfrak{P}_i) = 0.$$

由 Killing 型 B 在紧子代数 $\mathfrak{K}$ 上负定, 所以证明了 $[\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_j] = 0$. 今 $[\mathfrak{K}_i, \mathfrak{P}_j] = [[\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_i], \mathfrak{P}_j] = [[\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_j], \mathfrak{P}_i] + [\mathfrak{P}_i, [\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_j]] = 0$. 又 $[\mathfrak{K}_i, \mathfrak{K}_j] = [\mathfrak{K}_i, [\mathfrak{P}_j, \mathfrak{P}_j]] = [[\mathfrak{K}_i, \mathfrak{P}_j], \mathfrak{P}_j] + [\mathfrak{P}_j, [\mathfrak{K}_i, \mathfrak{P}_j]] = 0$. 所以证明了 $[\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_j] = 0$.

由引理 5.2.8 可知 $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] = \mathfrak{K}$. 今 $\mathfrak{P} = \sum_{i=1}^{t} \mathfrak{P}_i$, 所以

$$\mathfrak{K} = [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] = [\sum \mathfrak{P}_i, \sum \mathfrak{P}_j] = \sum [\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_i] = \sum \mathfrak{K}_i,$$

其中 $[\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_j] = \delta_{ij} \mathfrak{K}_i$, 我们来证 $[\mathfrak{P}_i, \mathfrak{K}_i] \subset \mathfrak{P}_i$. 事实上, 已知 $[\mathfrak{P}_i, \mathfrak{K}_i] \subset [\mathfrak{P}, \mathfrak{K}] \subset \mathfrak{P}$, 所以任取 $j \neq i$, 则

$$B(\mathfrak{P}_j, [\mathfrak{P}_i, \mathfrak{K}_i]) = -B([\mathfrak{P}_j, \mathfrak{K}_i], \mathfrak{P}_i) = 0.$$

这证明了 $[\mathfrak{P}_i,\mathfrak{K}_i]\subset\mathfrak{P}_i$. 最后，有

$$
\begin{aligned}
&[\mathfrak{K}_i,\mathfrak{K}_i]=[\mathfrak{K}_i,[\mathfrak{P}_i,\mathfrak{P}_i]]=[[\mathfrak{K}_i,\mathfrak{P}_i],\mathfrak{P}_i]+[\mathfrak{P}_i,[\mathfrak{K}_i,\mathfrak{P}_i]]\\
&\subset[\mathfrak{P}_i,\mathfrak{P}_i]=\mathfrak{K}_i.
\end{aligned}
$$

所以证明了 $[\mathfrak{G}_i,\mathfrak{G}_i]\subset\mathfrak{G}_i$. 即 $\sum\limits_{i=1}^{t}\mathfrak{G}_i$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的理想直和，$\mathfrak{G}_i=\mathfrak{K}_i+\mathfrak{P}_i,\ \forall\, i$.

下面考虑 $J_0=\mathrm{ad}\,c'$. 今 $c'\in\mathfrak{K}=\sum\mathfrak{K}_i$, 所以 $c'=\sum c_i'$, 其中 $c_i'\in\mathfrak{K}_i$. 由 $\mathrm{ad}\,c'$ 在 $\mathfrak{P}$ 上非异，而 $\mathrm{ad}\,c'|_{\mathfrak{P}_i}=\mathrm{ad}\,c_i'$, 所以 $\mathrm{ad}\,c_i'$ 在 $\mathfrak{P}_i$ 上非异，特别地， $c_i'\in \mathrm{c}_{\mathfrak{K}_i}(\mathfrak{K}_i),\mathrm{C}(c_i')=\mathfrak{K}_i,c_i'\neq 0$. 我们来证 $\dim \mathrm{C}_{\mathfrak{K}_i}(\mathfrak{K}_i)=1$. 今 $\mathrm{C}_{\mathfrak{K}_i}(\mathfrak{K}_i)$ 为李代数 $\mathfrak{K}_i$ 中的交换子代数，又 $\mathrm{ad}\,\mathrm{C}_{\mathfrak{K}_i}(\mathfrak{K}_i)$ 中元素对前述标准正交基的方阵表示都是斜对称方阵，所以复线性空间 $\mathfrak{P}_i^C$ 中存在基，使得 $\mathrm{ad}\,\mathrm{C}_{\mathfrak{K}_i}(\mathfrak{K}_i)$ 中元素的方阵表示为对角方阵，非零对角元素纯虚. 由 $\mathrm{ad}\,\mathrm{C}_{\mathfrak{K}_i}(\mathfrak{K}_i)$ 为 $\mathfrak{P}_i$ 上的实线性变换，所以纯虚特征根成对出现. 即有

$$\mathfrak{P}_i^C=\sum_{\lambda\in\Phi_i}\mathfrak{P}_{i\lambda},$$

其中 λ 为线性空间 $\mathrm{C}_{\mathfrak{K}_i}(\mathfrak{K}_i)$ 上的线性函数，且 $\lambda\in\Phi_i$ 当且仅当 $\bar{\lambda}=-\lambda\in\Phi_i$. 于是有

$$\mathfrak{P}_i=\sum_{\lambda\in\Phi_i}\mathrm{Re}\,(\mathfrak{P}_{i\lambda}),\quad \mathrm{Re}\,(\mathfrak{P}_{i\lambda})=(\mathfrak{P}_{i\lambda}+\mathfrak{P}_{i\bar{\lambda}})\cap\mathfrak{P}_i.$$

今任取 $X\in\mathrm{C}_{\mathfrak{K}_i}(\mathfrak{K}_i)$, 所以 $\exp tX$ 和 K 中元素可交换，因此 $\mathrm{Ad}\,(\exp tX)=\exp t(\mathrm{ad}\,X)$ 和 $\mathrm{Ad}\,K$ 中元素可交换. 所以

$$[\mathrm{ad}\,X,\mathrm{Ad}_{\mathfrak{P}_i}K]=0.$$

这证明了

$$(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{P}_i}K)(\mathrm{Re}\,(\mathfrak{P}_{i\lambda}))\subset\mathrm{Re}\,(\mathfrak{P}_{i\lambda}).$$

但是 $\mathfrak{P}_i$ 为表示 $(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{P}},\mathfrak{P})$ 的极小不变子空间，这证明了 Φ_i 只由一个元素构成. 下面证它不等于零. 事实上，若 $\mathfrak{P}_i=\mathrm{Re}\,(\mathfrak{P}_{i0})$,

则任取 $X \in \mathrm{C}_{\mathfrak{K}_i}(\mathfrak{K}_i)$, 有 $(\mathrm{ad}\, X)\mathfrak{P}_i = 0$. 已知 $(\mathrm{ad}\, X)\mathfrak{K}_i = 0$, 所以 $X \in \mathrm{C}_{\mathfrak{G}_i}(\mathfrak{G}_i)$. 由于 $\mathfrak{G}_i$ 的中心包含在李代数 $\mathfrak{G}$ 的中心中, 由李代数 $\mathfrak{G}$ 半单, 所以中心为零. 这证明了 $\mathrm{C}_{\mathfrak{K}_i}(\mathfrak{K}_i) = 0$. 又和 $c_i \neq 0, c_i \in \mathrm{C}_{\mathfrak{K}_i}(\mathfrak{K}_i)$ 矛盾. 因此证明了断言. 今

$$\mathfrak{P}_i^C = \mathfrak{P}_{i\lambda} + \mathfrak{P}_{i\overline{\lambda}}.$$

任取 $X \in \mathrm{C}_{\mathfrak{K}_i}(\mathfrak{K}_i), Y \in \mathfrak{P}_{i\lambda}$, 则有 $\mathfrak{P}_{i\overline{\lambda}} = \overline{\mathfrak{P}_{i\lambda}}$, 又

$$(\mathrm{ad}\, X)Y = \lambda(X)Y, \quad (\mathrm{ad}\, X)\overline{Y} = -\lambda(X)\overline{Y}.$$

今 $c' \in \mathrm{C}_{\mathfrak{K}_i}(\mathfrak{K}_i)$, $\mathrm{ad}\, c'$ 在 $\mathfrak{P}_i$ 上非异, 所以 $\lambda(c') \neq 0$. 于是记 $X_0 = X - \lambda(X)\lambda(c')^{-1}c'$, 则 $(\mathrm{ad}\, X_0)Y = 0, \forall\, Y \in \mathfrak{P}_{i\lambda}$. 因此 $\mathrm{ad}\, X_0 = 0$ 在 $\mathfrak{P}_i$ 上成立, 所以 $X_0 \in \mathrm{C}(\mathfrak{G}) = 0$. 这证明了 $X = \lambda(X)\lambda(c')^{-1}c'$, 即 $\dim \mathrm{C}_{\mathfrak{K}_i}(\mathfrak{K}_i) = 1$.

最后, 我们来证实半单李代数 $\mathfrak{G}_i$ 为单李代数. 若 $\mathfrak{G}_i$ 不是单李代数, 则为两个非零半单理想 $\mathfrak{M}_1$ 和 $\mathfrak{M}_2$ 的直接和. 记 $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{K}_i' + \mathfrak{P}_i'$ 为 Cartan 分解. 则显然 $\mathfrak{G}_i = (\mathfrak{K}_1' + \mathfrak{K}_1') + (\mathfrak{P}_1' + \mathfrak{P}_2')$ 为李代数 $\mathfrak{G}_i$ 的 Cartan 分解. 由于 Cartan 分解在共轭下唯一, 所以我们有

$$\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}_i' + \mathfrak{K}_i'', \quad \mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}_i' + \mathfrak{P}_i'',$$

其中 $\mathfrak{K}_1' + \mathfrak{P}_1' = \mathfrak{G}_i'$, $\mathfrak{K}_i'' + \mathfrak{P}_i'' = \mathfrak{G}_i''$ 分别为 Cartan 分解, 且 $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_i' + \mathfrak{G}_i''$ 为理想直接和. 今 $\dim \mathrm{C}_{\mathfrak{K}_i}(\mathfrak{K}_i) = 1$, 所以无妨设 $c' \in \mathfrak{K}_i'$, 因此 $(\mathrm{ad}\, c')\mathfrak{P}_i' = 0$. 但是 $\mathrm{ad}\, c'$ 在 $\mathfrak{P}_i$ 上非异, 这证明了 $\mathfrak{P}_i'' = 0$, 即 $\mathfrak{P}_i' = \mathfrak{P}_i$. 今 $[\mathfrak{K}_i'', \mathfrak{G}_i] = [\mathfrak{K}_i'', \mathfrak{G}_i' + \mathfrak{G}_i''] = [\mathfrak{K}_i'', \mathfrak{K}_i''] \subset \mathfrak{K}_i''$, 又对其他 $j \neq i, [\mathfrak{K}_i'', \mathfrak{G}_j] \subset [\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_j] = 0$. 所以 $\mathfrak{K}_i''$ 为 $\mathfrak{K}$ 中 $\mathfrak{G}$ 的理想. 这和 $\mathfrak{K}$ 中无 $\mathfrak{G}$ 的非零理想矛盾. 至此证明了 $\mathfrak{K}_i'' = 0$. 由 $\mathfrak{G}_i'' = \mathfrak{K}_i'' + \mathfrak{P}_i''$ 为 Cartan 分解, 可以证明 $\mathfrak{G}_i'' = 0$. 这又和 $\mathfrak{G}_i'' \neq 0$ 矛盾. 所以 $\mathfrak{G}_i$ 为实单李代数. 证完.

由引理 5.2.1, 5.2.3, 5.2.4 和引理 5.2.6—5.2.10, 我们证明了

定理 5.2.14 设 (M, h) 为 Hermite 流形, $G = \mathrm{Aut}\,(M, h)$ 为全纯自同构群. 在流形 M 中取定一点 p, 记点 p 的迷向子群

$K = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(M,h) \mid \sigma(p) = p\}$. 分别记 $\mathfrak{G}$ 及 $\mathfrak{K}$ 为李群 G 及 K 的李代数，则 (M,h) 为 Hermite 对称空间，当且仅当

(1) 紧子群 K 中没有李群 G 的非平凡正规子群;

(2) 李代数 $\mathfrak{G}$ 关于 Killing 型 B 有两两正交的理想直接和分解

$$\mathfrak{G} = \sum_{i=0}^{t} \mathfrak{G}_i, \quad \mathfrak{K}_i = \mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{K}, \quad 0 \le i \le t, \quad \mathfrak{K} = \sum_{i=0}^{t} \mathfrak{K}_i;$$

(3) 理想 $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{K}_0 + \mathfrak{P}_0$ 为空间直接和，其中 $\mathfrak{K}_0$ 紧，$\mathfrak{P}_0$ 为李代数 $\mathfrak{G}$ 的交换理想，且 $\mathfrak{P}_0 = \ker(B)$;

(4) 理想 $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{K}_i + \mathfrak{P}_i$ 为空间直接和，它是李代数 $\mathfrak{G}$ 的单理想，它有

$$[\mathfrak{K}_i, \mathfrak{K}_i] \subset \mathfrak{K}_i, \quad [\mathfrak{K}_i, \mathfrak{P}_i] = \mathfrak{P}_i, \quad [\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_i] = \mathfrak{K}_i,$$
$$(\mathrm{Ad}\, K)\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}_i, \quad (\mathrm{Ad}\, K)\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}_i.$$

若 $\mathfrak{G}_i$ 非紧，则 $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{K}_i + \mathfrak{P}_i$ 为 Cartan 分解，且 $\mathfrak{G}_{ic} = \mathfrak{K}_i + \sqrt{-1}\mathfrak{P}_i$ 紧，我们称 $\mathfrak{G}_{ic}$ 为 $\mathfrak{G}_i$ 的**紧对偶**. 若 $\mathfrak{G}$ 紧，则 $\tilde{\mathfrak{G}}_1 = \mathfrak{K}_i + \sqrt{-1}\mathfrak{P}_i$ 非紧，且为 Cartan 分解，我们称 $\tilde{\mathfrak{G}}_i$ 为 $\mathfrak{G}$ 的**非紧对偶**;

(5) 紧子代数 $\mathfrak{K}_i$ 的中心 $C_{\mathfrak{K}_i}(\mathfrak{K}_i)$ 为一维交换理想，其中有元素 c_i，它有

$$C_{\mathfrak{G}}(c_i) = \mathfrak{K}_i, \quad \exp tc_i \in C_K(K), \ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

又 $[c_i, \mathfrak{P}_i] = \mathfrak{P}_i$，且

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{K}_i} c_i = 0, \quad (\mathrm{ad}_{\mathfrak{P}_i} c_i)^2 = -\mathrm{id}_{\mathfrak{P}_i}, \ 1 \le i \le t.$$

由定理 5.2.14 可知，我们需要对具有性质 (4) 及 (5) 的实单李代数作分类. 若 $\mathfrak{G}$ 为非紧型实单李代数，则它的紧对偶 $\mathfrak{G}_c = \mathfrak{K} + \sqrt{-1}\mathfrak{P}$ 和李代数 $\mathfrak{G}$ 都适合条件 (4) 和 (5). 我们称 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{G}_c$ 互为对偶. 因此，我们首先要考虑紧型情形的分类.

首先由于 $C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$ 为一维子空间，在 $C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$ 中有元素 c，使得 $C_{\mathfrak{G}}(c) = \mathfrak{K}$，于是紧子代数 $\mathfrak{K}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 为紧李代数 $\mathfrak{G}$ 的最大紧 Cartan 子代数. 记复单李代数 $\mathfrak{G}^C$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}^C$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{G}^C = \mathfrak{H}^C + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{G}_\alpha.$$

则

$$\mathfrak{K}^C = \mathfrak{H}^C + \sum_{\alpha\in\Delta_0} \mathfrak{G}_\alpha.$$

显然 $\Delta_0 \subset \Delta$，又存在单根系 Π. 记 $\Pi_0 = \Pi\cap\Delta_0$，记 $\Delta_0^\pm = \Delta_0\cap\Delta^\pm$，则 Δ_0^+ 中元素为 Π_0 中元素的非负整数线性组合，又 $\Delta_0^- = -\Delta_0^+$.

今 $C_{\mathfrak{G}}(c) = \mathfrak{K}$ 等价于

$$\Delta_0 = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(c) = 0\}.$$

利用复单李代数的单根系和根系，由直接计算可证 Π_0 的元素个数为 $\dim\mathfrak{H} - 1$，且有如下分类和实现的结果：

(1) $\mathfrak{G} = \mathrm{su}(n+m)$, $\mathfrak{K} = s(\mathrm{u}(n)+\mathrm{u}(m))$, $n \geq m \geq 1$;

(2) $\mathfrak{G} = \mathrm{so}(2n)$, $k = \mathrm{u}(n)$, $n \geq 2$;

(3) $\mathfrak{G} = \mathrm{sp}(n)$, $\mathfrak{K} = \mathrm{u}(n)$, $n \geq 1$;

(4) $\mathfrak{G} = \mathrm{so}(n+2)$, $\mathfrak{K} = \mathrm{so}(n)+\mathrm{so}(2)$, $n \neq 2$;

(5) $\mathfrak{G} = E_6$, $\mathfrak{K} = \mathrm{so}(10)+\mathrm{so}(2)$;

(6) $\mathfrak{G} = E_7$, $\mathfrak{K} = E_6+\mathrm{so}(2)$.

在情形 $\mathfrak{G} = G_2, F_4, E_6$ 时，不存在适合定理 5.2.14 的条件 (4) 和 (5) 的紧单李代数.

相应的非紧情形为

(1) $\mathfrak{G} = \mathrm{su}(n, m, \mathbb{C}), \quad \mathfrak{K} = s(\mathrm{u}(n) + \mathrm{u}(m))$;

(2) $\mathfrak{G} = \mathrm{so}(n, \mathbb{H}), \quad \mathfrak{K} = \mathrm{u}(n)$;

(3) $\mathfrak{G} = \mathrm{sp}(n, \mathbb{R}), \quad \mathfrak{K} = \mathrm{u}(n)$;

(4) $\mathfrak{G} = \mathrm{so}(2n, \mathbb{R}), \quad \mathfrak{K} = \mathrm{so}(n) + \mathrm{so}(2)$;

(5) $\mathfrak{G} = E_6^R, \quad \mathfrak{K} = \mathrm{so}(10) + \mathrm{so}(2)$;

(6) $\mathfrak{G} = E_7^R, \quad \mathfrak{K} = E_6 + \mathrm{so}(2)$.

$\mathfrak{G}$ 的实维数分别为

$$(n+m)^2 - 1,\ n(2n-1),\ n(2n+1),\ \frac{(n+1)(n+2)}{2},\ 78,\ 133.$$

又 $\dim_R \mathfrak{G} - \dim_R \mathfrak{K}$ 分别为

$$2mn,\ n(n-1),\ n(n+1),\ 2n,\ 32,\ 54.$$

因此单李群作用下的 Hermite 对称空间的维数

$$\dim_c(G/K) = \frac{1}{2}(\dim_R \mathfrak{G} - \dim_R \mathfrak{K})$$

分别为

$$mn,\ \frac{n(n-1)}{2},\ \frac{n(n+1)}{2},\ n,\ 16,\ 27.$$

引理 5.2.15 设 M 为 Hermite 对称空间. $(\widehat{M}, f)$ 为 M 的通用覆盖空间, 即 $\widehat{M}$ 连通且单连通. 则 $\widehat{M}$ 为 Hermite 对称空间, 且 f 为局部等度量双全纯同胚.

证 令 M 为 Hermite 对称空间由于 f 为连续开映射, 且为局部同胚, 所以可在拓扑空间 $\widehat{M}$ 上引进复流形结构, 使得 f 适合引理要求. 余下证 $\widehat{M}$ 为 Hermite 对称空间. 事实上, 在 M 中取定一点 p, 记 σ 为点 p 的对称变换. 引进流形 $\widehat{M}$ 到自身的映射 $\hat{\sigma}$ 如下.

今任取 $\widehat{p}\in f^{-1}(p)$, 则存在点 $\widehat{p}$ 的邻域 $\widehat{U}$, 使得 $f(\widehat{U})=U$ 为流形 M 中点 p 的邻域, 且 f 在 $\widehat{U}$ 上为同胚. 我们在邻域 $\widehat{U}$ 上定义映射 $f^{-1}\circ\sigma\circ f=\widehat{\sigma}$. 于是 $\widehat{\sigma}(\widehat{p})=f^{-1}(\sigma(f(\widehat{p}))=f^{-1}(\sigma(p))=f^{-1}(p)=\widehat{p}$. 且作为拓扑空间 $\widehat{U}$ 上的映射, $\widehat{\sigma}$ 为同胚, 且以点 $\widehat{p}$ 为孤立不动点. 又 $\widehat{\sigma}^2=f^{-1}\circ\sigma^2\circ f=\mathrm{id}$. 对流形 $\widehat{M}$ 中的任一点 q'. 作联结点 p',q' 的连续曲线 Γ. 利用 f 为覆盖映射, 我们可以将邻域 $\widehat{U}$ 上定义的映射 $\widehat{\sigma}$ 开拓到点 q' 附近. 从而可在流形 $\widehat{M}$ 上定义映射 $\widehat{\sigma}$, 它有 $\sigma\circ f=f\circ\widehat{\sigma}$. 于是不难证明 $\widehat{\sigma}$ 为流形上的点 $\widehat{p}$ 的对称变换. 由点 $\widehat{p}$ 任取, 所以证明了流形 $\widehat{M}$ 为 Hermite 对称空间. 证完.

上面引理的证明实际上也证明了任取 $\rho\in\mathrm{Aut}\,(M,h)$, 则存在 $\widehat{\rho}\in\mathrm{Aut}\,(\widehat{M},\widehat{h})$, 它有 $\rho\circ f=f\circ\widehat{\rho}$, 于是有 $\rho_*\circ f_*=f_*\circ\widehat{\rho}_*$. 因此也证明了李群 $\mathrm{Aut}\,(M,h)$ 及 $\mathrm{Aut}\,(\widehat{M},\widehat{h})$ 的李代数互相同构. 所以存在李群 $\mathrm{Aut}\,(\widehat{M},\widehat{h})$ 的单位连通分支 $\widehat{G}$ 中属于中心的离散子群 Γ, 使得 $\widehat{G}/\Gamma$ 和李群 $\mathrm{Aut}\,(M,h)$ 的单位连通分支 G 同构. 确切地说, $\widehat{G}$ 为李群 G 的覆盖群.

现在考虑定理 5.2.14 给出的实李代数 $\mathfrak{G}=\sum\limits_{i=1}^{x}\mathfrak{G}_i$. 记 G_i 为由李代数 $\mathfrak{G}_i$ 决定的连通且单连通李群. 由定理 5.2.14 可知, 存在 $c_i\in\mathfrak{K}_i$, 使得 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{K}_i}c_i=0$, $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{P}_i}c_i)^2=-\mathrm{id}$. 记 $\sigma_i=\exp\pi c_i\in G_i$, 则 $\mathrm{Ad}\,(\sigma_i)=\exp\pi\mathrm{ad}\,c_i$ 有 $(\mathrm{Ad}\,(\sigma_i))^2=\mathrm{id}$, 即 $\sigma_i^2\in C_{G_i}(G_i)$ 为李群 G_i 的中心. 记 $K_i=N_{G_i}(\sigma_i)$ 为 G_i 中元素 σ_i 的正规化子, 于是 K_i 的李代数为 $\mathfrak{K}_i$. 所以易证 K_i 为李群 G_i 的紧子群. 且可证商空间 G_i/K_i 为 Hermite 对称空间, σ_i 为点 e_iK_i 的对称变换, 其中 e_i 为李群 G_i 的单位元素.

(1) 考虑 G_0/K_0. 由于 $\mathfrak{G}_0=\mathfrak{K}_0+\mathfrak{P}_0$, 其中 $\mathfrak{P}_0$ 为李代数 $\mathfrak{G}_0$ 的交换理想, 所以 $G_0/K_0=\exp\mathfrak{P}_0$ 为复环面 T_C^r 和复 Euclid 空间 $\mathbb{C}^s$ 的拓扑积. 它的通用覆盖空间为 $\mathbb{C}^{r+s}$.

(2) 考虑 $G_i/K_i, i>0$. 由于 $\mathfrak{G}_i=\mathfrak{K}_i+\mathfrak{P}_i$ 为实单李代数, 所以 G_i 为单李群. 今 $G_i\subset\mathrm{Aut}\,(G_i/K_i,h_i)$, 且 G_i 在 Hermite 对称空间 G_i/K_i 上可递. 我们有

引理 5.2.16 设 M 为 Hermite 对称空间，其最大连通等度量全纯自同构群 $\mathrm{Aut}\,(M,h)^0$ 若半单，若 $\mathrm{Aut}\,(M,h)^0$ 的连通半单子群 G 在 M 上可递，则 $G=\mathrm{Aut}\,(M,h)^0$.

证 在流形 M 中取定一点 p. 记 $\mathrm{Aut}\,(M,h)^0$ 中点 p 的迷向子群为 K,G 中点 p 的迷向子群为 K', 则有 $K'=G\cap K$. 分别记 K 及 K' 的李代数为 $\mathfrak{K}$ 及 $\mathfrak{K}'$, 则有 $\mathfrak{K}'\subset\mathfrak{K}$. 分别记李群 $\mathrm{Aut}\,(M,h)^0$ 及 G 的李代数为 $\mathfrak{G}$ 及 $\mathfrak{G}'$, 则有 $\mathfrak{G}'\subset\mathfrak{G}$. 令 M 中点 p 的对称变换 σ 诱导了李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 分解 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$. σ 限制在 G 上也诱导了李代数 $\mathfrak{G}'$ 的 Cartan 分解 $\mathfrak{G}'=\mathfrak{K}'+\mathfrak{P}'$, 其中 $\mathfrak{P}'\subset\mathfrak{P}$. 然而 $\dim\mathfrak{P}=\dim M=\dim\mathfrak{P}'$. 这证明了 $\mathfrak{P}'=\mathfrak{P}$. 而 $\mathfrak{K}=[\mathfrak{P},\mathfrak{P}]$, 所以证明了 $\mathfrak{K}=[\mathfrak{P}',\mathfrak{P}']\subset\mathfrak{K}'$, 即 $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}'$. 至此证明了 $\mathfrak{G}'=\mathfrak{G}$, 即李群 $G=\mathrm{Aut}\,(M)^0$. 证完.

引理 5.2.17 当 $i>0$ 时，Hermite 对称空间 G_i/K_i 单连通.

证 考虑 Hermite 对称空间 $M_i=G_i/K_i$ 的通用覆盖 $(\widehat{M_i},f_i)$. 由引理 5.2.15, $\widehat{M_i}$ 为 Hermite 对称空间，又 $\widehat{M_i}$ 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}\,(\widehat{M_i},\widehat{h}_i)$ 的单位连通分支 $\mathrm{Aut}\,(\widehat{M_i},\widehat{h}_i)^0$ 为 $\mathrm{Aut}\,(G_i/K_i,h_i)^0$ 的覆盖群. 今 G_i 及 $\mathrm{Aut}\,(G_i/K_i,hI)$ 实半单，由引理 5.2.16, 有 $G_i=\mathrm{Aut}\,(G_i/K_i,h_i)^0$ 为 $\mathrm{Aut}\,(G_i/K_i,h_i)$ 的单位连通分支. 由 G_i 连通且单连通，所以证明了 $\mathrm{Aut}\,(\widehat{M_i},\widehat{h}_i)^0=G_i$. 由 $\widehat{M_i}$ 为齐性流形，所以证明了 $\widehat{M_i}=M_i$, 即 Hermite 对称空间 $M_i=G_i/K_i$ 单连通. 引理证完.

于是，立即有

定理 5.2.18 Hermite 对称空间 M 等度量全纯同构于 Hermite 对称空间的拓扑积 $M_0\times M_1\times\cdots\times M_s$, 其中 M_0 为复环面和复 Euclid 空间的拓扑积，$M_1,\cdots,M_s$ 为这种 Hermite 对称空间，使得 $\mathrm{Aut}\,(M_1),\cdots,\mathrm{Aut}\,(M_s)$ 为维数大于 1 的实单李群.

定义 5.2.19 Hermite 对称空间若为紧的，则称为**紧型**, 若为非紧的，则称为**非紧型**. 又 Hermite 对称空间称为**不可分解的**, 如果它不等度量全纯同构于两个低维 Hermite 对称空间的拓扑积.

由定理 5.2.14 及 5.2.18 可知，Hermite 对称空间 M 不可分

解，当且仅当实李群 $\mathrm{Aut}(M,h)$ 单. 若 $\mathrm{Aut}(M,h)$ 紧单，则 M 为紧型；若 $\mathrm{Aut}(M,h)$ 为非紧单，则 M 为非紧型.

定义 5.2.20 设 M 为非紧型不可分解 Hermite 对称空间，李群 $\mathrm{Aut}(M)$ 的李代数 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$. 则由紧单李代数 $\mathfrak{G}_c=\mathfrak{K}+\sqrt{-1}\mathfrak{P}$ 决定的不可分解 Hermite 对称空间为紧型，称为非紧型的**紧对偶**.

由定理 5.2.14 及 5.2.18 可知，任一非紧型不可分解 Hermite 对称空间必有紧对偶. 所以利用李代数的分类，我们可以给出非紧型不可分解 Hermite 对称空间及紧对偶的分类结果如下：

(1) $n\geq m\geq 1$, 非紧型为 $\mathrm{SU}(n,m,\mathbb{C})/S(\mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(m))$, 紧型为 $\mathrm{SU}(m+n)/S(\mathrm{U}(m)\times\mathrm{U}(n))$, 复维数为 mn;

(2) $n\geq 2$, 非紧型为 $\mathrm{SO}(n,\mathbb{H})/\mathrm{U}(n)$, 其中 $\mathbb{H}$ 为四元数体，紧型为 $\mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n)$, 复维数为 $n(n-1)/2$;

(3) $n\geq 1$, 非紧型为 $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$, 紧型为 $\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$, 复维数为 $n(n+1)/2$;

(4) $n\neq 2$, 非紧型为 $\mathrm{SO}(2,n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)\times\mathrm{SO}(2)$, 紧型为 $\mathrm{SO}(n+2)/(\mathrm{SO}(n)\times\mathrm{SO}(2))$, 复维数为 n;

(5) 非紧型为 $E_6^R/(\mathrm{Spin}(10)\times\mathrm{SO}(2))$, 紧型为 $E_6/(\mathrm{Spin}(10)\times\mathrm{SO}(2))$, 复维数为 16, 其中 $\mathrm{Spin}(10)$ 为 10 维旋量群，即 $\mathrm{SO}(10)$ 的通用覆盖群；

(6) 非紧型为 $E_7^R/(E_6\times\mathrm{SO}(2))$, 紧型为 $E_7/(E_6\times\mathrm{SO}(2))$, 复维数为 27.

§ 5.3 实半单李群的 Iwasawa 分解

在这一节，我们只考虑这样的实连通半单李群 G, 它的李代数 $\mathfrak{G}$ 有 Cartan 分解 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$, 使得 $[\mathfrak{P},\mathfrak{P}]=\mathfrak{K},[\mathfrak{K},\mathfrak{P}]=\mathfrak{P}$. 又 $\dim \mathrm{C}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})=1$, 其中存在元素 c, 有 $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{P}}c)^2=-\mathrm{id}$, 且 $\mathrm{C}_{\mathfrak{G}}(c)=\mathfrak{K}$. 又有紧子群

$$\mathrm{N}_G(\exp\pi c)=\mathrm{C}_G(\exp\pi c)=K,$$

其中 K 中没有李群 G 的非平凡正规子群.

在这一节，我们对所考虑的实连通半单李群 G，给出两种不同的分解为连通李子群的直乘积.

引理 5.3.1 设 $\mathfrak{G}$ 为实连通李群 G 的李代数，则映射 $\exp:\mathfrak{G}\to G$ 在李代数 $\mathfrak{G}$ 中任一点 X 的 Jacobian 为

$$\exp_*|_X = (L_{\exp X})_* \frac{1-\exp(-\mathrm{ad}\,X)}{\mathrm{ad}\,X}, \quad \forall\, X \in \mathfrak{G}.$$

这里

$$\frac{1-\exp(-\mathrm{ad}\,X)}{\mathrm{ad}\,X} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j!}(\mathrm{ad}\,X)^{j-1}.$$

证 已知指数映射 exp 为 Euclid 空间 $\mathfrak{G}$ 到流形 G 内的解析映射，它诱导了函数空间 $\mathfrak{F}(G)$ 到 $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ 内的映射

$$h = \exp^*(F) = F \circ \exp \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}).$$

今李代数 $\mathfrak{G}$ 作为解析流形，它就是 n 维实 Euclid 空间. 而 $\mathfrak{G}$ 中任一点 X 上的切空间 $T_X(\mathfrak{G})$ 仍为 n 维实 Euclid 空间，我们仍视 $T_X(\mathfrak{G})$ 为 $\mathfrak{G}$. 于是在指数映射 exp 下李代数 $\mathfrak{G}$ 上的切向量 Y 映为 $\exp_*(Y)$，它定义为

$$(\exp_*(Y))(F) = Y(\exp^*(F)) = Y(F\circ\exp) = Y(h), \quad \forall\, F \in \mathfrak{F}(G).$$

确切地说，为

$$(\exp_*(Y)(F)|_{\exp X} = Y(h)|_X, \quad \forall\, X \in \mathfrak{G}.$$

现在取李代数 $\mathfrak{G}$ 中的点 $a = tX + uY$, $\forall\, t,u\in\mathbb{R}$. 于是切向量 $Y|_a = \sum \lambda_i \dfrac{\partial}{\partial a_i}$, $Y(h)|_a = \sum \lambda_i \dfrac{\partial h}{\partial a_i}$. 当 $u\to 0$ 时，$a\to tX$, $\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u} = Y$. 所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}h(a)}{\mathrm{d}u}\right|_{u=0} = \sum \lambda_i \left.\frac{\partial h(a)}{\partial a_i}\right|_{a=tX} = Y(h)|_{tX},$$

即有

$$(\exp_*(Y))(F)|_{\exp X} = \left.\frac{\mathrm{d}h(tX+uY)}{\mathrm{d}u}\right|_{u=0}.$$

为了计算 Jacobian, 我们要计算 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}u}$. 先来证明

$$h(t) = F(g \cdot \exp tX) = [(\exp tX)(F)](g), \quad \forall\ g \in G, t \in \mathbb{R}.$$

事实上，当 $|t| < \varepsilon$ 时， $h(t)$ 在 $t=0$ 附近关于 t 解析. 在 $t=0$ 附近展成幂级数，则有

$$h(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}\Big(\frac{\mathrm{d}^j h(t)}{\mathrm{d}t^j}\Big|_{t=0}\Big),\ |t| < \varepsilon.$$

在李群 G 中取单位标架 (U,φ), 点 g 的标架为 $(g(U), \varphi \circ L_{g^{-1}})$. 记 $g(U) \times U$ 上的乘法函数为 f. 取 $x = g \cdot \exp tX, y = \exp tX$, 则对

$$X = \sum a_i l_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

其中 $l_i^j(x)$ 为辅助函数，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i,j,p} \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} \frac{\partial f_j(g,y)}{\partial y_p} a_i l_i^p(y) \\ &= \sum_{i,j,p,q} \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} \tilde{l}_p^q(y) l_q^j(x) a_i l_i^p(y),\end{aligned}$$

其中 $(\tilde{l_i^j}) = (l_i^j)^{-1}$. 所以

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,j} \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} l_i^j(x) a_i = (XF)(x).$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}^j h(t)}{\mathrm{d}t^j} = (X^j F)(x).$$

这证明了

$$h(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}(X^j F)(g) = [(\mathrm{Exp}\, tX)F](g), \quad |t| < \varepsilon.$$

注意到 $h(t)$ 及 $\operatorname{Exp} tX$ 在 $t\in\mathbb{R}$ 都有意义，而 $h(t)=[(\operatorname{Exp} tX)F](g)$ 的 t 构成 $\mathbb{R}$ 中的又开又闭子集，所以等式在 $\mathbb{R}$ 上成立. 这证明了断言.

现在取 $h=F\circ\exp$，在点 $a=tX+uY$ 上为

$$
\begin{aligned}
h(a) &= (F\circ\exp)(tX+uY)=F(\exp(tX+uY))\\
&=[(\operatorname{Exp}(tX+uY))F](e).
\end{aligned}
$$

于是

$$
\frac{\mathrm{d}h(a)}{\mathrm{d}u}\Big|_{u=0}=\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}[\operatorname{Exp}(tX+uY)F]\Big)_{u=0}(\exp tX).
$$

而

$$
\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\operatorname{Exp}(tX+uY)\Big)_{u=0}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(tX+uY)^j\Big|_{u=0}
$$

$$
=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^{j-1}}{j!}\big(X^{j-1}Y+X^{j-2}YX+\cdots+YX^{j-1}\big).
$$

由归纳法易证

$$
\sum_{j=0}^{m-1}X^jYX^{m-1-j}=\sum_{j=1}^{m}C_m^j(-1)^{j-1}X^{m-j}(\operatorname{ad}X)^{j-1}Y,
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\operatorname{Exp}(tX+uY)\Big)_{u=0}\\
&=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^{j-1}}{j!}\sum_{i=1}^{j}C_j^i(-1)^{i-1}X^{j-i}(\operatorname{ad}X)^{i-1}Y\\
&=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^{p+i-1}}{(p+i)!}C_{p+i}^i(-1)^{i-1}X^p(\operatorname{ad}X)^{i-1}Y\\
&=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^p}{p!}X^p\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^{i-1}}{i!}(-1)^{i-1}(\operatorname{ad}X)^{i-1}Y\\
&=(\operatorname{Exp}tX)\frac{\operatorname{Exp}(-t\operatorname{ad}X)-\mathrm{id}}{-t(\operatorname{ad}X)}(Y).
\end{aligned}
$$

今

$$(L_{\exp tX})_*(F) = F \circ L_{\exp tX} = (\operatorname{Exp} tX)(F).$$

这证明了 $(L_{\exp tX})_* = \operatorname{Exp} tX$. 于是

$$((\exp_*)Y)F|_{\exp tX} = [(\operatorname{Exp} tX)\frac{1-\operatorname{Exp}(-t\operatorname{ad} X)}{t\operatorname{ad} X}(Y)](F)\Big|_{\exp tX}.$$

这证明了当 $t=1$ 时有

$$\exp_*(Y) = (L_{\exp X})_* \frac{1-\operatorname{Exp}(-\operatorname{ad} X)}{\operatorname{ad} X}(Y).$$

引理证完.

现在给出所考虑的实连通半单李群 G 的一种分解.

定理 5.3.2 设 G 为实连通单李群. 记 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 为李群 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 分解, 它有

$$[\mathfrak{K},\mathfrak{K}] \subset \mathfrak{K}, \quad [\mathfrak{K},\mathfrak{P}] = \mathfrak{P}, \quad [\mathfrak{P},\mathfrak{P}] = \mathfrak{K}.$$

且 $\dim C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K}) = 1$, 在 $C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$ 中存在元素 c, 它有

$$C_{\mathfrak{G}}(c) = \mathfrak{K}, \quad (\operatorname{ad}_{\mathfrak{P}} c)^2 = -\operatorname{id}.$$

记

$$K = N_G(\exp \pi c).$$

则有

(1) K 为李群 G 的最大紧子群, 它连通, 且李群 G 的中心 $C(G) \subset K$;

(2) 映射 $\varphi: (X,k) \to (\exp X)k, \forall X \in \mathfrak{P}, k \in K$ 及 $(X,k) \to k(\exp X), \forall X \in \mathfrak{P}, k \in K$ 为流形 $\mathfrak{P} \times K$ 到 G 上的双解析同胚, 因此有

$$G = (\exp \mathfrak{P})K = K(\exp \mathfrak{P}), \quad (\exp \mathfrak{P}) \cap K = \{e\};$$

(3) 李群 $G/(\mathrm{C}(G))$ 在商空间 $\dfrac{G/(\mathrm{C}(G))}{K/(\mathrm{C}(G))} = G/K$ 上的作用有效，且商空间 G/K 同胚于复 Euclid 空间；

(4) 商空间 G/K 为半单型 Hermite 对称空间，且任一 Hermite 对称空间，只要它的等度量变换群为单李群，则必等度量全纯同构于这类商空间 (非紧型) 或其对偶 (紧型).

证 我们将 (1) 和 (2) 放在一起证明. 显然 $K = N_G(\exp \pi c) = \mathrm{C}_G(\exp \pi c)$ 为李群 G 的闭普通子群，所以是李子群. 它的李代数为

$$\mathfrak{K}_0 = \{X \in \mathfrak{G} \mid (\mathrm{Ad}\,(\exp \pi c))X = X\}.$$

我们来证 $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}$. 事实上，任取 $X \in \mathfrak{K}$, 则有 $[c, X] = 0$. 于是 $(\exp \pi(\mathrm{ad}\, c))X = X$. 这证明了 $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}_0$. 下面来证 $\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}$. 设若不然，存在 $Y \in \mathfrak{P} \cap \mathfrak{K}_0$, 由 $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{P}} c)^2 = -\mathrm{id}$, 因此

$$Y = (\exp \pi \mathrm{ad}\, c)Y = \sum \frac{\pi^k}{k!}(\mathrm{ad}\, c)^k Y = \sum \frac{\pi^{2k}}{(2k)!}(-1)^k Y + \sum \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k [c, Y] = (\cos \pi)Y = -Y.$$

这推出 $Y = 0$, 因此证明了 $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}$. 所以李群 K 的单位连通分支 K_0 为紧李群.

由子群 K 的定义可知， $\mathrm{C}(G) \subset K$.

我们来证映射 φ 为 $\mathfrak{P} \times K$ 到 G 上的双解析同胚. 先证 φ 为一一映射.

今实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{K}$ 上负定，在 $\mathfrak{P}$ 上正定，且 $B(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}) = 0$. 于是在 $\mathfrak{K}$ 中取关于 $-B$ 的标准正交基，在 $\mathfrak{P}$ 上取关于 B 的标准正交基.

今李群 K 的李代数为 $\mathfrak{K}$, 所以 $(\mathrm{Ad}\, K)\mathfrak{K} = \mathfrak{K}$. 任取 $k \in K$, 则 $B(\mathfrak{K}, (\mathrm{Ad}\, k)\mathfrak{P}) = B((\mathrm{Ad}\, k^{-1})\mathfrak{K}, \mathfrak{P}) = B(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}) = 0$. 这证明了

$(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{P}=\mathfrak{P}$. 任取 $k\in K$, 有

$$(\mathrm{Ad}\,k)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}(\mathrm{Ad}\,k)' = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

又由 $(\mathrm{Ad}\,k)\mathfrak{K}\subset\mathfrak{K}$, 所以将方阵 $\mathrm{Ad}\,k$ 按 r 行、 r 列分块，有

$$\mathrm{Ad}\,k = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in O(n).$$

再任取 $X\in\mathfrak{P}$, 则由

$$(\mathrm{ad}\,X)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}(\mathrm{ad}\,X)' = 0$$

可知

$$\mathrm{ad}\,X = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C' & 0 \end{pmatrix},$$

即 $\mathrm{ad}\,X$ 实对称. 所以 $\exp\mathrm{ad}\,X$ 实正定对称.

今任取 $k,k'\in K$, $X,X'\in\mathfrak{P}$. 由 $(\exp X)k=(\exp X')k'$, 可知 $(\exp\mathrm{ad}\,X)\mathrm{Ad}\,k=(\exp\mathrm{ad}\,X')\mathrm{Ad}\,k'$. 由 $\mathrm{Ad}\,k,\mathrm{Ad}\,k'\in O(m), m=\dim\mathfrak{G}, \exp\mathrm{ad}\,X, \exp\mathrm{ad}\,X'$ 正定对称. 由矩阵论中关于非异方阵的极分解的唯一性，便证明了 $\exp(\mathrm{ad}\,X)=\exp(\mathrm{ad}\,X')$, 因此 $\mathrm{ad}\,X=\mathrm{ad}\,X'$. 由于李代数 $\mathfrak{G}$ 单，所以 $X=X'$, 即 $\exp X=\exp X'$, 所以 $k=k'$. 至此证明了分解的唯一性，即映射 φ 一一.

今设 K_0 为李群 K 的单位连通分支. 考虑商空间 G/K_0. 今 K_0 中 G 的正规子群为 K 中 G 的正规子群. 由 G 为连通单李群，所以真正规子群为零维李群，而李群 G 中的离散正规子群必属中心. 这证明了李群 K 中只有中心 $\mathrm{C}(G)$ 为最大正规子群. 所以 $(G/(\mathrm{C}(G)))/(K_0/(\mathrm{C}(G)))$ 为 Hermite 对称空间 (见定理 5.2.14). 今空间 G/K_0 有子集 $(\exp\mathfrak{P})K_0$, 下面来证 $G=(\exp\mathfrak{P})K_0$. 事实上，流形 G/K_0 的点 eK_0 的切空间 $T_{eK_0}(G/K_0)$ 的维数为 $\dim G-\dim K_0=\dim\mathfrak{G}-\dim\mathfrak{K}=\dim\mathfrak{P}$, 所以可取 $T_{eK_0}(G/K_0)$ 为 $\mathfrak{P}$. 而

任一过点 eK_0 的测地线必形如 $(\exp tX)K_0$, 其中 $X \in \mathfrak{P}$. 由于齐性空间是完备的，即任取两点必有测地线相联，因此对李群 G 中任一点 g, 则存在 $X \in \mathfrak{P}, t_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $(\exp t_0X)K_0 = gK_0$, 即 $g \in (\exp t_0X)K_0$. 这证明了 $G = (\exp \mathfrak{P})K_0$. 由 $G = (\exp \mathfrak{P})K$ 的分解唯一性，便证明了 $K = K_0$. 这证明了子群 K 为连通紧子群.

现在证包含 K 的紧子群 $K_1 = K$, 即 K 为最大紧子群. 事实上，由 Weyl 定理可知， $\mathrm{Ad}\, K_1$ 可同时表示为实正交方阵. 今任取 $k \in K_1$, 则存在 $X \in \mathfrak{P}$, $k_1 \in K$, 使得 $\mathrm{Ad}\, k = (\exp \mathrm{ad}\, X)\mathrm{Ad}\, k_1$, 即 $\mathrm{Ad}\, kk_1^{-1} = \exp(\mathrm{ad}\, X)$. 由 $\exp \mathrm{ad}\, X$ 正定对称，便证明了 $\mathrm{Ad}\, kk_1^{-1} = \mathrm{id}$, 即 $kk_1^{-1} \in C(G) \subset K$. 这证明了 $k \in K$, 即 $K_1 = K$. 至此证明了 (1).

下面我们继续证明 (2), 即证 $\varphi : (X, k) \to (\exp X)k$ 为双解析同胚. 今 $(\exp X)k$ 关于 $X \in \mathfrak{P}$ 及 $k \in K$ 显然解析. 由隐函数存在定理可知，为了证明 φ 为双解析同胚，只要证映射 φ 的 Jacobian 点点不为零.

今流形 K 中单位元素 e 的切空间为 $T_e(K)$, 于是 K 中元素 k 的切空间为 $T_k(K) = (L_k)_* T_e(K)$, 流形 $\mathfrak{P}$ 中零元素 (记作 0) 的切空间为 $T_0(\mathfrak{P})$. 作为线性空间，我们无妨取 $T_e(K)$ 为 $\mathfrak{K}, T_0(\mathfrak{P})$ 为 $\mathfrak{P}$. 对流形 $\mathfrak{P} \times K$ 中点 (X, k) 的切空间 $T_X(\mathfrak{P}) \times T_k(K)$ 中的任一切向量 $(Y, (L_k)_* Z)$, 其中 $Y \in \mathfrak{P}, Z \in \mathfrak{K}$, 于是流形 $\mathfrak{P}$ 中过点 X 的测地线为 $X + tY$, 流形 K 中过点 k 的测地线为 $k \cdot \exp tZ$. 今

$$\begin{aligned}
\varphi(X + tY, k) &= (\exp(X + tY))k \\
&= k(\mathrm{ad}\, k^{-1})(\exp(X + tY)) \\
&= k\exp(\mathrm{Ad}\, k^{-1})(X + tY), \\
\varphi(X, k \cdot \exp tZ) &= (\exp X)k(\exp tZ) \\
&= k((\mathrm{ad}\, k^{-1})\exp X)(\exp tZ).
\end{aligned}$$

于是在点 (X, k) 的 Jacobian 为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi(X + tY, k)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} + \left.\frac{\mathrm{d}\varphi(X, k \cdot \exp tZ)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}.$$

令

$$k\cdot\exp(\mathrm{Ad}\,k^{-1})(X+tY)=k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}((\mathrm{Ad}\,k^{-1})X+t(\mathrm{Ad}\,k^{-1})Y)^{j},$$

它的关于 t 的一次项系数为

$$\begin{aligned}
&k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(\widetilde{X}^{j-1}\widetilde{Y}+\widetilde{X}^{j-2}\widetilde{Y}\widetilde{X}+\cdots+\widetilde{Y}\widetilde{X}^{j-1})\\
&=k\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\sum_{p=1}^{j}C_j^p(-1)^{p-1}\widetilde{X}^{j-p}(\mathrm{ad}\,\widetilde{X})^{p-1}\widetilde{Y}\\
&=(\mathrm{Exp}\,\widetilde{X})\frac{\mathrm{id}-\mathrm{Exp}\,(-\mathrm{ad}\,\widetilde{X})}{\mathrm{ad}\,\widetilde{X}}(\widetilde{Y}),
\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{X}=(\mathrm{Ad}\,k^{-1})X,\widetilde{Y}=(\mathrm{Ad}\,k^{-1})Y$. 所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi(X+tY,k)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=k(\mathrm{Exp}\,\widetilde{X})\frac{\mathrm{id}-\mathrm{Exp}\,(-\mathrm{ad}\,\widetilde{X})}{\mathrm{ad}\,\widetilde{X}}(\widetilde{Y}).$$

显然

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi(X,k\cdot\exp tZ)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=(k\mathrm{Exp}\,(\mathrm{Ad}\,k^{-1})X)(Z)=(k(\mathrm{Exp}\,\widetilde{X}))(Z),$$

所以 Jacobian 为

$$(k\mathrm{Exp}\,\widetilde{X})(\frac{\mathrm{id}-\mathrm{Exp}\,(-\mathrm{ad}\,\widetilde{X})}{\mathrm{ad}\,\widetilde{X}}(\widetilde{Y})+Z).$$

注意到 $X,Y\in\mathfrak{P},Z\in\mathfrak{K}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_X(Y)&=\frac{\mathrm{id}-\mathrm{Exp}\,(-\mathrm{ad}\,\widetilde{X})}{\mathrm{ad}\,\widetilde{X}}(\widetilde{Y})=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j+1)!}(\mathrm{ad}\,\widetilde{X})^j\widetilde{Y}\\
&=(\mathrm{Ad}\,k^{-1})\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j+1)!}(\mathrm{ad}\,X)^jY.
\end{aligned}$$

今 $[X,Y]\in[\mathfrak{P},\mathfrak{P}]=\mathfrak{K}$, $[X,[X,Y]]\in[\mathfrak{P},\mathfrak{K}]\subset\mathfrak{P}$. 又 $(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{K}=\mathfrak{K}$,$(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{P}=\mathfrak{P}$. 于是

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_X(Y)= &-(\mathrm{Ad}\,k^{-1})\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+2)!}(\mathrm{ad}\,X)^{2j+1}Y\\
&+(\mathrm{Ad}\,k^{-1})\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)!}(\mathrm{ad}\,X)^{2j}Y,
\end{aligned}
$$

其中

$$
(\mathrm{Ad}\,k^{-1})\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)!}(\mathrm{ad}\,X)^{2j}Y\in\mathfrak{P},
$$

$$
(\mathrm{Ad}\,k^{-1})\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+2)!}(\mathrm{ad}\,X)^{2j+1}Y\in\mathfrak{K}.
$$

又 $Z\in\mathfrak{K}$. 设若 Jacobian 为零，则 $\mathcal{A}_X(Y)$ 在 $\mathfrak{P}$ 上的投影为

$$
(\mathrm{Ad}\,k^{-1})\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)!}(\mathrm{ad}\,X)^{2j}Y=0.
$$

今对 Killing 型 B, 任取 $W_i\in\mathfrak{P}, i=1,2$, 有

$$
B((\mathrm{ad}\,X)^2W_1,W_2)=B(W_1,(\mathrm{ad}\,X)^2W_2).
$$

所以 $(\mathrm{ad}\,X)^2$ 为 $\mathfrak{P}$ 上的方阵表示为对称方阵. 又

$$
B((\mathrm{ad}\,X)^2W_1,W_1)=-B((\mathrm{ad}\,X)W_1,(\mathrm{ad}\,X)W_1).
$$

由于 $[\mathfrak{P},\mathfrak{P}]\subset\mathfrak{K}$, 且 B 在 $\mathfrak{K}$ 上负定，所以 $B((\mathrm{ad}\,X)^2W_1,W_1)\geq 0$, 即当 $X\neq 0$ 时，有 $(\mathrm{ad}\,X)^2>0$. 由此可知 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)!}(\mathrm{ad}\,X)^{2j}$ 在 $\mathfrak{P}$ 上正定对称. 所以 $(\mathrm{Ad}\,k^{-1})\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)!}(\mathrm{ad}\,X)^{2j}Y=0$ 当且仅当 $Y=0$, 因此 $\widetilde{Y}=0$. 于是 Jacobian 恒为零推出 $Z=0$. 至此证明了在点 $(X,k), X\neq 0$, Jacobian 关于非零方向恒非零，即点点正则.

在点 $(0,k)$, 有

$$\varphi(tY,k) = k\cdot \exp t(\operatorname{Ad} k^{-1})Y,$$
$$\varphi(0,k\cdot \exp tZ) = k\cdot((\operatorname{ad} k^{-1})\exp tZ).$$

于是 Jacobian 为 $k(\operatorname{Ad} k^{-1})(Y+Z)$. 注意到 $Y\in\mathfrak{P}, Z\in\mathfrak{K}$, 所以 Jacobian 为零蕴含 $Y=Z=0$. 因此证明了在流形 $\mathfrak{P}\times K$ 上任一点, 映射 φ 的 Jacobian 恒不等于零, 即 φ 为双解析同胚. 至此证明了断言 (2).

(3) 由 $\mathfrak{P}\to\exp\mathfrak{P}$ 为同胚可知 $\exp\mathfrak{P}$ 同胚于 Euclid 空间. 而商空间 $G/K=(\exp\mathfrak{P})/K$, $(\exp\mathfrak{P})\cap K=\{e\}$, 所以商空间 G/K 同胚于 Euclid 空间. 特别地, 半单型 Hermite 流形单连通.

(4) 由定理 5.2.14 立即可得. 定理证完.

现在给出所考虑的实连通半单李群 G 的另一种分解, 即 Iwasawa 分解.

现在回到一般的实半单李代数的 Iwasawa 分解. 设 G 为一般的连通实半单李群, $\mathfrak{G}$ 为 G 的李代数, $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$ 为 Cartan 分解. 由定理 2.2.6, 在子空间 $\mathfrak{P}$ 中存在极大交换子代数 $\mathfrak{A}$, 在 $\mathfrak{G}$ 中存在 Cartan 子代数

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{K}_c+\mathfrak{A},\quad \mathfrak{K}_c\subset\mathfrak{K},\quad \mathfrak{A}\subset\mathfrak{P}.$$

它是极大向量 Cartan 子代数. 由定理 2.2.8, 在实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的复化 $\mathfrak{L}$ 中存在基, 使得 $\operatorname{ad}\mathfrak{K}, \operatorname{ad}\mathfrak{A}, \operatorname{ad}\mathfrak{N}$ 中元素的方阵表示分别为斜 Hermite 方阵、对角方阵、对角元素为零的上三角方阵. 我们有

定理 5.3.3(Iwasawa) 设 $\mathfrak{G}$ 为实连通半单李群 G 的李代数, $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{A}+\mathfrak{N}_0$ 为 $\mathfrak{G}$ 的 Iwasawa 分解 (见定理 2.2.8). 分别记 K,A,N 为 $\exp\mathfrak{K}, \exp\mathfrak{A}, \exp\mathfrak{N}_0$ 生成的连通李群, 则 A 及 N 为单连通闭李子群, 又

$$\varphi:\ K\times A\times N\to\ KAN=G$$

为双解析同胚. 称 $G=KAN$ 为李群 G 的 **Iwasawa 分解**.

证 今李代数 $\mathfrak{G}$ 实半单，所以 $\mathfrak{G} \to \mathrm{ad}\,\mathfrak{G}$ 为李代数的同构. 又由李群 $\mathrm{Ad}\,G$ 的李代数为 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{G}$. 而李群同态 $G \to \mathrm{Ad}\,G$ 的同态核为李群 G 的中心 $C_G(G)$. 由同态基本定理可知，有

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & \mathrm{Ad}(G) \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \nearrow & \\ & G/C(G) & \end{array}$$

由 $C(\mathfrak{G}) = 0$ 可知 $\dim C(G) = 0$, 因此 $C(G)$ 为离散子群.

下面先给出李群 $\mathrm{Ad}\,G$ 的 Iwasawa 分解，再给出李群 G 的 Iwasawa 分解.

(1) 对应 $\varphi_0 : \mathrm{Ad}\,K \times \mathrm{Ad}\,A \times \mathrm{Ad}\,N \to \mathrm{Ad}\,KAN$ 为一一对应.

事实上，若有 $k, k' \in K, a, a' \in A, n, n' \in N$, 使得 $\mathrm{Ad}\,kan = \mathrm{Ad}\,k'a'n'$, 于是有 $\mathrm{Ad}\,(k^{-1}k')\mathrm{Ad}\,a' = \mathrm{Ad}\,a\mathrm{Ad}\,nn'^{-1}$. 由 $\mathfrak{K}$ 紧，$\mathfrak{A}$ 交换，$\mathfrak{N}_0$ 幂零，可知李群 K 紧，A 交换，N 幂零. 且由定理 2.2.8 可知，在复李代数 $\mathfrak{G}^C$ 中存在基，使得 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{K}, \mathrm{ad}\,\mathfrak{A}, \mathrm{ad}\,\mathfrak{N}_0$ 中元素的方阵表示分别为斜 Hermite 方阵、对角方阵及对角元素为零的上三角方阵. 于是 $\mathrm{Ad}\,k^{-1}k'$ 为酉方阵，$\mathrm{Ad}\,a, \mathrm{Ad}\,a'$ 为正实对角方阵，$\mathrm{Ad}\,nn'^{-1}$ 为对角元素等于 1 的上三角方阵. 这证明了 $\mathrm{Ad}\,k^{-1}k'$ 为具有正实数为对角元素的上三角方阵，又是酉方阵，所以它只有等于单位方阵. 因此证明了 $\mathrm{Ad}\,k' = \mathrm{Ad}\,k$. 所以 $\mathrm{Ad}\,n' = \mathrm{Ad}\,n, \mathrm{Ad}\,a' = \mathrm{Ad}\,a$. 这证明了一一性.

(2) 显然，A 为李群 $\mathrm{Ad}\,G$ 中的连通且单连通闭子群，且由定理 5.3.2 可知 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{A} \to \exp(\mathrm{ad}\,\mathfrak{A}) = \mathrm{Ad}\,A$ 为到上的一一映射. 再由 $\mathrm{Ad}\,A$ 单连通，所以 A 也连通，又 $C(G) \cap A = \{e\}$.

(3) 记 $\mathfrak{N}'$ 为 $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ 中对角元素为零的所有上三角方阵构成的幂零子代数，N' 为 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 中对角元素为 1 的所有上三角方阵构成的幂零子李群. 则 $\exp : \mathfrak{N}' \to N'$ 为到上的一一映射,

且 N' 连通又单连通.

事实上,由矩阵论可知, n 阶复方阵 A_0 若幂零,则有 $\log e^{A_0} = A_0, e^{\log(I+(e^{A_0}-I))} = e^{A_0}$. 因此 $\exp: \mathfrak{N} \to N'$ 为到上的一一映射,它关于矩阵元素为双解析同胚. 由于 $\mathfrak{N}$ 为 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维线性空间,所以 $\mathfrak{N}$ 连通且单连通. 因此利用 exp 为同胚,便证明了李群 N' 连通且单连通.

(4) 今 $\mathrm{Ad}\, N \subset N'$, 所以 $\exp: \mathrm{ad}\, \mathfrak{N}_0 \to \mathrm{Ad}\, N$ 仍为双解析同胚. 由 $\mathrm{ad}\, \mathfrak{N}_0$ 为 $\mathrm{ad}\, \mathfrak{G}$ 的子空间, 所以 $\mathrm{Ad}\, N$ 连通且单连通, 且在 $\mathrm{Ad}\, G$ 中为闭子群. 这证明了 N 也单连通, 又 $\mathrm{C}_N(N) = \{e\}$. 所以 $\mathrm{C}(G) \cap N = \{e\}$.

(5) 设 $\mathfrak{G}$ 为连通李群 G 的李代数, 且 $\mathfrak{G}$ 为子代数的空间直接和 $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2$. 设 G_i 是由 $\exp \mathfrak{G}_i$ 生成的连通李子群, 则李群 $G_1 \times G_2$ 到 G 内的映射 $\xi: (g_1, g_1) \to g_1 g_2$ 解析, 且局部一一.

事实上, 任取 $g \in G, X \in \mathfrak{G}$, 则李群 G 中曲线 $g \exp tX, \forall\, t \in \mathbb{R}$ 在点 g 的切方向为 $(L_g)_*(X)$. 今连通李群 $G_1 \times G_2$ 有闭子群 $G_1 \times \{e\}$ 及 $\{e\} \times G_2$, 这里, e 为单位元素. 任取 $g_i \in G_i$, 则李群 $G_1 \times G_2$ 中点 (g_1, g_2) 的切空间 $T_{(g_1,g_2)}(G_1 \times G_2)$ 同构于子空间直接和 $T_{g_1}(G_1) + T_{g_2}(G_2)$. 而任取 $g_i \in G_i, X_i \in \mathfrak{G}_i$, 则

$$\begin{aligned}\xi(g_1 \cdot \exp tX_1, g_2) &= (g_1 \cdot \exp tX_1) g_2 = g_1 g_2 ((\mathrm{ad}\, g_2^{-1}) \exp tX_1) \\ &= g_1 g_2 \exp t(\mathrm{Ad}\, g_2^{-1}) X_1,\end{aligned}$$

$$\xi(g_1, g_2 \exp tX_2) = g_1 g_2 \exp tX_2, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

所以映射 ξ 的 Jacobian 为

$$\xi_*((L_{g_1})_* X_1, (L_{g_2})_* X_2) = (L_{g_1 g_2})_*((\mathrm{Ad}\, g_2^{-1}) X_1 + X_2).$$

为了证映射 ξ 局部一一, 只要证 Jacobian 不为零. 设若不然, 即存在 $X_i \in \mathfrak{G}_i$, 有 $(\mathrm{Ad}\, g_2^{-1}) X_1 + X_2 = 0$, 即 $X_1 + (\mathrm{Ad}\, g_2) X_2 = 0$. 由 $X_1 \in \mathfrak{G}_1, (\mathrm{Ad}\, g_2) X_2 \in \mathfrak{G}_2$ 可知 $X_1 = X_2 = 0$. 至此证明了断言. 证完.

(6) 记 $\exp(\mathfrak{N}_0+\mathfrak{A})$ 生成的连通子群为 S, 则有

$$\mathrm{Ad}\ A\times\mathrm{Ad}\ N\to\ \mathrm{Ad}\ A\,\mathrm{Ad}\ N=\mathrm{Ad}\ S$$

为到上的双解析同胚.

事实上, 记 $\mathfrak{S}=\mathfrak{A}+\mathfrak{N}_0$, 则 $\mathfrak{S}$ 为可解李代数, 而 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{S}=\mathrm{ad}\,\mathfrak{A}+\mathrm{ad}\,\mathfrak{N}_0$ 为可解李代数 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{S}$ 关于子代数 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{A}$ 及 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{N}_0$ 的空间直接和. 由 (5) 便证明了 $\mathrm{Ad}\ A\times\mathrm{Ad}\ N\to(\mathrm{Ad}\ A)(\mathrm{Ad}\ N)\subset\mathrm{Ad}\ S$ 为双解析同胚, 且局部一一. 由 (1) 可知它一一. 余下证它到上, 即 $\mathrm{Ad}\ S=(\mathrm{Ad}\ A)(\mathrm{Ad}\ N)$.

今 $\dim(\mathrm{Ad}\ A)+\dim(\mathrm{Ad}\ N)=\dim\mathfrak{A}+\dim\mathfrak{N}_0=\dim\mathfrak{S}=\dim(\mathrm{Ad}\ S)$. 又由 $\mathfrak{N}_0$ 为可解李代数 $\mathfrak{S}$ 的理想, 所以李群 $\mathrm{Ad}\,N$ 为李群 $\mathrm{Ad}\,S$ 的闭正规子群, $\mathrm{Ad}\ A$ 为 $\mathrm{Ad}\ S$ 的闭子群, 且

$$(\mathrm{Ad}\ A)(\mathrm{Ad}\ N)=(\mathrm{Ad}\ N)(\mathrm{Ad}\ A)\subset(\mathrm{Ad}\ S).$$

因此 $(\mathrm{Ad}\ A)(\mathrm{Ad}\ N)$ 为李群 $\mathrm{Ad}\ S$ 的闭子群. 今 $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{N}_0=0$ 推出 $(\mathrm{Ad}\ A)\cap(\mathrm{Ad}\ N)$ 为零维李子群, 所以 $\dim(\mathrm{Ad}\ A)(\mathrm{Ad}\ N)=\dim(\mathrm{Ad}\ A)+\dim(\mathrm{Ad}\ N)=\dim(\mathrm{Ad}\ S)$, 且 ξ 为双解析同胚. 这证明了 $(\mathrm{Ad}\ A)(\mathrm{Ad}\ N)$ 为 $(\mathrm{Ad}\ S)$ 的开子群. 由 $\mathrm{Ad}\ S$ 连通, 便证明了 $(\mathrm{Ad}\ A)(\mathrm{Ad}\ N)=\mathrm{Ad}\ S$.

(7) 现在来证李群 $\mathrm{Ad}\,G$ 有 Iwasawa 分解.

事实上, 由 (1) 可知 $\mathrm{Ad}\,K\times\mathrm{Ad}\,A\times\mathrm{Ad}\,N\to\ \mathrm{Ad}\,G$ 为到内的一一映射, 由 (6) 可知 $\mathrm{Ad}\,A\times\mathrm{Ad}\,N\to\ \mathrm{Ad}\,S$ 为到上的双解析同胚, 因此只要证 $\mathrm{Ad}\,K\times\mathrm{Ad}\,S\to\mathrm{Ad}\,G$ 为到上的双解析同胚就够了.

记 T 为 $\mathrm{Ad}\,K$ 中 $\mathrm{Ad}\,G$ 的最大正规子群, 于是为紧正规子群. 因此 $\mathrm{Ad}\,G/T$ 仍为连通李群, 且 $M=(\mathrm{Ad}\,G/T)/(\mathrm{Ad}\,K/T)$ 为 Riamann 对称空间. 今 $\mathrm{Ad}\,S$ 在 $\mathrm{Ad}\,G$ 中闭, 又 T 紧, 所以 $\mathrm{Ad}\,S/T$ 在 $\mathrm{Ad}\,G/T$ 中闭. 我们来证 $\mathrm{Ad}\,S/T$ 在 Riemann 对称空间 M 上可递. 在 M 中取定一点 $\tilde{e}/T$, 其中 $\tilde{e}$ 为李群 $\mathrm{Ad}\,G$ 的单位元素. 于是轨道 $(\mathrm{Ad}\,S/T)(\tilde{e}/T)=\mathrm{Ad}\,S/T$ 在 M 中为闭子集. 由于 $T\subset\mathrm{Ad}\,K$,

有 $\mathrm{Ad}\,S/T = \mathrm{Ad}\,S/(T\cap \mathrm{Ad}\,S) = \mathrm{Ad}\,S$, 所以上述轨道的维数为

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ad}\,S) &= \dim S = \dim(\mathfrak{S}) = \dim(\mathfrak{G}) - \dim(\mathfrak{K})\\ &= \dim G - \dim K = \dim(\mathrm{Ad}\,G) - \dim(\mathrm{Ad}\,K)\\ &= \dim M.\end{aligned}$$

因此上述轨道为流形 M 中的又开又闭子集. 由流形 M 连通, 便证明了 $\mathrm{Ad}\,S/T$ 在流形 M 上可递. 所以 $\mathrm{Ad}\,G/T = ((\mathrm{Ad}\,S)(\mathrm{Ad}\,K))/T$. 由 $T\subset \mathrm{Ad}\,K$, 因此证明了 $\mathrm{Ad}\,SK = \mathrm{Ad}\,G$, 即 $\mathrm{Ad}\,S\times\mathrm{Ad}\,K \to \mathrm{Ad}\,G$ 为到上的映射. 由 (1) 可知它是到上的一一映射. 注意到李代数 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}+\mathfrak{S}$ 为两个子代数的空间直接和, 所以映射 $\mathrm{Ad}\,S\times\mathrm{Ad}\,K \to \mathrm{Ad}\,G$ 为双全纯同胚, 其中 $\mathrm{Ad}\,S\cap\mathrm{Ad}\,K = \mathrm{id}$. 至此证明了李群 $\mathrm{Ad}\,G$ 有分解 $\mathrm{Ad}\,G = \mathrm{Ad}\,S\mathrm{Ad}\,K$, 由 (6) 有 $\mathrm{Ad}\,N\times\mathrm{Ad}\,A \to \mathrm{Ad}\,N\mathrm{Ad}\,A = \mathrm{Ad}\,S$. 所以有 $\mathrm{Ad}\,G = (\mathrm{Ad}\,K)(\mathrm{Ad}\,S) = (\mathrm{Ad}\,K)(\mathrm{Ad}\,A)(\mathrm{Ad}\,N)$. 证完.

(8) 最后证李群 G 有 Iwasawa 分解.

事实上, 由 (5) 有 $A\cap C(G) = \{e\}$, $N\cap C(G) = \{e\}$. 作李群 G 的通用覆盖群 $(\widehat{G},\psi)$, 于是 $(\widehat{G},\mathrm{Ad}\circ\psi)$ 为李群 $\mathrm{Ad}\,G$ 的通用覆盖群. 设李代数 $\mathfrak{K},\mathfrak{A},\mathfrak{N}_0$ 分别决定的李群 $\widehat{G}$ 的连通子群为 $\widehat{K},\widehat{A},\widehat{N}$. 显然, $\widehat{K},\widehat{A},\widehat{N}$ 分别有通用覆盖群 $(\widehat{K},\mathrm{Ad}\circ\psi)$, $(\widehat{A},\mathrm{Ad}\circ\psi)$, $(\widehat{N},\mathrm{Ad}\circ\psi)$. 但是已证 $\mathrm{Ad}\,A$ 及 $\mathrm{Ad}\,N$ 单连通, 即 $\mathrm{Ad}\circ\psi$ 分别在 $\widehat{A}$, $\widehat{N}$ 上为李群的同构, 因此记 Poincaré 群 $\Gamma = (\mathrm{Ad}\circ\psi)^{-1}(e)$, 则 $\Gamma\subset\widehat{K}$, 且 $\psi(\Gamma) = \mathrm{Ad}^{-1}(e) = C(G)$. 于是 $\psi(\widehat{K}) = K\supset C(G)$. 令 $G/(C(G)) = (K/(C(G)))(A/(C(G)))(N/(C(G)))$, 即 $G = C(G)KAN$. 由 $C(G)\subset K$ 可知 $G = KAN$, 即映射 $K\times A\times N \to KAN = G$ 为李群 $K\times A\times N$ 到 G 上的映射. 由 (5) 可知它为局部一一解析映射. 我们来证它一一. 事实上, 由 $\widehat{K}\cap\widehat{A}\widehat{N} = \{\widehat{e}\}$, $\widehat{e}$ 为李群 $\widehat{G}$ 的单位元素, 所以 $K\cap AN\subset C(G)$. 由 $AN\cap C(G) = \{e\}$ 可知 $K\cap AN = \{e\}$, 因此映射 $K\times A\times N \to K(AN)$ 一一. 已知 $A\times N\to AN$ 为到上的一一映射, 所以证明了 $K\times A\times N \to KAN = G$ 为双解析同胚. 定理证完.

定理 5.3.4 符号同上. 则有

(1) $\mathfrak{P} = (\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{A}$;

(2) $G = KAK$.

证 今 $[\mathfrak{K},\mathfrak{P}] \subset \mathfrak{P}$, 所以 $(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}$, 因此 $(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. 这推出 $kAk^{-1} \subset \exp\mathfrak{P}, \forall\, k \in K$.

下面先从 (1) 推出 (2). 事实上, 若 $\mathfrak{P} = (\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{A}$, 则

$$\begin{aligned}G &= K(\exp\mathfrak{P}) = K(\exp(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{A}) = K(\mathrm{ad}\,K)(\exp\mathfrak{A})\\ &= K\bigcup_{k\in K} kAk^{-1} \subset KAK \subset G.\end{aligned}$$

这证明了 $G = KAK$.

现在来证 (1). 已知 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 为 Cartan 分解, 所以 $\mathfrak{G}_c = \mathfrak{K} + \sqrt{-1}\mathfrak{P}$ 为紧李代数, 从而由 $\mathfrak{G}_c$ 决定的连通紧李群

$$G_c = K(\exp\sqrt{-1}\mathfrak{P}) = (\exp\sqrt{-1}\mathfrak{P})K.$$

今 $\sqrt{-1}\mathfrak{A}$ 为紧李代数 $\mathfrak{G}_c$ 的交换子代数, 所以 $\exp\sqrt{-1}\mathfrak{A}$ 为紧李群 G_c 的紧连通子群, 记作 $\widetilde{A}$. 因为 $\widetilde{A}$ 紧交换连通, 所以为环面. 在 $\sqrt{-1}\mathfrak{A}$ 中取定基 $X_1, \cdots, X_r$, 取定无理数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, 有

$$\exp\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i X_i = \prod_{i=1}^{r}\exp\lambda_i(\sqrt{-1}X_i).$$

由于任取无理数 λ_0, 则 $\{n\lambda_0 \mid \forall\, n \in \mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 所以证明了存在 $X_0 \in \mathfrak{A}$, 使得单参数子群 $\exp t\sqrt{-1}X_0, \forall\, t \in \mathbb{R}$ 在紧连通子群 $\widetilde{A}$ 中稠密.

今考虑 $\mathfrak{A}$ 中的元素 X_0 及 X_0 在子空间 $\sqrt{-1}\mathfrak{P}$ 中的中心化子 $C_{\sqrt{-1}\mathfrak{P}}(\sqrt{-1}X_0)$. 由 $\mathfrak{A}$ 为子空间 $\mathfrak{P}$ 中的极大交换子代数, 所以 $\sqrt{-1}\mathfrak{A} \subset C_{\sqrt{-1}\mathfrak{P}}(\sqrt{-1}X_0)$. 今任取 $Y \in C_{\sqrt{-1}\mathfrak{P}}(\sqrt{-1}X_0)$, $Y \neq 0$, 则有 $Y \in \sqrt{-1}\mathfrak{P}, [Y, \sqrt{-1}X_0] = 0$. 所以 $(\mathrm{ad}\,(\sqrt{-1}X_0)Y = 0$, 因

此 $(\exp \mathrm{ad}\, t(\sqrt{-1}X_0))Y = Y$, 即 $(\mathrm{Ad}\exp t(\sqrt{-1}X_0))Y = Y$. 由于 $\exp t(\sqrt{-1}X_0)$ 在 $\widetilde{A}$ 中稠密, 所以证明了 $(\mathrm{Ad}\,\widetilde{A})Y = Y$, 即 $(\mathrm{Ad}\exp\sqrt{-1}\mathfrak{A})Y = Y$. 这推出 $(\mathrm{ad}\,(\sqrt{-1}\mathfrak{A}))Y = 0$. 由 $\sqrt{-1}\mathfrak{A}$ 为 $\sqrt{-1}\mathfrak{P}$ 中的极大交换子代数, 所以 $Y \in \sqrt{-1}\mathfrak{A}$, 即

$$\mathfrak{A} = \mathrm{C}_{\sqrt{-1}\mathfrak{P}}(X_0).$$

在子空间 $\mathfrak{P}$ 中任取一元素 X, 作映射

$$k \to B(\sqrt{-1}X_0, (\mathrm{Ad}\, k)\sqrt{-1}X).$$

它是紧连通李群 K 上的连续函数, 所以在 K 中的某一元素 k_0 达到极小值. 考虑紧李群 K 中的单参数曲线 $(\exp tY)k_0, \forall\, t \in \mathbb{R}, Y \in \mathfrak{K}$. 所以有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(\sqrt{-1}X_0, (\mathrm{Ad}\,(\exp tY)k_0)\sqrt{-1}X)\Big|_{t=0} = 0,$$

即

$$B(\sqrt{-1}X_0, \sqrt{-1}[Y, (\mathrm{Ad}\, k_0)X]) = 0.$$

因此

$$B(Y, [\sqrt{-1}X_0, \sqrt{-1}(\mathrm{Ad}\, k_0)X]) = 0.$$

今 $X \in \mathfrak{P}, (\mathrm{Ad}\, k_0)X \in \mathfrak{P}, X_0 \in \mathfrak{P}$, 所以 $[\sqrt{-1}X_0, \sqrt{-1}(\mathrm{Ad}\, k_0)X] \in \mathfrak{K}$. 由 $Y(\in \mathfrak{K})$ 任取及 Killing 型 B 在 $\mathfrak{K}$ 上负定, 便证明了

$$[X_0, (\mathrm{Ad}\, k_0)X] = 0,$$

即 $X \in \mathrm{C}_{\mathfrak{P}}((\mathrm{Ad}\, k_0^{-1})X_0) = (\mathrm{Ad}\, k_0^{-1})\mathrm{C}_{\mathfrak{P}}(X_0) = (\mathrm{Ad}\, k_0^{-1})\mathfrak{A}$. 至此证明了 $\mathfrak{P} \subset \bigcup\limits_{k\in K}(\mathrm{Ad}\, k)\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. 定理证完.

定理 5.3.5 实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 关于 Cartan 分解 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 的最大向量 Cartan 子代数互相在 $\mathrm{Ad}\, K$ 下共轭.

证 在定理 5.3.4 的证明中给出最大向量 Cartan 子代数的向量部分 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ 为 $\mathfrak{A}$ 中一元素 X_0 在 $\mathfrak{P}$ 中的中心化子, 其中 $\exp tX_0$

在 $A=\exp\mathfrak{A}$ 中稠密. 又证明了任取 $X\in\mathfrak{P}$, 则存在 $k\in K$ 使得 $(\mathrm{Ad}\,k)X\in\mathfrak{A}$.

今任取半单李代数 $\mathfrak{G}$ 关于 Cartan 分解 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$ 的最大向量 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}'=\mathfrak{H}'_c+\mathfrak{A}'$, 其中 $\mathfrak{H}'_c\subset\mathfrak{K},\mathfrak{A}'\subset\mathfrak{P}$. 于是存在元素 $X'\in\mathfrak{A}'$, 使得 $\exp tX',\forall\,t\in\mathbb{R}$ 在 $\exp\mathfrak{A}'=A'$ 中稠密. 又存在 $k\in K$, 使得 $(\mathrm{Ad}\,k)X'\in\mathfrak{A}$. 于是 $\exp t(\mathrm{Ad}\,k)X'=(\mathrm{ad}\,k)(\exp tX')\in A$, 即 $\exp tX'\in(\mathrm{ad}\,k^{-1})A,\forall\,t\in\mathbb{R}$. 今 $\exp tX'$ 在 A' 中稠密, 所以证明了 $A'\subset(\mathrm{ad}\,k^{-1})A$, 即 $(\mathrm{ad}\,(k))A'\subset A$. 同理可证, 存在 $k'\in K,(\mathrm{ad}\,k')A\subset A'$, 即 $(\mathrm{ad}\,(k'k))A'\subset(\mathrm{ad}\,k')A\subset A'$. 由于 $\mathrm{ad}\,(k'k)$ 为李群 G 的自同构, 所以证明了 $(\mathrm{ad}\,k')A=A'$, 即 $(\mathrm{ad}\,k')\mathfrak{A}=\mathfrak{A}'$. 因此

$$(\mathrm{ad}\,k')^{-1}\mathfrak{H}'=(\mathrm{ad}\,k')^{-1}\mathfrak{H}'_c+(\mathrm{ad}\,k')^{-1}\mathfrak{A}'=\mathfrak{H}_c+\mathfrak{A}$$

为最大向量 Cartan 子代数. 注意到最大向量 Cartan 子代数由它在 $\mathfrak{P}$ 的部分唯一决定, 至此证明了定理. 证完.

引理 5.3.6 设 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$ 为实半单李代数的 Cartan 分解, 取 $\mathfrak{H}_0$ 为紧李代数 $\mathfrak{K}$ 的 Cartan 子代数, 则在 $\mathfrak{H}_0$ 中存在 $\mathfrak{G}^C$ 的正则元素 X_0.

证 今 $\mathfrak{G}_c=\mathfrak{K}+\sqrt{-1}\mathfrak{P}$ 为 $\mathfrak{G}$ 的复化 $\mathfrak{G}^C$ 的紧实形式. 记 $\mathfrak{G}$ 为 $(\mathfrak{G}^C,\sigma)$,$\mathfrak{G}_c$ 为 $(\mathfrak{G}^C,\tau)$, 则 $\theta=\sigma\tau$ 是 Cartan 对合. 在 $\mathfrak{G}$ 中取最大紧 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0+\mathfrak{H}_v$, $\mathfrak{H}_0\subset\mathfrak{K}$, $\mathfrak{H}_v\subset\mathfrak{P}$, 于是 $\mathfrak{H}^C$ 为 $\mathfrak{G}^C$ 的 Cartan 子代数. 记 Δ 为 $\mathfrak{G}^C$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}^C$ 的根系, 记 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 为单根系. 于是 $\theta(\Pi)=\Pi$. 因此

$$\theta(\alpha_i)=\alpha_{j_i},\quad i=1,\cdots,l,$$

其中 $j_1j_2\cdots j_l$ 是 $1,2,\cdots,l$ 的一个排列, 所以置换

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&l\\ j_1&j_2&\cdots&j_l\end{pmatrix}$$

可分解为 s 个循环的乘积.

任取一个循环 $(i_1\cdots i_t)$, 则有

$$\sigma(\alpha_{i_1})=\alpha_{i_2},\cdots,\sigma(\alpha_{i_{t-1}})=\alpha_{i_t},\sigma(\alpha_{i_t})=\alpha_{i_1}.$$

记 $\alpha=\sum\limits_{j=1}^{t}\alpha_{i_j}$, 则有 $\sigma(\alpha)=\alpha$.

我们来证 $(\alpha,\alpha_{i_j})\neq 0$, $j=1,2,\cdots,t$. 事实上, 如果 $(\alpha,\alpha_{i_1})=0$, 则有 $(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha_{i_1}))=0$, 即 $(\alpha,\alpha_{i_2})=0$. 这样依次讨论下去, 便证明了 $(\alpha,\alpha_{i_j})=0$, $j=1,2,\cdots,t$, 所以 $(\alpha,\alpha)=0$. 至此证明了 $\alpha=0$, 从而导出矛盾. 这证明了断言.

将置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & l \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_l \end{pmatrix}$$

的 s 个循环编号, 例如循环 $(i_1\cdots i_t)$ 为第 p 个循环, 则记 $\beta_p=\sum\limits_{j=1}^{t}\alpha_{i_j}$. 这样有 s 个元素 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$, 使得 $\sigma(\beta_i)=\beta_i$, 于是 $\sqrt{-1}\beta_i\in\mathfrak{K}$, $i=1,2,\cdots,s$. 且显然 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关, 又

$$\sum_{i=1}^{s}\beta_i=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i.$$

任取 $a_1,a_2,\cdots,a_l\in\mathbb{R}$, 则有

$$X_0=\sum_{i=1}^{s}a_i\sqrt{-1}\beta_i\ \in\ \mathfrak{H}^C\cap\mathfrak{K}=\mathfrak{H}_0.$$

由于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关, 所以 Cartan 矩阵

$$\begin{pmatrix} B(\beta_1,\beta_1) & \cdots & B(\beta_1,\beta_s) \\ \vdots & & \vdots \\ B(\beta_s,\beta_1) & \cdots & B(\beta_s,\beta_s) \end{pmatrix}$$

非异, 因此实线性方程组

$$\sum_{i=1}^{s}a_iB(\beta_i,\beta_j)=1,\quad j=1,2,\cdots,s$$

有解. 所以存在 $X_0=\sum\limits_{i=1}^{s}a_i\sqrt{-1}\beta_i\in\mathfrak{H}_0$, 使得

$$B(X_0,\beta_j)=1,\quad j=1,2,\cdots,s.$$

由于 $\sigma(X_0)=X_0$, $\sigma(\beta_j)=\beta_j$, $j=1,2,\cdots,s$. 这证明了

$$B(X_0,\alpha_i)\neq 0,\quad i=1,2,\cdots,l.$$

因此 X_0 是 $\mathfrak{H}_0$ 中 $\mathfrak{G}^C$ 的正则元素. 证完.

定理 5.3.7 实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 关于 Cartan 分解 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$ 的最大紧 Cartan 子代数在 $\mathrm{Ad}\,K$ 下互相共轭.

证 由于紧李代数的 Cartan 子代数互相共轭, 所以我们无妨取最大紧 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_i=\mathfrak{H}_{ic}+\mathfrak{H}_{iv}$, $i=1,2$, 其中 $\mathfrak{H}_{1c}=\mathfrak{H}_{2c}=\mathfrak{H}_0$ 为紧李代数 $\mathfrak{K}$ 的 Cartan 子代数. 又 $\mathfrak{H}_{iv}\subset\mathfrak{P}$, $i=1,2$. 我们来证 $\mathfrak{H}_{1v}=\mathfrak{H}_{2v}$, 所以 $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}_2$.

事实上, 由引理 5.3.6 可知, 在 $\mathfrak{H}_0$ 中存在 $\mathfrak{G}^C$ 的正则元素 X_0, 使得 $\mathrm{C}_{\mathfrak{G}}(X_0)=\mathrm{C}_{\mathfrak{G}^C}(X_0)\cap\mathfrak{G}$ 为 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数. 由于 $\mathfrak{H}_i\subset\mathrm{C}_{\mathfrak{G}}(X_0)$, $i=1,2$, 而 $\mathfrak{H}_i^C$ 为 $\mathfrak{G}^C$ 的 Cartan 子代数, $i=1,2$, 由 X_0 为 $\mathfrak{G}^C$ 的正则元素, 所以 $\mathrm{C}_{\mathfrak{G}^C}(X_0)=\mathfrak{H}_i^C$, $i=1,2$. 这证明了

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_i\subset\mathrm{C}_{\mathfrak{G}^C}(X_0)&=\mathrm{C}_{\mathfrak{G}^C}(X_0)\cap\mathfrak{G}\\&=\mathfrak{H}_i^C\cap\mathfrak{G}=\mathfrak{H}_i,\quad i=1,2.\end{aligned}$$

所以证明了 $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}_2=\mathrm{C}_{\mathfrak{G}}(X_0)$. 至此证明了定理. 证完.

§ 5.4 Harish-Chandra 嵌入

回到定理 5.2.14. 设 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$ 为实单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 分解, 其中李代数 $\mathfrak{G}$ 非紧, 且适合定理 5.2.14 的条件. 记 $\mathfrak{G}_c=\mathfrak{K}+\sqrt{-1}\mathfrak{P}$ 为紧实形式, 它仍单. 记 $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$ 为 $\mathfrak{G}$ 的复化, 则 $\mathfrak{L}$ 为复单李代数, 且在 $\mathfrak{L}$ 上存在半对合 σ,τ, 使得 $\mathfrak{G}=(\mathfrak{L},\sigma)$, $\mathfrak{G}_c=(\mathfrak{L},\tau)$, 又 $\theta=\sigma\tau=\tau\sigma$ 为 Cartan 对合.

今 $C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$ 的维数为 1, 在 $C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$ 中存在元素 c, 使得 $C_{\mathfrak{G}}(c) = \mathfrak{K}, (\mathrm{ad}_{\mathfrak{P}} c)^2 = -\mathrm{id}$. 于是线性变换 $J = \mathrm{ad}\, c$ 有 $J(\mathfrak{K}) = 0, J(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$. 且在复线性空间 $\mathfrak{P}^C$ 中有复子空间

$$\mathfrak{P}_{\pm} = \{X \mp \sqrt{-1} JX \mid \forall\, X \in \mathfrak{P}\},$$

使得 $\mathfrak{P}_+ \cap \mathfrak{P}_- = 0, \mathfrak{P}^C = \mathfrak{P}_+ + \mathfrak{P}_-$ 为子空间直接和, 而且

$$[\mathfrak{P}_+, \mathfrak{P}_+] = [\mathfrak{P}_-, \mathfrak{P}_-] = 0,$$

$$[\mathfrak{P}_+, \mathfrak{P}_-] = [\mathfrak{P}^C, \mathfrak{P}^C] = \mathfrak{K}^C.$$

在 $\mathfrak{K}$ 中任取 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0$, 则 $\mathfrak{H}_0$ 为 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数, 即 $\mathfrak{H}_0$ 为最大紧 Cartan 子代数. 记 $\mathfrak{H}_0$ 的复化 $\mathfrak{H}_0^C = \mathfrak{H}$, 则有根子空间分解

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{L}_\alpha,$$

而 Δ 实线性生成 $\mathfrak{H}_R = \sqrt{-1}\mathfrak{H}_0$. 于是

$$\mathfrak{K}^C = \mathfrak{H} + \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{K}}} \mathfrak{L}_\alpha,$$

$$\mathfrak{P}^C = \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{P}}} \mathfrak{L}_\alpha.$$

$\Delta_{\mathfrak{K}}$ 中元素称为**紧根**, $\Delta_{\mathfrak{P}}$ 中元素称为**非紧根**. 由

$$[\mathfrak{K}^C, \mathfrak{K}^C] \subset \mathfrak{K}^C,$$
$$[\mathfrak{K}^C, \mathfrak{P}^C] \subset \mathfrak{P}^C,$$
$$[\mathfrak{P}^C, \mathfrak{P}^C] \subset \mathfrak{K}^C,$$

所以

$$(\Delta_{\mathfrak{K}} + \Delta_{\mathfrak{K}}) \cap \Delta \subset \Delta_{\mathfrak{K}},$$

$$(\Delta_{\mathfrak{K}} + \Delta_{\mathfrak{P}}) \cap \Delta \subset \Delta_{\mathfrak{P}},$$

$$(\Delta_{\mathfrak{P}} + \Delta_{\mathfrak{P}}) \cap \Delta \subset \Delta_{\mathfrak{K}}.$$

令 $C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$ 中存在非零元素 c, 有 $C_{\mathfrak{G}}(c) = \mathfrak{K}, (\operatorname{ad}_{\mathfrak{P}} c)^2 = -\mathrm{id}$. 由 $C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{H}_0$ 可知 $c \in \mathfrak{H}_0$. 又由 $-\Delta_{\mathfrak{K}} = \Delta_{\mathfrak{K}}, -\Delta_{\mathfrak{P}} = \Delta_{\mathfrak{P}}$, 所以 $\Delta_{\mathfrak{P}}$ 中有子集 $\Delta'_{\mathfrak{P}} = \{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{P}} \mid -\sqrt{-1}\alpha(c) > 0\}, \Delta''_{\mathfrak{P}} = \{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{P}} \mid \sqrt{-1}\alpha(c) > 0\}$. 于是 $\Delta''_{\mathfrak{P}} = -\Delta'_{\mathfrak{P}}$, 且 $\Delta'_{\mathfrak{P}} \cup \Delta''_{\mathfrak{P}} = \Delta_{\mathfrak{P}}$. 在 $\Delta'_{\mathfrak{P}}$ 中取极大实线性无关子集，再在 $\Delta_{\mathfrak{K}}$ 中拼上 Δ 的极大实线性无关子集，从而在 Δ 中引进单根系，且 $\Delta'_{\mathfrak{P}} = \Delta^+_{\mathfrak{P}}$. 另一方面，有

$$(\Delta_{\mathfrak{K}} + \Delta^{\pm}_{\mathfrak{P}}) \cap \Delta \subset \Delta^{\pm}_{\mathfrak{P}}, \quad (\Delta^{\pm}_{\mathfrak{P}} + \Delta^{\pm}_{\mathfrak{P}}) \cap \Delta = \emptyset.$$

事实上，由正方向的选取可知，任取 $\delta \in \Delta_{\mathfrak{K}}$, 则 $\delta < \alpha, \forall\, \alpha \in \Delta^+_{\mathfrak{P}}$. 但是 $[\mathfrak{P}^+, \mathfrak{P}^+] \subset [\mathfrak{P}^C, \mathfrak{P}^C] = \mathfrak{K}^C$. 若 $\alpha, \beta \in \Delta^+_{\mathfrak{P}}$, 且 $\alpha + \beta \in \Delta$, 则 $\alpha + \beta > \alpha > 0, \alpha + \beta \notin \Delta_{\mathfrak{K}}$, 这和 $[\mathfrak{P}^C, \mathfrak{P}^C] \subset \mathfrak{K}^C$ 矛盾. 所以证明了 $\alpha + \beta \notin \Delta \cap \{0\}$. 同理，若 $\alpha, \beta \in \Delta^-_{\mathfrak{P}}$, 则 $\alpha + \beta \notin \Delta$. 所以证明了 $(\Delta^{\pm}_{\mathfrak{P}} + \Delta^{\pm}_{\mathfrak{P}}) \cap \Delta = \emptyset$.

记

$$\mathfrak{G}_{\pm} = \sum_{\alpha \in \Delta^{\pm}} \mathfrak{L}_\alpha \supset \sum_{\alpha \in \Delta^{\pm}_{\mathfrak{P}}} \mathfrak{L}_\alpha = \mathfrak{P}'_{\pm},$$

则 $\mathfrak{G}_{\pm}$ 为复单李代数 $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C$ 的幂零子代数. 我们来证 $\mathfrak{P}'_{\pm} = \mathfrak{P}_{\pm}$. 事实上， $\operatorname{ad} c|_{\mathfrak{P}_{\pm}} = \pm\sqrt{-1}\mathrm{id}$. 今任取 $\alpha \in \Delta^{\pm}_{\mathfrak{P}}$, 则 $\mp\sqrt{-1}\alpha(c) > 0$. 由于 $c \in \mathfrak{H}_0$, 所以 $-e_\alpha = (\operatorname{ad} c)^2 e_\alpha = \alpha(c)^2 e_\alpha, \forall\, \alpha \in \Delta^{\pm}_{\mathfrak{P}}$. 因此 $\alpha(c)^2 = -1$. 由 $\mp\sqrt{-1}\alpha(c) > 0$ 可知 $\alpha(c) = \pm\sqrt{-1}$. 即 $\operatorname{ad} c|_{\mathfrak{P}'_{\pm}} = \pm\sqrt{-1}\mathrm{id} = \operatorname{ad} c|_{\mathfrak{P}_{\pm}}$. 这证明了 $\mathfrak{P}'_{\pm} = \mathfrak{P}_{\pm}$. 因此，我们证明了

引理 5.4.1 设 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 为非紧型实单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 分解，其中 $\dim C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K}) = 1$, 且在 $C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$ 中存在元素 c, 它有

$$C_{\mathfrak{G}}(c) = \mathfrak{K}, \quad (\operatorname{ad}_{\mathfrak{P}} c)^2 = -\mathrm{id}.$$

记 $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C$ 为 $\mathfrak{G}$ 的复化，它是复单李代数. 而 $\mathfrak{G} = (\mathfrak{L}, \sigma)$, $\mathfrak{G}_c = (\mathfrak{L}, \tau)$, 其中 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$, $\mathfrak{G}_c = \mathfrak{K} + \sqrt{-1}\mathfrak{P}$. 在 $\mathfrak{K}$ 中取 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0$, 则 $\mathfrak{H}_0$ 为单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 子代数. 于是

$$\mathfrak{K}^C = \mathfrak{H}_0^C + \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{K}}} \mathfrak{L}_\alpha, \quad \mathfrak{P}^C = \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{P}}} \mathfrak{L}_\alpha.$$

又可取正方向，使得

$$\Delta_{\mathfrak{P}}^{\pm}=\{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{P}}\mid\mp\sqrt{-1}\alpha(c)>0\}.$$

记

$$\mathfrak{P}_{\pm}=\sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{P}}^{\pm}}\mathfrak{L}_{\alpha},$$

则有子代数直接和分解

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C=\mathfrak{P}_{+}+\mathfrak{K}^C+\mathfrak{P}_{-},$$

它有

$$[\mathfrak{K}^C,\mathfrak{K}^C]\subset\mathfrak{K}^C,\quad[\mathfrak{K}^C,\mathfrak{P}_{\pm}]\subset\mathfrak{P}_{\pm},$$
$$[\mathfrak{P}_{\pm},\mathfrak{P}_{\pm}]=0,\quad[\mathfrak{P}_{+},\mathfrak{P}_{-}]\subset\mathfrak{K}^C.$$

引理 5.4.2 设 G^C 是由复单李代数 $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$ 决定的连通且单连通复李群. 分别由 $\exp\mathfrak{P}_{+},\exp\mathfrak{K}^C,\exp\mathfrak{P}_{-}$ 生成的 G^C 的连通李子群记作 P^{+},K^C,P^{-}, 则有

(1) P^{+},K^C,P^{-} 为 G^C 的闭子群，其中 $P^{\pm}$ 单连通；

(2) $\exp:\mathfrak{P}_{\pm}\rightarrow P^{\pm}$ 为到上的双全纯同胚；

(3) $K^CP^{\pm}=P^{\pm}K^C$ 为闭子群，且 $K^C\times P^{\pm}\rightarrow K^CP^{\pm}$ 为到上的双全纯同胚；

(4) $P^{+}K^CP^{-}$ 为复李群 G^C 中的开子集, 又 $P^{+}\times K^C\times P^{-}\rightarrow P^{+}K^CP^{-}$ 为双全纯同胚.

证 先证 (1),(2). 今实单李代数 $\mathfrak{G}$ 有 Cartan 对合 $\theta=\sigma\tau=\tau\sigma$, 而 θ 的不动点集为紧李代数 $\mathfrak{K}$. 由于李群 G^C 单连通，所以 θ 可提升为复李群 G^C 的对合自同构 $\widehat{\theta}$, 其不动点集 K_1 为 G^C 中的闭普通子群，所以是李子群，且 K_1 的李代数为 $\mathfrak{K}^C$, 所以 K^C 为闭子群 K_1 的单位连通分支. 因此仍为闭子群.

令 $P^\pm$ 为交换复李群，它的李代数

$$\mathfrak{P}_\pm = \sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{P}}^\pm} \mathfrak{L}_\alpha \subset \sum_{\alpha\in\Delta^\pm} \mathfrak{L}_\alpha = \mathfrak{N}_\pm,$$

其中 $\mathfrak{N}_\pm$ 为幂零李代数，且 $\operatorname{ad}\mathfrak{N}_\pm$ 也由幂零线性变换构成，所以 $\operatorname{ad}\mathfrak{P}_\pm$ 也由幂零线性变换构成. 由 $\mathfrak{P}_\pm$ 为交换李代数，所以在复李代数 $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C$ 中存在一组基，使得 $\operatorname{ad}\mathfrak{P}_+$ 中元素同时表示为对角元素为零的上三角方阵，也在复李代数 $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C$ 中存在另外一组基，使得 $\operatorname{ad}\mathfrak{P}_-$ 中元素同时表示为对角元素为零的上三角方阵. 因此易证 $\operatorname{ad}\mathfrak{P}_\pm \to \operatorname{Ad}(\exp\mathfrak{P}_\pm) = \operatorname{Ad}P^\pm$ 为双全纯同构. 所以 $\mathfrak{P}_\pm \to P^\pm$ 为到上的全纯映射，且局部一一. 下面来证它一一. 事实上，若存在 $X \neq Y, X, Y \in \mathfrak{P}_\pm, \exp X = \exp Y$，由 $[X,Y]=0$ 可知 $\exp(X-Y) = e$. 即记 $Z = X - Y \in \mathfrak{P}_\pm$，有 $\exp Z = e$. 于是 $\exp(\operatorname{ad}Z) = \operatorname{id}$. 但是 $\operatorname{ad}Z$ 幂零，所以证明了 $\operatorname{ad}Z = 0$，即 $Z = 0$. 因此推出矛盾. 所以 $\mathfrak{P}_\pm \to P^\pm$ 为到上的双全纯同胚. 由 $\mathfrak{P}_\pm$ 为复 Euclid 空间，可知 $P^\pm$ 单连通. 最后证 $P^\pm$ 为复李群 G^C 中的闭子群. 事实上，任取收敛序列 $\{\exp X_i\}$，则 X_i 在李代数 $\mathfrak{G}^C$ 中收敛于 X_0，因此 $\exp X_i \to \exp X_0$. 今有限维线性空间的子空间为闭子集，即 $X_0 \in \mathfrak{P}_\pm$，所以证明了 $\exp X_0 \in P^\pm$，即 $P^\pm$ 为闭交换子群. 至此证明了 (1) 及 (2).

再证 (3). 今

$$[\mathfrak{K}, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{P},\ [\mathfrak{K}^C, \mathfrak{P}_\pm] \subset \mathfrak{P}_\pm,$$

所以 $\mathfrak{K}^C + \mathfrak{P}_\pm$ 为复李代数，以 $\mathfrak{P}_\pm$ 为理想. 因此，$K^C P^\pm$ 为李子群，且 $P^\pm$ 为 $K^C P^\pm$ 的正规子群，所以 $K^C P^\pm = P^\pm K^C$. 下面证 $K^C P^\pm$ 闭. 事实上，在 $K^C P^\pm$ 中任取收敛子序列 $\{k_n \cdot \exp X_n\}$，其中 $k_n \in K^C$, $X_n \in \mathfrak{P}_\pm$. 今 $\widehat{\theta}(k_n) = k_n$, $\widehat{\theta}(\exp X_n) = \exp\theta(X_n) = \exp(-X_n) = (\exp X_n)^{-1}$，所以由 $\widehat{\theta}(k_n \cdot \exp X_n)$ 也收敛，推出

$$(\widehat{\theta}(k_n \cdot \exp X_n))^{-1}(k_n \cdot \exp X_n) = \exp 2X_n$$

收敛，所以 $\{\exp X_n\}$ 收敛．这证明了 $\{k_n\}$ 收敛．由子群 K^C 及 $P^{\pm}$ 闭可知，$K^CP^{\pm}$ 中任一收敛子序列收敛于 $K^CP^{\pm}$ 中元素，即 $K^CP^{\pm}$ 闭．因此，$K^CP^{\pm}$ 的李代数 $\mathfrak{K}^C+\mathfrak{P}_{\pm}$ 为子代数直接和．由定理 5.3.3 的证明 (5) 可知，$K^C\times P^{\pm}\to K^CP^{\pm}$ 为局部一一的双解析映射．因此，为了证明 (3) 成立，只要证明映射 $K^C\times P^{\pm}\to K^CP^{\pm}$ 一一就够了．今若有 $k,k'\in K^C,u_{\pm},u'_{\pm}\in P^{\pm}$，有 $ku_{\pm}=k'u'_{\pm}$．于是 $k^{-1}k'=u_{\pm}(u'_{\pm})^{-1}\in K^C\cap P_{\pm}$．用李群 G^C 的自同构 $\widehat{\theta}$ 作用，有

$$k^{-1}k'=u_{\pm}(u'_{\pm})^{-1}=u_{\pm}^{-1}u'_{\pm},$$

这证明了 $u_{\pm}^2=(u'_{\pm})^2$．注意到 $\operatorname{Ad}u_{\pm}$ 的方阵表示为对角元素等于 1 的上三角方阵，所以推出 $u_{\pm}=u'_{\pm}$．因此 $k=k'$，即 $K^C\times P^{\pm}\to K^CP^{\pm}$ 为一一映射．

最后证 (4)．现在来证明复李群 G^C 有开子集 $P^+K^CP^-$，且 $P^+\times K^C\times P^-\to P^+K^CP^-$ 为双解析同胚．先证这是一一对应．由 (3) 可知只需证 $P^+\cap K^CP^-=\{e\}$．设若不然，则存在 $X_{\pm}\in\mathfrak{P}_{\pm},k\in K^C$，有 $\exp X_+=k\cdot\exp X_-$．因此 $\exp\operatorname{ad}X_+=(\operatorname{Ad}k)(\exp\operatorname{ad}X_-)$．由 $[\mathfrak{K}^C,\mathfrak{P}_-]\subset\mathfrak{P}_-$，可知 $(\exp\operatorname{ad}X_+)(\mathfrak{P}_-)\subset\mathfrak{P}_-$．设 $X_+\in\mathfrak{P}_+=\sum\limits_{\alpha\in\Delta^+_{\mathfrak{P}}}\mathfrak{L}_\alpha$，所以 $X_+=\sum\limits_{\alpha\in\Delta^+_{\mathfrak{P}}}\lambda_\alpha e_\alpha$，其中 $\lambda_\alpha\in\mathbb{C}$，$e_\alpha$ 属 Weyl 基．记 α_0 为 $\Delta^+_{\mathfrak{P}}$ 中的最小正根，使得 $\lambda_{\alpha_0}\neq 0$．于是

$$[X_+,e_{-\alpha_0}]=\lambda_{\alpha_0}h_{\alpha_0}+\cdots,$$

其中没有写出的项在 $\sum\limits_{\alpha\in\Delta^+}\mathfrak{L}_\alpha=\mathfrak{N}^+$ 中，又

$$B(h_{\alpha_0},h)=\alpha_0(h),\forall\ h\in\mathfrak{H}_0^C.$$

因此

$$(\exp\operatorname{ad}X_+)e_{-\alpha_0}=e_{-\alpha_0}+\lambda_{\alpha_0}h_{\alpha_0}+\cdots,$$

其中没有写出的项在 $\sum\limits_{\alpha\in\Delta^+}\mathfrak{L}_\alpha=\mathfrak{N}^+$ 中．今 $(\exp\operatorname{ad}X_+)e_{-\alpha_0}\in\mathfrak{P}_-$，

所以导出矛盾. 这证明了 $P^+\cap K^CP^- = \{e\}$, 即证明了 $P^+\times K^C\times P^- \to P^+K^CP^-$ 为双全纯同胚.

余下要证明 $P^+K^CP^-$ 为复李群 G^C 的开子集. 事实上, 有

$$\begin{aligned}\dim P^+K^CP^- &= \dim\mathfrak{P}_+ + \dim\mathfrak{P}_- + \dim\mathfrak{K}^C\\&= \dim\mathfrak{P}^C + \dim\mathfrak{K}^C = \dim\mathfrak{G}^C = \dim G^C.\end{aligned}$$

这证明了 $P^+K^CP^-$ 中有李群 G^C 的开子集, 所以 $P^+K^CP^-$ 开. 证完.

定理 5.4.3 符号同上. 记 G_c 为复李群 G^C 中由 $\exp\mathfrak{G}_c$ 生成的连通子群, 则 G_c 为紧连通单李群. 记 $\exp\mathfrak{K}$ 生成 G_c 的紧连通子群 K, 则 G_c/K 为紧 Hermite 流形. 且 G_c/K 到 $G^C/(K^CP^-)$ 上有双全纯同胚 ξ, 它定义为

$$\xi(gK) = gK^CP^-, \quad \forall\, g\in G_c.$$

证 由 G^C 连通且单连通, 又子群 K^CP^- 连通, 所以商空间 $G^C/(K^CP^-)$ 单连通且连通. 考虑 G^C 的紧子群 G_c 在商空间 $G^C/(K^CP^-)$ 的作用. $G^C/(K^CP^-)$ 中点 eK^CP^- 的迷向子群为 $\{g\in G_c|g(eK^CP^-) = eK^CP^-\}$, 其中 e 为李群 G^C 的单位元素, 因此迷向子群为 $\{g\in G_c\mid g\in K^CP^-\} = G_c\cap K^CP^-$, 它为紧李群 G_c 的闭子群, 其李代数为 $\mathfrak{G}_c\cap(\mathfrak{K}^C+\mathfrak{P}_-) = (\mathfrak{K}+\sqrt{-1}\mathfrak{P})\cap(\mathfrak{K}^C+\mathfrak{P}_-) = \mathfrak{K}$, 所以 $K\subset G_c\cap K^CP^-$. 我们来计算轨道的实维数, 它应该为 $\dim_R G_c - \dim_R\mathfrak{K} = \dim_R\mathfrak{P}$. 而商空间 $G^C/(K^CP^-)$ 的实维数为

$$\dim_R G^C - \dim_R K^C - \dim_R P^- = 2\dim_R\mathfrak{P} - \dim_R\mathfrak{P} = \dim_R\mathfrak{P}.$$

这证明了关于 G_c 的过点 eK^CP^- 的轨道为商空间 $G^C/(K^CP^-)$ 的开子集. 由 G_c 紧可知轨道紧, 因此闭. 由 $G^C/(K^CP^-)$ 连通, 便证明了 G_c 的过点 eK^CP^- 的轨道为 $G^C/(K^CP^-)$. 因此证明了映射 $\xi: G_c/K \to G^C/(K^CP^-)$ 为局部一一双全纯映射, 且 G_c/K 为覆盖映射, 由 $G^C/(K^CP^-)$ 为单连通流形便证明了一一性. 定理证完.

由定理 5.4.3 可知，商空间 $G^C/(K^CP^-)$ 为与 Hermite 对称空间 G/K 对偶的紧 Hermite 对称空间．这里 G 为 G^C 中的子群，它由 $\exp\mathfrak{G}$ 生成．

定理 5.4.4(Borel 嵌入定理) 符号同上．记 G 为复李群 G^C 中由 $\exp\mathfrak{G}$ 生成的连通子群，则 G 为非紧连通李群，且非紧型 Hermite 对称空间 G/K 到商空间 $G^C/(K^CP^-)$ 内有双全纯同胚 η，它定义为

$$\eta(gK) = gK^CP^-, \ \forall\, g \in G,$$

且 $\eta(G/K)$ 为商空间 $G^C/(K^CP^-)$ 的开子集．

证 令 $G^C/(K^CP^-)$ 中点 eK^CP^- 在 G 作用下的轨道为 GK^CP^-，点 eK^CP^- 的迷向子群为 $G\cap K^CP^-$，它为李群 G 的闭子群，其李代数为 $\mathfrak{G}\cap(\mathfrak{K}^C+\mathfrak{P}_-)=\mathfrak{K}$，所以 $G\cap K^CP^-$ 的单位连通分支为紧连通李群 K．我们来证 $G\cap K^CP^-=K$．事实上，由定理 5.3.1，$G=K\exp\mathfrak{P}$．所以问题化为证 $K^CP^-\cap\exp\mathfrak{P}=\{e\}$．任取 $(\exp\mathfrak{P})\cap K^CP^-$ 中元素 $\exp X = kp$，其中 $k\in K^C$，$p\in P^-, X\in\mathfrak{P}$．作用复李群 G^C 的自同构 $\widehat{\theta}$，有 $(\exp X)^{-1}=kp^{-1}$，因此 $k=(\exp X)p^{-1}=(\exp X)^{-1}p$．这证明了 $p^2=(\exp X)^2$．今由 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{P}_-$ 为幂零方阵，$\mathrm{ad}\,X$ 为对称方阵，所以证明了 $p=e, X=0$．因此 $K^CP^-\cap\exp\mathfrak{P}=\{e\}$，即过点 eK^CP^- 的 G 轨道为 Hermite 对称空间 G/K．和定理 5.4.3 一样，便证明了映射 η 为到内的双全纯同胚，且 $\eta(G/K)$ 在商空间 $G^C/(K^CP^-)$ 中为开子集．证完．

由定理 5.4.3 及定理 5.4.4，我们将非紧型 Hermite 对称空间嵌入对偶的紧型 Hermite 空间中，即有

$$(\exp\mathfrak{P})K = G/K \xrightarrow{\eta} G^C/(K^CP^-) \xrightarrow{\xi} G/K.$$

对应定义为

$$gK \xrightarrow{\eta} gK^CP^-, \ \forall\, g\in G, \quad gK^CP^- \xrightarrow{\xi} gK, \ \forall\, g\in G.$$

注意到 $(\exp\mathfrak{P})\times K \ \to \ (\exp\mathfrak{P})K = G$ 为双解析同胚，所以 $\exp X, \forall\, X\in\mathfrak{P}$ 遍历商空间 G/K 中的所有不同左旁集的

代表元素. 下面来考虑 $P^+K^CP^- \subset G^C$. 由引理 5.4.2 可知, $P^+K^CP^-/(K^CP^-)$ 为商空间 $G^C/(K^CP^-)$ 的开子集. 且由 $P^+ = \exp\mathfrak{P}_+$ 及 $P^+ \times K^CP^- \to P^+K^CP^-$ 为双全纯同胚可知, 在商空间

$$P^+K^CP^-/(K^CP^-) = P^+(K^CP^-)$$

中, $\exp X, \forall X \in \mathfrak{P}_+$ 遍历所有不同左旁集的代表元素. 在下面我们希望证明

$$GK^CP^- \subset P^+KP^-.$$

这样, 我们就可以按上述对应, 给出

$$(\exp X)K \to (\exp X)K^CP^- = (\exp Y)K^CP^-, \quad \forall X \in \mathfrak{P},$$

其中 $Y \in \mathfrak{P}_+$, 且由 X 唯一决定, 这就是 Harish-Chandra 嵌入. 为了证明 $GK^CP^- \subset P^+KP^-$, 我们给出

引理 5.4.5 设 G 为连通实半单李群, $\mathfrak{G}$ 为 G 的李代数, $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 为实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 的 Cartan 分解. 设 $\mathfrak{G}$ 的最大紧 Cartan 子代数 $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{K}$. 记 $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}^C$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C = \mathfrak{H}^C + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{L}_\alpha.$$

记 B 为复半单李代数 $\mathfrak{L}$ 的 Killing 型, $h_\alpha \in \sqrt{-1}\mathfrak{H}$, 有 $\alpha(h) = B(h_\alpha, h)$, $\forall h \in \mathfrak{H}^C$. 对 Weyl 基 $\{e_\alpha \mid \forall \alpha \in \Delta\}$, 则有

$$\begin{aligned}&\exp t(e_\alpha + e_{-\alpha})\\ &= (\exp(\operatorname{th}(at))e_\alpha)(\exp(-a^{-2}\log(\operatorname{ch}(at)))h_\alpha)(\exp(\operatorname{th}(at))e_{-\alpha}),\end{aligned}$$

其中 $t \in \mathbb{R}$, $2a^2 = B(h_\alpha, h_\alpha) > 0$.

证 令 $e_\alpha, e_{-\alpha}, h_\alpha$ 构成三维复单李代数 $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ 的一组基, 它决定了复连通且单连通李群 G^C 的复子群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

今有表示

$$e_\alpha \to \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h_\alpha \to \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}, e_{-\alpha} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned}
&\exp t(e_\alpha+e_{-\alpha})\\
&=\exp(at)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(at)^k}{k!}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(at)^{2k}}{2k!}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(at)^{2k+1}}{(2k+1)!}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1&\mathrm{th}(at)\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\mathrm{ch}(at))^{-1}&0\\0&\mathrm{ch}(at)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\mathrm{th}(at)&1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

而

$$\exp(\mathrm{th}(at))e_\alpha=\begin{pmatrix}1&\mathrm{th}(at)\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\exp(\mathrm{th}(at))e_{-\alpha}=\begin{pmatrix}1&0\\\mathrm{th}(at)&1\end{pmatrix},$$

$$\exp(-a^{-2}\log(\mathrm{ch}(at)))h_\alpha=\begin{pmatrix}(\mathrm{ch}(at))^{-1}&0\\0&\mathrm{ch}(at)\end{pmatrix}.$$

证完.

定理 5.4.6 符号同上. Borel 嵌入 $\tau: G/K \to G^C/(K^CP^-)$ 实际上给出 $\tau: G/K \to (P^+K^CP^-)/(K^CP^-)$.

证 我们先证 $GK^CP^- \subset P^+K^CP^-$. 事实上, 由定理 5.3.1 的 (3), 有 $G=(\exp\mathfrak{P})K$, 所以问题化为证 $\exp\mathfrak{P}\subset P^+K^CP^-$. 今李代数 $\mathfrak{G}$ 的子空间 $\mathfrak{P}$ 的复化 $\mathfrak{P}^C=\mathfrak{P}_++\mathfrak{P}_-$, 其中 $\mathfrak{P}_\pm=\{X\mp\sqrt{-1}[C,X]\mid\forall X\in\mathfrak{P}\}$. 于是任取 $X\in\mathfrak{P}$, 则 $X=\frac{1}{2}(X_++X_-)$, 其中 $X_\pm=X\mp\sqrt{-1}[c,X]$. 而 $\mathfrak{G}=(\mathfrak{L},\sigma)$ 有 $\sigma(X_+)=\sigma(X-\sqrt{-1}[c,X])=X-\sqrt{-1}[c,X]=X_-$.

今 $\mathfrak{P}_+=\sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{P}}^+}\mathfrak{L}_\alpha$, 由引理 2.2.12, 存在正根 $\beta_i\in\Delta_{\mathfrak{P}}^+, 1\le i\le r$ 为强正交根系. 使得

$$\mathfrak{N}=\sum_{i=1}^{r}\mathbb{R}(e_{\beta_i}+e_{-\beta_i})$$

为 $\mathfrak{P}$ 中极大交换子代数. 令 $\sigma(\alpha)=-\alpha$, 所以 $\sigma(e_{\beta_i})=e_{-\beta_i}$, 而 $\sigma(e_{\beta_i}+e_{-\beta_i})=e_{\beta_i}+e_{-\beta_i}$, 则由引理 5.4.2, 有

$$\exp\sum\lambda_i(e_{\beta_i}+e_{-\beta_i})\in P^+K^CP^-.$$

由于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 任取, 所以 $\exp\mathfrak{N}=A$ 有 $A\subset P^+K^CP^-$. 因此 $KAK\subset P^+K^CP^-$. 由定理 5.3.4 便证明了 $G\subset P^+K^CP^-$.

所以为了证明定理, 我们先要证明 $G\cap(K^CP^-)=K$, 且要证明 $(GK^CP^-)/(P^+K^CP^-)$ 为开子集. 由 $G=K\exp\mathfrak{P}$, 问题化为证 $\exp\mathfrak{P}\cap K^CP^-=\{e\}$. 任取 $\exp X\in K^CP^-$, 其中 $X\in\mathfrak{P}$, 即 $\exp X=k\cdot\exp Y$, $k\in K^C, Y\in\mathfrak{P}_-$. 令

$$\widehat{\theta}(\exp X)=(\exp X)^{-1},\ \widehat{\theta}(k)=k,\ \widehat{\theta}(\exp Y)=(\exp Y)^{-1},$$

所以有 $\exp Y=(\exp X)k$. 因此 $\exp 2X=\exp 2Y$. 由 $\operatorname{ad}Y$ 幂零, $\operatorname{ad}X$ 实对称便证明了 $\operatorname{ad}X=0$. 因此 $X=0$, 所以 $\exp\mathfrak{P}\cap K^CP^-=\{e\}$. 另一方面, 有

$$\begin{aligned}&\dim_R(GK^+P^-)/(K^+P^-)=\dim_R\mathfrak{P}=2\dim_C\mathfrak{P}^+\\&=2\dim_C(P^+K^+P^-)/(K^+P^-)=\dim_R(P^+K^+P^-)/(K^+P^-).\end{aligned}$$

至此证明了 $(GK^+P^-)/(K^+P^-)$ 为 $(P^+K^CP^-)/(K^+P^-)$ 的开子集. 证完.

于是, 我们有

定理 5.4.7(Harish-Chandra 嵌入) 设 G 为实连通半单李群, 且无紧因子. 又适合定理 5.2.14 的条件, 即 G/K 为无紧因子的 Hermite 对称空间, 则存在到内的双全纯同胚 ξ, 有 $\xi: G/K\to\mathfrak{P}^+$ 定义如下:

$$G/K=(\exp\mathfrak{P})K\ \to\ (\exp\mathfrak{P})K^CP^-=(\exp\mathfrak{P}^+)K^CP^-\ \to\ \mathfrak{P}^+.$$

ξ 称为 **Harish-Chandra 嵌入**, 它有

$$\begin{aligned}D&=\xi(G/K)\\&=\{(\operatorname{Ad}K)\sum_{i=1}^{r}\lambda_ie_{\beta_i}\mid\lambda_i\in\mathbb{R},\ |\lambda_i|<1,\ 1\le i\le r\}\subset\mathfrak{P}^+,\end{aligned}$$

其中 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 为强正交根系，又 $\mathrm{Ad}(K)$ 为酉群 $\mathrm{U}(r)$ 的紧子群.

证 由定理 5.4.6, 有到内的双全纯同胚

$$\eta: G/K \to (P^+K^CP^-)/(K^CP^-).$$

由 $G=(\exp\mathfrak{P})K, \exp\mathfrak{P}\cap K=\{e\}, P^+\cap K^CP^-=\{e\}$, 所以有

$$G/K=(\exp\mathfrak{P})K \ \to\ (\exp\mathfrak{P})K^CP^-\subset(P^+K^CP^-)/(K^CP^-).$$

由 $\exp\mathfrak{P}\cap K^CP^-=\{e\}$, 可知它为到上的双全纯同胚. 由 $P^+\cap K^CP^-=\{e\}$, 可知

$$(\exp X)K^CP^-=(\exp Y)K^CP^-,$$

其中 $X\in\mathfrak{P}, Y\in\mathfrak{P}^+$, 且 $X\to Y$ 为 $\mathfrak{P}$ 到 $\mathfrak{P}^+$ 内的一一对应. 于是有 Hermite 对称空间 G/K 到复流形 $(P^+K^CP^-)/(K^CP^-)$ 内的双全纯同胚. 但是 $P^+\cap K^CP^-=\{e\}, P^+=\exp\mathfrak{P}_+$, 其中 exp 为双全纯同胚. 所以我们给出复流形 $(P^+K^CP^-)/(K^CP^-)$ 到 $P^+=\exp\mathfrak{P}_+$, 从而到 $\mathfrak{P}_+$ 上的一一对应，显然这是双全纯同胚. 至此给出了 Harish-Chandra 嵌入，记作 ξ.

下面来具体刻画 $\xi(G/K)$. 为此，我们先对最大紧 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$ 作复半单李代数 $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$ 的根子空间分解

$$\mathfrak{G}^C=\mathfrak{L}=\mathfrak{H}^C+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{L}_\alpha,$$
$$\mathfrak{K}^C=\mathfrak{H}^C+\sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{K}}}\mathfrak{L}_\alpha,\quad \mathfrak{P}^C=\sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{P}}}\mathfrak{L}_\alpha.$$

任取 $\alpha\in\Delta_{\mathfrak{P}}$, 取 $e_\alpha\in\mathfrak{L}_\alpha$ 使得

(1) $\tau(e_\alpha)=-e_{-\alpha}$;

(2) $[e_\alpha,e_{-\alpha}]=h_\alpha,\ [h_\alpha,e_{\pm\alpha}]=\pm B(h_\alpha,h_\alpha)e_{\pm\alpha}$.

于是 $e_\alpha+e_{-\alpha},\sqrt{-1}(e_\alpha-e_{-\alpha})\in\mathfrak{P}$, 又 $e_\alpha\in\mathfrak{P}_+, \forall\,\alpha\in\Delta_{\mathfrak{P}}^+$.

为了刻画 $\xi(G/K)$, 我们要考虑 $\exp X \in P^+K^CP^-$ 在子群 P^+ 上的投影, 记作 $\zeta(\exp X)$, 这里 $X \in \mathfrak{P}$. 今由定理 5.3.4, 有 $\mathfrak{P} = (\mathrm{Ad}\, K)\mathfrak{A}$, 所以 $X = (\mathrm{Ad}\, k)Y$, 其中 $k \in K$, $Y \in \mathfrak{A}$. 而 $\exp X = \exp(\mathrm{Ad}\, k)Y = (\mathrm{ad}\, k)(\exp Y)$. 另一方面, 李群 G 在 Hermite 对称空间 G/K 的作用为 $gK \to g_0gK$, 其中 $g_0 \in G$, 于是在商空间 $(GK^CP^-)/(K^CP^-)$ 上诱导为 $gK^CP^- \to g_0gK^CP^-$.

因此任取 $X \in \mathfrak{P}, k \in K$, 则

$$(\exp X)K^CP^- \to k(\exp X)K^CP^-$$

诱导的投影有 $\zeta(\exp X) \to \zeta(k \cdot \exp X)$. 记

$$\exp X = u_+k'u_-, \quad u_\pm \in P^\pm, \quad k' \in K^C,$$

则

$$k \cdot \exp X = ((\mathrm{ad}\, k)u_+)kk'u_-,$$

其中 $kk' \in K^C$. 而 $[\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_+] \subset \mathfrak{P}_+$, 又存在 $Z \in \mathfrak{P}_+, u_+ = \exp Z$, 所以 $(\mathrm{ad}\, k)u_+ = (\mathrm{ad}\, k)(\exp Z) = \exp(\mathrm{Ad}\, k)Z$. 而 $(\mathrm{Ad}\, K)\mathfrak{P}_+ \subset \mathfrak{P}_+$, 所以证明了当 $\zeta(\exp X) = u_+$ 时有 $\zeta(k\exp X) = (\mathrm{ad}\, k)u_+$, 即给出 $(GK^CP^-)/(K^CP^-)$ 上的全纯自同构

$$\zeta(\exp X) \to (\mathrm{ad}\, k)\zeta(\exp X) = \zeta((\mathrm{ad}\, k)\exp X).$$

即

$$\exp \zeta_*(X) \to (\mathrm{ad}\, k)\exp \zeta_*(X) = \exp(\mathrm{Ad}\, k)\zeta_*(X),$$

所以诱导了子空间 $\mathfrak{P}_+$ 到 $\mathfrak{P}_+$ 上的全纯自同构

$$\zeta_*(X) \to (\mathrm{Ad}\, k)\zeta_*(X), \quad \forall X \in \mathfrak{P}.$$

因此

$$\xi(G/K) = \zeta_*(\mathfrak{P}) = \zeta_*((\mathrm{Ad}\, K)\mathfrak{N}) = (\mathrm{Ad}\, K)\zeta_*(\mathfrak{N}).$$

所以问题化为求

$$\zeta_*(\mathfrak{A}) = \zeta_*(\{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i(e_{\beta_i} + e_{-\beta_i}) \mid \forall \lambda_i \in \mathbb{R}\}).$$

由引理 5.4.5, 所以

$$\zeta(\exp\lambda_i(e_{\beta_i}+e_{-\beta_i}))=\exp(\operatorname{th}(a_i\lambda_i))e_\alpha,$$

其中 $a_i=\sqrt{B(h_{\alpha_i},h_{\alpha_i})/2}$, $1\le i\le r$. 因此

$$\zeta_*(\mathfrak{A})=\{\sum_{i=1}^r(\operatorname{th}(a_i\lambda_i))e_{\beta_i}\mid\forall\ \lambda_1,\cdots,\lambda_r\in\mathbb{R}\}.$$

当 λ_i 遍历 $\mathbb{R}$ 时, $\operatorname{th}(a_i\lambda_i)$ 遍历 $(-1,1)$. 所以证明了

$$\zeta_*(\mathfrak{A})=\{\sum_{i=1}^r t_ie_{\beta_i}\mid\forall\ -1<t_1,\cdots,t_r<1\}.$$

上面给出了非紧型 Hermite 对称空间 G/K 可实现为交换复李代数 $\mathfrak{P}^+$ 的子集

$$D=\{(\operatorname{Ad}K)\sum_{i=1}^r\lambda_ie_{\beta_i}\mid-1<\lambda_1,\cdots,\lambda_r<1\}\subset\mathfrak{P}^+,$$

其中 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 为强正交系. 又复半单李代数 $\mathfrak{L}=\mathfrak{G}^C$ 的 Killing 型 $B(x,y)$ 在 $\mathfrak{P}$ 上正定. 所以 $B(x,\tau(y))$ 在 $\mathfrak{P}_+$ 上为正定 Hermite 双线性函数, 即为复线性空间 $\mathfrak{P}_+$ 上的内积. 又任取 $k\in K$, 则由

$$\begin{aligned}(x,\tau(y))&=B((\operatorname{Ad}k)x,(\operatorname{Ad}k)\tau(y))\\&=B((\operatorname{Ad}k)x,(\tau(\operatorname{Ad}k))(y)),\quad\forall\ x,y\in\mathfrak{P}^+,\end{aligned}$$

便证明了在 $\mathfrak{P}^+$ 中存在关于内积 $B(x,\tau(y))$ 的标准正交基, 使得线性变换 $\operatorname{Ad}k$ 的方阵表示同时为酉方阵, $\forall\ k\in K$. 定理证完.

最后, 我们给出一个例子来说明如何计算 Harish-Chandra 嵌入的.

考虑自然数 $1\le n\le m, G=\mathrm{SU}(n,m)$ 定义为

$$X\begin{pmatrix}I^{(n)}&0\\0&-I^{(m)}\end{pmatrix}\overline{X}'=\begin{pmatrix}I^{(n)}&0\\0&-I^{(m)}\end{pmatrix},$$

其中 $X \in \mathrm{SL}(n+m,\mathbb{C})$. 它的李代数 $Y \in \mathfrak{G} = \mathrm{su}(n,m)$ 定义为

$$Y\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\overline{Y}' = 0,$$

即

$$Y = \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B}' & D \end{pmatrix},\ A + \overline{A}' = D + \overline{D}' = 0,\ \mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, D = 0.$$

记 $Z \in \mathfrak{K}$, 则

$$Z = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},\ A + \overline{A}' = D + \overline{D}' = 0,\ \mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, D = 0,$$

记 $\widetilde{Z} \in \mathfrak{P}$, 则

$$\widetilde{Z} = \begin{pmatrix} 0 & B^{(n,m)} \\ \overline{B}' & 0 \end{pmatrix},$$

这时 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$ 为 Cartan 分解. 在 $\mathfrak{K}$ 中有 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}$, 记 $H \in \mathfrak{H}$, 则

$$H = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}\Lambda_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}\Lambda_2 \end{pmatrix},$$

其中 Λ_i 为实对角方阵, $\mathrm{tr}\,\Lambda_i = 0$, $\mathfrak{H}$ 是最大紧 Cartan 子代数. 又 $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C = \mathrm{sl}(n+m,\mathbb{C})$. 记 Δ 为关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}^C$ 的根系, 有

$$\mathfrak{K}^C = \mathfrak{H}^C + \sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{K}}} \mathfrak{L}_\alpha,\quad \mathfrak{P}^C = \sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{P}}} \mathfrak{L}_\alpha.$$

于是 $\Delta_{\mathfrak{K}} = \{f_{ij}, g_{ij},\ i \neq j\}$, 其中

$$f_{ij} = \begin{pmatrix} e_{ii} - e_{jj} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_{ii} - e_{jj} \end{pmatrix}.$$

$\Delta_{\mathfrak{P}} = \{h_{ij}, -h_{ij},\ i \le n, 1 \le j \le m\}$, 其中

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} e_{ii} & 0 \\ 0 & -e_{jj} \end{pmatrix},$$

e_{ij} 表示第 i 行、第 j 列元素为 1, 其余元素为零的矩阵. 于是

$$\mathfrak{L}_{f_{ij}} = < \begin{pmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} >, \quad 1 \le i, j \le n,\ i \ne j;$$

$$\mathfrak{L}_{g_{ij}} = < \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_{ij} \end{pmatrix} >, \quad 1 \le i, j \le m,\ i \ne j;$$

$$\mathfrak{L}_{h_{ij}} = < \begin{pmatrix} 0 & e_{ij} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} >, \quad 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m;$$

$$\mathfrak{L}_{-h_{ij}} = < \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{ij} & 0 \end{pmatrix} >, \quad 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m.$$

记 E_{ij} 为 $(n+m)\times(n+m)$ 方阵, 除第 i 行、第 j 列元素为 1 外, 其余元素为零. 则在 $\mathfrak{H}^C$ 中有基

$$E_{ii} - E_{n+m,n+m}, \quad 1 \le i \le n+m-1.$$

于是确定了正方向, 且在 $\Delta_{\mathfrak{P}}$ 中有强正交根系

$$h_{\xi_i} = h_{ii} = \begin{pmatrix} e_{ii} & 0 \\ 0 & -e_{ii} \end{pmatrix}, \quad 1 \le i \le n.$$

于是

$$\mathfrak{P}_+ = \sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{P}}^+} \mathfrak{L}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, B \text{ 为 } n\times m \text{ 复矩阵} \right\},$$

$$\mathfrak{P}_- = \sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{P}}^-} \mathfrak{L}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, C \text{ 为 } m\times n \text{ 复矩阵} \right\}.$$

而且

$$\mathfrak{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Lambda \\ 0 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \right\},$$

$$\mathfrak{H}_{0c} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}\Lambda_0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \Lambda_0 = \operatorname{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_m) \right\},$$

其中 λ_i, μ_j $\in \mathbb{R}$. 正方向按 $h_{\xi_1},\cdots,h_{\xi_m}$, $g_{12},\cdots,g_{m-1,m}$ 来定.

$$P^+=\exp\mathfrak{P}_+=\left\{\begin{pmatrix} I & B\\ 0 & I\end{pmatrix}\Bigg| B \text{ 为 } n\times m \text{ 复矩阵}\right\},$$

$$P^-=\exp\mathfrak{P}_-=\left\{\begin{pmatrix} I & 0\\ C & I\end{pmatrix}\Bigg| C \text{ 为 } n\times m \text{ 复矩阵}\right\},$$

$$K=\left\{\begin{pmatrix} U & 0\\ 0 & V\end{pmatrix}\in \mathrm{SU}\,(n+m)\right\},$$

$$A=\exp\mathfrak{A}=\left\{\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,(\Lambda) & \begin{pmatrix}\mathrm{sh}\,(\Lambda) & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\mathrm{sh}\,(\Lambda)\\ 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,(\Lambda) & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\end{pmatrix}\right\},$$

其中 $\Lambda=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, $\lambda_i\in\mathbb{R}$. 令 $P^+K^CP^-$ 中元素 X 为

$$\begin{pmatrix} I & B\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0\\ 0 & V\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0\\ C & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U+BVC & BV\\ VC & V\end{pmatrix}.$$

现在计算 G 中元素在 P_+ 的投影. 令 G 中元素 $\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ 有

$$\begin{pmatrix} \overline{A}' & \overline{C}'\\ \overline{B}' & \overline{D}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix},$$

即

$$\overline{A}'B=\overline{C}'D,\quad \overline{A}'A-\overline{C}'C=I,\quad \overline{D}'D-\overline{B}'B=I.$$

令 $Z_0=BD^{-1}$, 于是有 $B=Z_0D$, 代入有 $\overline{Z_0}'=CA^{-1}$, 而且

$$\overline{A}'(I-Z_0\overline{Z_0}')A=I,\quad \overline{D}'(I-Z_0\overline{Z_0}')D=I.$$

于是

$$I-Z_0\overline{Z_0}'>0,\quad I-\overline{Z_0}'Z_0>0.$$

又记

$$A_1=(I-Z_0\overline{Z_0}')^{\frac{1}{2}},\quad D_1=(I-\overline{Z_0}'Z_0)^{\frac{1}{2}},$$

则有 $A_1^{-1}A=U\in \mathrm{U}(n)$, $D_1^{-1}D=V\in \mathrm{U}(m)$, 即

$$A=A_1U=(I-Z_0\overline{Z_0}')^{\frac{1}{2}}U,\quad D=(I-\overline{Z_0}'Z_0)^{\frac{1}{2}}V.$$

即 G 中的元素 g 可表示为: 对任意 $n\times m$ 复矩阵 Z_0, 有 $I-Z_0\overline{Z_0}'>0$, 且有酉方阵 U,V, 有

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1U & Z_0D_1V \\ \overline{Z_0}'A_1U & D_1V \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & Z_0D_1 \\ \overline{Z_0}'A_1 & D_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是对 $P^+K^CP^-$ 中元素 $\begin{pmatrix} U_1+B_1V_1C_1 & B_1V_1 \\ V_1C_1 & V_1 \end{pmatrix}$, 经矩阵 X 右乘为

$$\begin{pmatrix} A_1 & Z_0D_1 \\ \overline{Z_0}'A_1 & D_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1+B_1V_1C_1 & B_1V_1 \\ V_1C_1 & V_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_2+B_2V_2C_2 & B_2V_2 \\ V_2C_2 & V_2 \end{pmatrix},$$

则

$$V_2=D_1VV_1+\overline{Z_0}'A_1UB_1V_1,$$

于是

$$B_2=(A_1UB_1V_1+Z_0D_1VV_1)(D_1VV_1+\overline{Z_0}'A_1UB_1V_1)^{-1}.$$

乘积后的矩阵在 P^+ 中的投影为 $\begin{pmatrix} I & (AB_1+B)(CB_1+D)^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$. 注意到 $P^+=\exp\mathfrak{P}_+$, 其中对应为

$$\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix}=\exp\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以取 $B_1 = Z, B_2 = W$, 则李群 G 中元素 g 在 $P^+K^{\mathbb{C}}P^-$ 上的作用诱导了 $\mathfrak{P}_+$ 到 $\mathfrak{P}_+$ 的映射为

$$W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}.$$

下面来考虑 Harish-Chandra 嵌入的像 D. 今 $\exp\mathfrak{A}$ 中元素在 P^+ 上的投影为

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\Lambda) & \begin{pmatrix}\operatorname{sh}(\Lambda) & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\operatorname{sh}(\Lambda)\\ 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\operatorname{ch}(\Lambda) & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\end{pmatrix}_+\\
= &\begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix}\operatorname{sh}(\Lambda) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\operatorname{ch}(\Lambda) & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}^{-1}\\ 0 & I\end{pmatrix}\\
= &\begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix}\operatorname{th}(\Lambda) & 0\end{pmatrix}\\ 0 & I\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

所以在 $\mathfrak{P}_+$ 上的投影为 $(\operatorname{th}(\Lambda)\ 0)$. 又 $\operatorname{Ad}K$ 的作用为

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{Ad}k)\begin{pmatrix} 0 & (\operatorname{th}(\Lambda)\ 0)\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
= &\left(\exp\operatorname{ad}\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 & (\operatorname{th}(\Lambda)\ 0)\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
= &\begin{pmatrix} 0 & U(\operatorname{th}(\Lambda)\ 0)V\\ 0 & 0\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

其中 $U \in \mathrm{U}(n), V \in \mathrm{U}(m)$. 令

$$\operatorname{th}(\Lambda) = \operatorname{diag}(t_1, \cdots, t_n)$$

则由 $t_i = \operatorname{th}\lambda_i \in (-1, 1)$ 可知

$$D = \left\{Z | Z = U\left(\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n\end{pmatrix} 0\right)V,\ -1 < t_1, \cdots, t_n < 1\right\}.$$

熟知任给 $n\times m$ 复矩阵 Z, 它的奇异值在 $(-1,1)$ 间，当且仅当 $I-Z\overline{Z}'>0$. 因此 Harish-Chandra 嵌入的像为

$$\{\, Z, n\times m \text{ 复矩阵} \mid I-Z\overline{Z}'>0\}.$$

而全纯自同构群的单位连通分支为

$$W=(AZ+B)(CZ+D)^{-1},$$

其中

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{A}' & \overline{C}' \\ \overline{B}' & \overline{D}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

由此可知， Harish-Chandra 嵌入的像 D 中的实参数 $t_1,\cdots,t_n$ 为复矩阵 Z 的奇异值，而边界为

$$\{Z,\ n\times m \text{ 复矩阵} \mid \operatorname{rank}(I-Z\overline{Z}')<n\},$$

Silov 边界为

$$\begin{aligned}&\{Z,\ n\times m \text{ 复矩阵} \mid \operatorname{rank}(I-Z\overline{Z}')=0\}\\ =&\{\, Z, n\times m \text{ 复矩阵} \mid Z\overline{Z}'=I\,\}.\end{aligned}$$

§ 5.5 Harish-Chandra 嵌入的性质

设 G 为非紧型实连通且单连通李群， $\mathfrak{G}$ 为李群 G 的李代数，它有 Cartan 分解 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{P}$. 设 $\dim \mathrm{C}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})=1$, 且存在元素 $c\in \mathrm{C}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$, 使得

$$\mathrm{C}_{\mathfrak{G}}(c)=\mathfrak{K},\quad (\operatorname{ad}_{\mathfrak{P}}c)^2=-\mathrm{id}.$$

记 G 中子集

$$K=\mathrm{N}_G(\exp c),$$

则 K 为紧子群，且 K 的李代数为 $\mathfrak{K}$. 记 $\widetilde{K}$ 为李群 G 中包含紧李子群 K 的极大紧子群，则有

$$\widetilde{K}^0 \subset K \subset \widetilde{K},$$

其中 $\widetilde{K}^0 = K^0$ 分别为紧李群 $\widetilde{K}$ 及 K 的单位连通分量.

由 $K = N_G(\exp c)$ 可知，李群 G 的中心 $\mathrm{C}(G) \subset K$. 由李代数 $\mathfrak{G}$ 单可知 $\mathrm{C}(G)$ 为紧离散子群，即由有限多个元素构成，且商空间

$$G/K = (G/(\mathrm{C}(G)))/(K/(\mathrm{C}(G)))$$

为 Hermite 对称空间. 它是非紧型，复结构为 $I = \mathrm{ad}_{\mathfrak{P}} c$.

今李代数 $\mathfrak{G}$ 的最大紧 Cartan 子代数 $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{K}$. 复单李代数 $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C$ 有根子空间分解

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H}^C + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{L}_\alpha, \quad \mathfrak{K}^C = \mathfrak{H}^C + \sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{K}}} \mathfrak{L}_\alpha, \quad \mathfrak{P}^C = \sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{P}}} \mathfrak{L}_\alpha.$$

在 $\Delta_{\mathfrak{P}}$ 中引进正方向，使得 $-\sqrt{-1}\alpha(c) > 0$ 当且仅当 $\alpha > 0$. 再任取 $\Delta_{\mathfrak{K}}$ 中的极大线性无关部分组，从而在 Δ 中有正根系. 于是在 $\Delta_{\mathfrak{P}}^+$ 中有 Harish-Chandra 强正交根系 $0 < \beta_1 < \cdots < \beta_r$.

由 $\mathfrak{G} = (\mathfrak{L}, \sigma), \mathfrak{G}_c = \mathfrak{K} + \sqrt{-1}\mathfrak{P} = (\mathfrak{L}, \tau)$, $\theta = \sigma\tau = \tau\sigma$ 为 Cartan 对合，于是复单李代数有交换子代数

$$\mathfrak{P}_\pm = \{X \mp \sqrt{-1}[c, X] \mid \forall\, X \in \mathfrak{P}\},$$

而 $\exp \mathfrak{P}_\pm = P^\pm$ 为连通且单连通交换李群. 另一方面， $\tau|_{\mathfrak{K}} = \mathrm{id}$, $\tau|_{\mathfrak{P}} = -\mathrm{id}$. 任取 $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{P}}^+$, 则 $e_\alpha \in \mathfrak{L}_\alpha$ 有

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha, \quad B(h_\alpha, h) = \alpha(h), \ \forall\, h \in \mathfrak{H}^C,$$

所以 $B(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$. 再

$$\tau(e_\alpha) = -\overline{e_\alpha}, \quad \sigma(e_\alpha) = \overline{e_\alpha},$$

所以 $\mathrm{Re}\, e_\alpha = \frac{1}{2}(e_\alpha + \overline{e_\alpha}) = \frac{1}{2}(e_\alpha + \sigma(e_\alpha))$. 再 $\overline{e_\alpha} = e_{-\alpha}$, 即 $\mathrm{Re}\, e_\alpha = \frac{1}{2}(e_\alpha + e_{-\alpha})$. 因此实子空间 $\mathfrak{P}$ 有极大交换子代数

$$\mathfrak{A} = \{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i(e_{\beta_i} + e_{-\beta_i}) \mid \lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{R}\}.$$

于是在实单李代数 $\mathfrak{G}$ 中有最大向量 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_{0c} + \mathfrak{A}$, 其中 $\mathfrak{H}_{0c} \subset \mathfrak{K}, \mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. 复单李代数 $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C$ 关于 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0^C$ 又有根子空间分解

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C = \mathfrak{H}_0^C + \sum_{\alpha \in \Delta'} \mathfrak{G}_\alpha.$$

而 Δ' 实线性生成实线性空间 $\sqrt{-1}\mathfrak{H}_{0c} + \mathfrak{A}$. 在 $\mathfrak{A}$ 中取基 $e_{\beta_i} + e_{-\beta_i}, 1 \le i \le r$, 再在 $\sqrt{-1}\mathfrak{H}_{0c}$ 中取基, 从而在 $\sqrt{-1}\mathfrak{H}_{0c} + \mathfrak{A}$ 中引进正方向.

由于 $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{H}_0$, 所以复单李代数 $\mathfrak{L}$ 关于 $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{A})$ 有根子空间分解

$$\mathfrak{L} = \mathrm{C}_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{A}) + \sum_{\xi \in \Delta_r} \mathfrak{G}'_\xi.$$

其中 Δ_r 称为**限制根系**. 记根系 $(\Delta')^+$ 中子集

$$P_+ = \{\beta \in (\Delta')^+,\ \theta^*(\beta) \neq \beta\}, \quad P_- = \{\beta \in (\Delta')^+,\ \theta^*(\beta) = \beta\},$$

于是有 $P_+ \cap P_- = \emptyset, P_+ \cup P_- = (\Delta')^+$. 且有

引理 5.5.1 符号同上, 则

$$\mathrm{C}_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{H}_0^C + \sum_{\alpha \in P_-} \mathfrak{G}_\alpha + \sum_{\alpha \in -P_-} \mathfrak{G}_\alpha,$$

$$\mathfrak{G}'_\xi = \sum_{\beta \in P_+ \cup (-P_+), \beta|_{\mathfrak{A}} = \xi} \mathfrak{G}_\beta.$$

证 今记 $h'_\beta \in \sqrt{-1}\mathfrak{H}_{0c} + \mathfrak{A}$, 定义为 $B(h'_\beta, x) = \beta(x), \forall\, x \in \sqrt{-1}\mathfrak{H}_{0c} + \mathfrak{A}$. 于是 $h'_\beta = \sqrt{-1}X + Y$, 其中 $X \in \mathfrak{H}_{0c}, Y \in \mathfrak{A}$. 而

$\theta^*(\beta)=\beta$ 等价于 $\theta(h'_\beta)=\sqrt{-1}X-Y=h'_\beta=\sqrt{-1}X+Y$, 即有 $Y=0$, 所以 $\beta\in P_-\cup(-P_-)$ 等价于 $h'_\beta\in\sqrt{-1}\mathfrak{H}_{0c}$. 由于 $B(\mathfrak{K},\mathfrak{P})=0$, 所以 $\beta|_{\mathfrak{A}}=0$ 当且仅当 $\beta(\mathfrak{A})=0$, 当且仅当 $B(h'_\beta,\mathfrak{A})=0$, 当且仅当 $h'_\beta\in\sqrt{-1}\mathfrak{H}_{0c}$, 即 $\theta(\beta)=\beta$, 或 $\beta\in P_-\cup(-P_-)$. 至此证明了

$$\mathrm{C}_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{A})=\mathfrak{H}_0^C+\sum_{\alpha\in P_-}\mathfrak{L}_\alpha+\sum_{-\alpha\in P_-}\mathfrak{L}_\alpha.$$

再 $\sum\limits_{\xi\in\Delta_r}\mathfrak{G}'_\xi=\sum\limits_{\alpha\in P_+}\mathfrak{L}_\alpha+\sum\limits_{\alpha\in-P_+}\mathfrak{L}_\alpha$. 而 $x\in\mathfrak{G}'_\xi$ 当且仅当 $[X,x]=\xi(X)x$, $\forall\, X\in\mathfrak{A}$, 即 $\xi\in\mathfrak{A}^*$ 为实线性空间 $\mathfrak{A}$ 的对偶空间. 今 $e_\alpha\in\mathfrak{L}_\alpha$, 其中 $\alpha\in\pm P_+$, 于是 $\theta(\alpha)\neq\alpha$, 即 $\alpha=\sqrt{-1}\alpha'+\alpha''$, 其中 $\alpha'\in(\sqrt{-1}\mathfrak{H}_{0c})^*,\alpha''\in\mathfrak{A}^*$, 有 $\alpha''\neq0$. 今任取 $X\in\mathfrak{A}$, 则 $\alpha(X)=\sqrt{-1}\alpha'(X)+\alpha''(X)=\alpha''(X)$, 所以证明了

$$\mathfrak{G}'_\xi=\sum_{\beta\in P_+\cup(-P_+),\beta|_{\mathfrak{A}}=\xi}\mathfrak{G}_\beta.$$

引理证完.

关于限制根系有

引理 5.5.2 符号同上. 限制根系 Δ_r 为

(1) C_r 型:

$$\Delta_r=\{\pm\xi_j,\ 1\leq j\leq r,\ \pm\xi_j\pm\xi_k,\ 1\leq j<k\leq r\},$$

(2) BC_r 型:

$$\Delta_r=\{\pm\xi_j,\ \pm2\xi_j,\ 1\leq j\leq r,\ \pm\xi_j\pm\xi_k,\ 1\leq j<k\leq r\},$$

且

$$\dim\mathfrak{G}'_{\xi_j}=2b,\quad \dim\mathfrak{G}'_{2\xi_j}=1,\quad 1\leq j\leq r,$$
$$\dim\mathfrak{G}'_{\pm\xi_i\pm\xi_j}=a,\quad 1\leq i<j\leq r,$$

其中 a 和 b 为常数.

令 Harish-Chandra 嵌入 ζ 有 $\zeta(G/K)=D$, 其中 $D\subset\mathfrak{P}_+(=\mathbb{C}^n, n=\dim_C\mathfrak{P}_+)$, 定义为

$$D=\{(\mathrm{Ad}\,K)\sum_{i=1}^{r}t_ie_{\beta_i}\mid -1<t_1<\cdots<t_r<1\},$$

其中 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 为根系 Δ 中的强正交根系.

引理 5.5.3 记 Hermite 对称空间 G/K 的复结构为 $I=\mathrm{ad}_{\mathfrak{P}}c$, 则

$$I_0=\zeta_*^{-1}\circ I\circ\zeta_*$$

为实 Euclid 空间 $\mathfrak{P}_+$ 的通常复结构, 即 $\mathfrak{P}_+$ 为复 Euclid 空间.

证 今任取 $k\in K$, 则 $\mathrm{Ad}\,k$ 为 Hermite 对称空间 G/K 的全纯自同构, 即有 $I\circ\mathrm{Ad}\,k=\mathrm{Ad}\,k\circ I$. 于是有 $\zeta_*\circ I_0\circ\zeta_*^{-1}\circ\mathrm{Ad}\,k=\mathrm{Ad}\,k\circ\zeta_*\circ I_0\circ\zeta_*^{-1}$. 因此 $I_0\circ(\zeta_*^{-1}\circ\mathrm{Ad}\,k\circ\zeta_*)=(\zeta_*^{-1}\circ\mathrm{Ad}\,k\circ\zeta_*)\circ I_0$, 而 $\zeta_*^{-1}\circ\mathrm{Ad}\,k\circ\zeta_*$ 作为 $\mathfrak{P}_+$ 上的线性变换, 仍记为 $\mathrm{Ad}\,k$, 则 $\mathrm{Ad}\,k\circ\zeta_*=\zeta_*\circ\mathrm{Ad}\,k$. 于是有 $I_0\circ\mathrm{Ad}\,k=\mathrm{Ad}\,k\circ I_0$. 今 $(\mathrm{ad},\mathfrak{P})$ 为紧李代数 $\mathfrak{K}$ 的实不可约表示, 所以 $(\mathrm{ad},\mathfrak{P}_+)$ 为紧李代数 $\mathfrak{K}$ 的复不可约表示, 因此 $(\mathrm{Ad},\mathfrak{P}_+)$ 为紧李群 K^0 的复不可约表示. 由 Schur 引理, 可知线性变换 I_0 为纯量变换. 但是 $I_0^2=-\mathrm{id}$, 即 $I_0=\pm\sqrt{-1}(\mathrm{id})$, 我们取 $I_0=\sqrt{-1}\mathrm{id}$. 这证明了实线性空间 $\mathfrak{P}_+$ 的复结构为通常复 Euclid 空间的复结构. 引理证完.

定理 5.5.4(Hermann) Harish-Chandra 嵌入可表示为

$$\zeta(G/K)=D=\{X\in\mathfrak{P}^+\mid \|\mathrm{ad}\,\mathrm{Re}\,X\|<1\}.$$

证 今 $\mathfrak{P}^C$ 有内积

$$(x,y)=-B(x,\tau(y)),$$

于是任取 $X\in\mathfrak{P}^C$, 有 $\|X\|^2=(X,X)$. 而对于 $\mathfrak{P}^C$ 上的复线性变换 $\mathcal{A}$, 有

$$\|\mathcal{A}\|=\sup_{X\in\mathfrak{P}^C,\|X\|\le1}\|\mathcal{A}(X)\|.$$

注意到 $\tau(\mathfrak{P}_+)=\mathfrak{P}_-$, 又

$$\|\tau(X)\|^2=-B(\tau(X),\tau^2(X))=-B(X,\tau(X))=\|X\|^2.$$

因此由

$$D=\{(\mathrm{Ad}\,K)\sum_{i=1}^{r}t_ie_{\beta_i}\mid -1<t_1,\cdots,t_r<1\}$$

可知，我们要证明

$$\|\mathrm{ad}\,\mathrm{Re}\,(\mathrm{Ad}\,K)\sum_{i=1}^{r}t_ie_{\beta_i}\|=\|\mathrm{ad}\,\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{r}t_ie_{\beta_i}\|<1$$

当且仅当 $-1<t_1,\cdots,t_r<1$.

首先，任取 $X,Y\in\mathfrak{P}^C,k\in K$, 有

$$\begin{aligned}&\|(\mathrm{ad}\,(\mathrm{Ad}\,k)X)(Y)\|^2=-B((\mathrm{ad}\,(\mathrm{Ad}\,k)X)Y,\tau((\mathrm{ad}\,(\mathrm{Ad}\,k))X)Y)\\&=-B([(\mathrm{Ad}\,k)X,Y],\tau[(\mathrm{Ad}\,k)X,Y])\\&=-B((\mathrm{Ad}\,k)[X,(\mathrm{Ad}\,k^{-1})Y],(\mathrm{Ad}\,k)\tau([X,(\mathrm{Ad}\,k^{-1})Y]))\\&=\|(\mathrm{ad}\,X)((\mathrm{Ad}\,k^{-1})Y)\|^2,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\|\mathrm{ad}\,(\mathrm{Ad}\,k)X\|&=\mathop{\mathrm{Sup}}_{Y\in P^+,\|Y\|\le1}\|(\mathrm{ad}\,(\mathrm{Ad}\,k)X(Y)\|\\&=\mathop{\mathrm{Sup}}_{Y\in P^+,\|Y\|\le1}\|(\mathrm{ad}\,X)((\mathrm{Ad}\,k^{-1})(Y))\|\\&=\mathop{\mathrm{Sup}}_{Y\in P^+,\|Y\|\le1}\|(\mathrm{ad}\,X)(Y)\|=\|\mathrm{ad}\,X\|.\end{aligned}$$

这证明了

$$\|\mathrm{ad}\,(\mathrm{Ad}\,k)X\|=\|\mathrm{ad}\,X\|,\quad\forall\,X\in\mathfrak{P}^+.$$

另一方面，有

$$\|\mathrm{ad}\,\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{r}t_ie_{\beta_i}\|=\mathop{\mathrm{Sup}}_{Y\in\mathfrak{P}^+,\|Y\|\le1}\|(\mathrm{ad}\,\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{r}t_ie_{\beta_i})Y\|.$$

而 $\mathfrak{P}_+ \subset \mathfrak{G}'_0 + \sum\limits_{\xi\in\Delta_+^+} \mathfrak{G}_\xi$, 令 $Y \in \mathfrak{P}_+$, 所以 $Y = Y_0 + \sum\limits_{\xi\in\Delta_+^+} Y_\xi$, 其中 $Y_0 \in \mathfrak{G}'_0$, $Y_\xi \in \mathfrak{G}'_\xi$, 又 $h'_{\xi_i} = \mathrm{Re}\, e_{\beta_i} = \dfrac{1}{2}(e_{\beta_i} + e_{-\beta_i}) \in \mathfrak{A}$. 所以

$$(\mathrm{ad}\,\mathrm{Re}\sum_{i=1}^r t_i e_{\beta_i})Y = \sum_{i=1}^r t_i \left[h'_{\xi_i}, Y_0 + \sum_{\xi\in\Delta_+^+} Y_\xi\right] = \sum_{i=1}^r \sum_{\xi\in\Delta_+^+} t_i \xi(h'_{\xi_i}) Y_\xi.$$

而

$$\frac{\|(\mathrm{ad}\,\mathrm{Re}\sum\limits_{i=1}^r t_i e_{\beta_i})Y\|^2}{\|Y\|^2} = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^r t_i t_j \sum\limits_{\xi,\xi'\in\Delta_+^+} \xi(h'_{\xi_i})\xi'(h'_{\xi_j})(Y_\xi, Y_{\xi'})}{\|Y_0\|^2 + \sum\limits_{\xi\in\Delta_+^+}\|Y_\xi\|^2}.$$

由于当 $\xi \neq \xi'$ 时有 $(Y_\xi, Y_{\xi'}) = 0$, 所以

$$\frac{\|\mathrm{ad}\,(\mathrm{Re}\sum\limits_{i=1}^r t_i e_{\beta_i})Y\|^2}{\|Y\|^2} = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^r t_i t_j \sum\limits_{\xi\in\Delta_+^+} \xi(h'_{\xi_i})\xi(h'_{\xi_j})\|Y_\xi\|^2}{\|Y_0\|^2 + \sum\limits_{\xi}\|Y_\xi\|^2}.$$

这证明了

$$\|\mathrm{ad}\,\mathrm{Re}\sum_{i=1}^r t_i e_{\beta_i}\| \leq \max_{\xi\in\Delta_+^+}\left|\sum_{i=1}^n t_i \xi(h'_{\xi_i})\right|.$$

已知

$$\xi_i(h'_{\xi_j}) = \delta_{ij} B(h'_{\xi_i}, h'_{\xi_i}) = \delta_{ij} B(\frac{1}{2}(e_{\beta_i} + e_{-\beta_i}), \frac{1}{2}(e_{\beta_i} + e_{-\beta_i})) = \frac{1}{2}\delta_{ij},$$

而 ξ 取 $2\xi_k, \xi_p \pm \xi_q, \xi_k$ 之一，所以

$$\max_{\xi\in\Delta_+^+}\left|\sum_{i=1}^n t_i \xi(h'_{\xi_i})\right| < 1,$$

当且仅当 $-1 < t_1, \cdots, t_r < 1$. 引理证完.

定理 5.5.5 Harish-Chandra 嵌入 D 包含原点，且是以原点为中心的凸圆型域.

证 取 $t_1 = \cdots = t_r = 0$, 则 $0 = (\mathrm{Ad}\, K)0$, 即 $\mathfrak{P}^+$ 中的域 D 包含原点. 由定理 5.5.4 立即可证域 D 为凸域. 余下证它关于原点为圆型域. 事实上，由于有 $c \in C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K})$, 使得 $(\mathrm{Ad}\,\mathfrak{p}c)^2 = -\mathrm{id}$. 考虑 $\exp t \mathrm{ad}\, c \in \mathrm{Ad}\, K, \forall\, t \in \mathbb{R}$, 则

$$\begin{aligned}
\exp t \mathrm{ad}\,\mathfrak{p}c &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(\mathrm{ad}\,\mathfrak{p}c)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}(-1)^k}{(2k)!}\mathrm{id} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)!}\mathrm{ad}\,\mathfrak{p}c \\
&= (\cos t)\mathrm{id} + (\sin t)\mathrm{ad}\,\mathfrak{p}c.
\end{aligned}$$

令 $\mathrm{ad}\, c$ 为 Hermite 对称空间 G/K 上的复结构. 已知它诱导了 Harish-Chandra 嵌入 (即域 D) 上的变换为 $\sqrt{-1}\mathrm{id}$. 所以 $\exp t\mathrm{ad}\,\mathfrak{p}c$ 诱导了域 D 上的线性变换为

$$(\cos t)\mathrm{id} + (\sin t)(\sqrt{-1}\mathrm{id}) = e^{\sqrt{-1}t}(\mathrm{id}).$$

即域 D 上有双全纯自同构 $z \to e^{\sqrt{-1}\theta}z, 0 \le \theta < 2\pi$. 这证明了域 D 是以原点为中心的圆型域. 证完.

显然，$\mathrm{Ad}\, K$ 在域 D 上为酉线性变换. 这证明了原点的迷向子群由一批酉变换构成.

下面来计算域 D 上的积分.

引理 5.5.6 符号同上. 设最大向量 Cartan 子代数 $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_{0c} + \mathfrak{A}$, 其中 $\mathfrak{H}_{0c} \subset \mathfrak{K}$. 记 $\mathfrak{A}'$ 为 $\mathfrak{A}$ 中所有正则元素构成的开子集，记

$$M = \{k \in K \mid (\mathrm{Ad}\, k)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\}.$$

则 M 为紧子群 K 的紧子群，又映射 φ:

$$(K/M) \times \mathfrak{A}' \to (\mathrm{Ad}\, K)\mathfrak{A}' = \mathfrak{P}'$$

为到上的双解析同胚，其中 $\mathfrak{P}'$ 为 $\mathfrak{P}$ 中所有正则元素构成的开子集.

证 先证映射 φ 为一一映射. 今若 $k_1, k_2 \in K, X_1, X_2 \in \mathfrak{A}$, 使得 $(\mathrm{Ad}\, k_1)X_1 = (\mathrm{Ad}\, k_2)X_2$, 于是对 $k = k_2^{-1}k_1 \in K$, 有 $(\mathrm{Ad}\, k)X_1 = X_2$. 因此对中心化子 $\mathrm{C}(X_i), i = 1, 2$, 有

$$(\mathrm{Ad}\, k)\mathrm{C}(X_1) = \mathrm{C}((\mathrm{Ad}\, k)X_1) = \mathrm{C}(X_2).$$

由于 $(\mathrm{Ad}\, k)\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}, (\mathrm{Ad}\, k)\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}$, 所以有 $(\mathrm{Ad}\, k)\mathrm{C}_{\mathfrak{P}}(X_1) = \mathrm{C}_{\mathfrak{P}}(X_2)$.

考虑由 $e_{\beta_i} + e_{-\beta_i}, \sqrt{-1}(e_{\beta_i} - e_{-\beta_i}), 1 \leq i \leq r$ 线性生成的子空间 $\mathfrak{T}$, 我们来证子空间 $\mathrm{C}_{\mathfrak{P}}(X_1)$ 包含在 $\mathfrak{T}$ 中. 设若不然，则存在 $Y = \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{P}}^+, \alpha \neq \beta_1, \cdots, \beta_r} (c_\alpha e_\alpha + \bar{c}_\alpha \bar{e}_\alpha)$, 其中 $c_\alpha \in \mathbb{C}$. 今 $\bar{e}_\alpha = e_{-\alpha}$, 由 $X_1 = \sum \lambda_i (e_{\beta_i} + e_{-\beta_i})$. 取最大的 i, 使得 $\lambda_i \neq 0$, 再取最高的 β, 使得 $\beta \in \Delta_{\mathfrak{P}}^+, \beta \neq \beta_1, \cdots, \beta_r, c_\beta \neq 0$. 由强正交根系的定义可知 $\beta_i + \beta \in \Delta$, 于是由 $[X, Y] = 0$ 可推出 $\lambda_i c_\beta = 0$. 这导出矛盾. 至此证明了断言.

但是取 X_1 为正则元素，则显然 $\mathrm{C}_{\mathfrak{P}}(X_1) = \mathfrak{A}$.

今 $(\mathrm{Ad}\, k)\mathfrak{P}_+ = \mathfrak{P}_+$, 便证明了 $(\mathrm{Ad}\, k)^* \Delta_{\mathfrak{P}}^+ = \Delta_{\mathfrak{P}}^+$. 另一方面, 由 $(\mathrm{Ad}\, k)\mathrm{C}_{\mathfrak{P}}(X_1) = \mathrm{C}_{\mathfrak{P}}(X_2)$ 可知 $(\mathrm{Ad}\, k)^*$ 给出强正交根系 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 的一个排列. 于是 $(\mathrm{Ad}\, k)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, 即 $k \in M$. 至此证明了若 $k \notin M$, 则 $X_1 = X_2$. 所以证明了一一性.

为了证映射 $(K/M) \times \mathfrak{A}' \to (\mathrm{Ad}\, K)\mathfrak{A}'$ 为双解析同胚，只要计算 Jacobian 就够了. 在 $(K/M) \times \mathfrak{A}'$ 中任取一元素 (kM, X_0), 其中 $k \in K, X_0 \in \mathfrak{A}'$. 有

$$((k \cdot \exp tY)M, X_0 + sZ), \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R}, Y \in \mathfrak{K}, Z \in \mathfrak{A},$$

其中 $Y \notin \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ 为紧李群 M 的李代数，而且

$$\begin{aligned} ((k \cdot \exp tY)M, X_0) &\to (\mathrm{Ad}\,(k \cdot \exp tY))X_0, \\ (kM, X_0 + sZ) &\to (\mathrm{Ad}\, k)(X_0 + sZ). \end{aligned}$$

今

$$(\mathrm{Ad}\,(k \cdot \exp tY))X_0 = (\mathrm{Ad}\, k)(\exp t \mathrm{ad}\, Y)X_0,$$

微分得 $(\mathrm{Ad}\,k)(\mathrm{ad}\,Y)X_0$. 又 $(\mathrm{Ad}\,k)(X_0+sZ)$ 微分得 $(\mathrm{Ad}\,k)Z$, 所以 Jacobian 为

$$(\mathrm{Ad}\,k)([Y,X_0]+Z), \quad \forall\, Y\in\mathfrak{K}, Z\in\mathfrak{A}.$$

今由 X_0 为正则元素，所以有 $\{[Y,X_0]+\mathfrak{A} \mid \forall\, Y\in\mathfrak{K}, Y\notin\mathfrak{M}\}=\mathfrak{P}$. 这证明了映射 $K/M\times\mathfrak{A}'\to(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{A}'$ 为到上的双解析同构. 证完.

注意到实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 中的所有正则元素在 $\mathfrak{G}$ 中 (作为 Euclid 空间) 为稠密开子集，所以交换子代数 $\mathfrak{A}$ 中的所有正则元素在 $\mathfrak{A}$ 中为稠密开子集，记作 $\mathfrak{A}'$. 记 $A'=\exp\mathfrak{A}'$, 则 A' 在连通交换李群 A 中为稠密开子集. 所以 $KA'K$ 为李群 $G=KAK$ 中的稠密开子集. 因此 Harish-Chandra 嵌入的像 D 中有稠密开子集 $\widetilde{G}(0)$, 其中 $\widetilde{G}$ 中的元素 $\widetilde{g}$, $g\in G$ 定义如下：对 G/K 上的全纯自同构 g, 有 $g'K\to gg'K$. 它诱导了 $(P^+K^CP^-)/(K^CP^-)$ 上的映射 $u_+K^CP^-\to gu_+K^CP^-$. 记 gu_+ 在 P^+ 上的投影为 $(gu_+)_+$, 则为 $u_+\to(gu_+)_+$, 它诱导了映射 $\exp X_+\to\exp Y_+$. 于是当 $X_+\in D$ 时，记 $Y_+=\widetilde{g}(X_+)$.

今 Hermite 对称空间 G/K 的 Riemann 度量为 Killing 型 B, 它决定的体积元素记作 $\mathrm{d}x$.

又紧李群 K 有紧子群 M, 而 $\mathfrak{K}$ 及 $\mathfrak{M}$ 分别为它们的李代数. 今李代数 $\mathfrak{K}$ 有内积 $-B(x,y)$, 紧子代数 $\mathfrak{K}$ 中关于子空间 $\mathfrak{M}$ 的正交补为 $\widetilde{\mathfrak{K}}$, 即有空间直接和 $\mathfrak{K}=\mathfrak{M}+\widetilde{\mathfrak{K}}$. 这时，切空间 $T_{eM}(K/M)$ 线性同构于 $\widetilde{\mathfrak{K}}$. 所以， $-B(X,Y)$ 诱导了切空间 $T_{eM}(K/M)$ 上的内积，它可作为商空间 K/M 上的 K 不变 Riemann 度量，它所决定的标准体积元素记作 $\mathrm{d}k_M$. 由引理 5.5.6 的证明可知，映射 $\varphi:(K/M)\times\mathfrak{A}\to(\mathrm{Ad}\,K)\mathfrak{A}$ 的 Jacobian φ_* 为

$$\varphi_*(kM,X_0)=(\mathrm{Ad}\,k)([\mathfrak{M},X_0]+\mathfrak{A}),$$

而 $\mathfrak{P}=\mathfrak{A}+[X_0,\mathfrak{M}]$. 今 $\mathfrak{M}=\sum\limits_{\xi}\mathfrak{G}'_\xi$, $\mathfrak{G}'_\xi$ 中元素 T_ξ 有 $[X_0,T_\xi]=$

$\xi(X_0)T_\xi$. 今

$$B(h_i,h_j)=B(\frac{1}{2}(e_{\beta_i}+e_{-\beta_i}),\frac{1}{2}(e_{\beta_j}+e_{-\beta_j}))$$
$$=\frac{1}{2}B(e_{\beta_i},e_{-\beta_j})=\frac{1}{2}\delta_{ij},$$

所以 $\sqrt{2}h_1,\cdots,\sqrt{2}h_r$ 为两两正交的单位向量. 又在 $\mathfrak{G}\cap\mathfrak{G}'_\xi$ 上取关于 $-B(X,\tau(Y))$ 两两正交的单位向量. 当 X_0 为正则元素时, $\xi(X_0)^{-1}T_{\xi,1},\cdots,\xi(X_0)^{-1}T_{\xi,m(\xi)}$ 是 $[X_0,\mathfrak{M}]$, 从而是 $\mathfrak{P}$ 中两两正交的单位向量. 所以 Jacobian 行列式为 $\prod\limits_{\xi\in P_+}|\xi(X_0)|^{m_\xi}$, 其中 $m_\xi=\dim\mathfrak{G}'_\xi$.

在 C_r 型时,

$$\Delta_r=\{\pm\xi_j,\ \pm\xi_i\pm\xi_j,\quad i\neq j,1\leq i,j\leq r\},$$

且

$$\dim\mathfrak{G}'_{\xi_j}=2b,\ 1\leq j\leq r,\ \dim\mathfrak{G}'_{\xi_i\pm\xi_j}=a,\ i\neq j,\ 1\leq i,j\leq r.$$

记

$$\xi_i(X_0)=t_i,\ 1\leq i\leq r,$$

则

$$\prod_{\alpha\in\Delta_r^+}|\alpha(X_0)|^{m_\alpha}=(\prod_{i=1}^r t_i)^{2b}\prod_{1\leq i<j\leq r}|t_i^2-t_i^2|^a.$$

在 BC_r 型时,

$$\Delta_r=\{\pm\xi_j,\ \pm2\xi_j,\ 1\leq j\leq r,\ \pm\xi_i\pm\xi_j,\ i\neq j,\ 1\leq i,j\leq r\},$$

且

$$\dim\mathfrak{G}'_{\xi_i}=2b,\ \dim\mathfrak{G}'_{2\xi_i}=1,\ 1\leq j\leq r,$$
$$\dim\mathfrak{G}'_{\xi_i\pm\xi_j}=a,\ i\neq j,\ 1\leq i,j\leq r.$$

则

$$\prod_{\alpha\in\Delta_r^+}|\alpha(X_0)|^{m_\alpha}=\Big(\prod_{i=1}^r t_i\Big)^{2b}\prod_{1\le i<j\le r}|t_i^2-t_j^2|^a\prod_{i=1}^r(2t_i)$$

$$=2^r\Big(\prod_{i=1}^r t_i\Big)^{2b+1}\prod_{1\le i<j\le r}|t_i^2-t_j^2|^a.$$

于是有

定理 5.5.7 任取 $f\in C(G/K)$, 则

$$\int_{\mathfrak{P}_+}f=c_0\int_{K/M}\mathrm{d}k_M\int_{\mathbf{R}^r}f((\mathrm{Ad}\,k)\sum_{i=1}^r t_ie_{\beta_i})\cdot\Big(\prod_{i=1}^r t_i\Big)^\lambda\prod_{i<j}|t_i^2-t_j^2|^a\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_r,$$

其中 c_0 为正常数. 在 C_r 型时, $\lambda=2b$; 在 BC_r 型时, $\lambda=2b+1$. 又对 Harish-Chandra 嵌入 ζ, 则像 $\zeta(G/K)=D$ 有

$$\int_D f=c_0\int_{K/M}\mathrm{d}k_M\int_{-1}^1\cdots\int_{-1}^1 f((\mathrm{Ad}\,k)\sum_{i=1}^r t_ie_{\beta_i})(\prod_{i=1}^r t_i)^\lambda\prod_{i<j}|t_i^2-t_j^2|^a\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_r,$$

其中 c_0 为常数.

证 设 f_0 为域 D 在 $\mathfrak{P}_+$ 的特征函数, 于是

$$\int_{\mathfrak{P}_+}ff_0=\int_D f.$$

再由 $\mathfrak{P}'_+$ 为 $\mathfrak{P}_+$ 的稠密连通子集, 所以

$$\int_{\mathfrak{P}'_+}=\int_{\mathfrak{P}_+}.$$

由引理 5.5.2 和引理 5.5.6 便证明了定理. 证完.

下面我们给出另一种积分公式. 为此先证

引理 5.5.8 映射 φ:

$$K/M \times A' \to G/K$$

定义为 $\varphi(kM, a) = kaK$, 则其 Jacobian 行列式为

$$\lambda_0 \prod_{\beta \in \Delta_r^+} (\mathrm{sh}\,(\beta(h)))^{m_\beta},$$

其中 h 为 $\mathfrak{A}$ 中的正则元素, $m_\beta = \dim \mathfrak{G}'_\beta$, 而 Δ_r^+ 为限制正根系, λ_0 为正常数.

证 今实半单李代数 $\mathfrak{G}$ 有

$$\mathfrak{G} = C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{A}) + \sum_{\beta \in \pm P_+} \mathfrak{G}_\beta,$$

又 $\mathfrak{G}$ 的复化 $\mathfrak{G}^C = \mathfrak{L}$ 有

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{G}^C = C_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{A}) + \sum_{\xi \in \Delta_r} \mathfrak{G}'_\xi,$$

任取 $h \in \mathfrak{A}$, 则 Cartan 对合 θ 有 $\theta(h) = -h$. 而 $X_\beta \in \mathfrak{G}'_\beta$ 有

$$[h, X_\beta + \theta(X_\beta)] = \beta(h)X_\beta - \overline{\beta(h)}\theta(X_\beta),$$

其中 $\beta(h)$ 为纯虚数. 故

$$[h, [h, X_\beta + \theta(X_\beta)]] = \beta(h)^2(X_\beta + \theta(X_\beta)).$$

所以由子空间

$$\mathfrak{G}'_\xi = \{Y \in \mathfrak{G}^C, (\mathrm{ad}\,h)^2 Y = \xi(h)^2 Y \mid \forall\, h \in \mathfrak{A}\},$$

这里 $\xi \in \mathfrak{A}^*$. 事实上 $\beta \in \sqrt{-1}\mathfrak{H}_{0c} + \mathfrak{A}$, 而 $B(\sqrt{-1}\mathfrak{H}_{0c}, \mathfrak{A}) = 0$. 所以若 $h \in \mathfrak{A}$, 则 $\beta(h) = B(h_\beta, h) = B(h'_\xi, h)$, 其中 h'_ξ 为 h_β 在 $\mathfrak{A}$ 上的投影.

今紧李群 K 的李代数为 $\mathfrak{K}$, K 的紧子群 M 的李代数为 $\mathfrak{M}$. 关于内积 $-B(x,y)$, $\mathfrak{M}$, 在 $\mathfrak{K}$ 中的正交补记作 $\mathfrak{M}'$. 由此可知 $\mathfrak{M}'\cap C_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{A})=0$. 于是 $[\mathfrak{A},\mathfrak{M}']\subset\mathfrak{M}'$, 即 $(\mathfrak{M}')^C\subset\sum\limits_{\beta\in\pm P_+}\mathfrak{G}_\beta=\sum\limits_{\xi\in\Delta_r}\mathfrak{G}'_\xi$. 所以

$$(\mathfrak{M}')^C=\sum_{\xi\in\Delta'_r\subset\Delta_r}\mathfrak{G}'_\xi.$$

由此有

$$(\mathfrak{M}')^C=\sum_{\xi\in\Delta'_r}\mathfrak{M}_\xi,\quad \mathfrak{M}_\xi=\mathfrak{G}'_\xi\cap(\mathfrak{M}')^C.$$

在 $\mathfrak{M}_\xi$ 中取关于内积 $-B(x,\tau(y))$ 的标准正交基

$$T_{\xi,i},\quad 1\le i\le m(\xi),\ \forall\,\xi\in\Delta'_r.$$

为了给出映射 φ 的微分, 在商空间中取曲线 $k(\exp tT_{\alpha,i})M$, 它在点 kM 的切向量计算如下: 今

$$\begin{aligned}k(\exp tT_{\alpha,i})M&=((\mathrm{ad}\,k)\exp tT_{\alpha,i})kM\\&=(\exp t(\mathrm{Ad}\,k)T_{\alpha,i})kM,\quad \forall\,t\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

这里 $k\in K$,kM 为流形 K/M 中一定点. 于是切向量为 $(\mathrm{Ad}\,k)T_{\alpha,i}$.

对 $K/M\times A$ 中一定点 $(kM,\exp X_0)$, 则

$$\begin{aligned}&\varphi(k(\exp tT_{\alpha,i})M,\exp X_0)=(k(\exp tT_{\alpha,i})(\exp X_0))K\\&=(k(\exp X_0)(\mathrm{ad}\,(\exp X_0)^{-1})\exp tT_{\alpha,i})K.\end{aligned}$$

记映射 $\pi:G\to G/K$ 为自然映射, 则

$$\varphi(k(\exp tT_{\alpha,i})M,\exp X_0)=\pi(k(\exp X_0)\exp t(\mathrm{Ad}\,(\exp X_0)^{-1})T_{\alpha,i}).$$

所以

$$\left(\varphi_*|_{(kM,\exp X_0)}\right)_{K/M}=(L_{k(\exp X_0)})_*\pi_*(\mathrm{Ad}\,(\exp X_0)^{-1})T_{\alpha,i}.$$

令 $T_{\alpha,i} \in \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{K}, X_0 \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. 而

$$(\mathrm{Ad}\,(\exp X_0)^{-1})T_{\alpha,i} = (\mathrm{Ad}\exp(-X_0))T_{\alpha,i} = (\exp(-\mathrm{ad}\,X_0))T_{\alpha,i}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k!)}((\mathrm{ad}\,X_0)^2)^k T_{\alpha,i} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}((\mathrm{ad}\,X_0)^2)^k [X_0, T_{\alpha,i}]$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(\alpha(X_0))^{2k} T_{\alpha,i}$$
$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\alpha(X_0)^{2k+1}\alpha(X_0)^{-1}[X_0, T_{\alpha,i}]$$
$$= (\mathrm{ch}\,\alpha(X_0))T_{\alpha,i} - (\mathrm{sh}\,(\alpha(X_0)))\alpha(X_0)^{-1}[X_0, T_{\alpha,i}].$$

由 $T_{\alpha,i} \in \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{K}, \alpha(X_0)^{-1}[X_0, T_{\alpha,i}] \in [\mathfrak{P}, \mathfrak{K}] \subset \mathfrak{P}$, 所以

$$\pi_*(\mathrm{Ad}\,(\exp X_0)^{-1}T_{\alpha,i}) = -(\mathrm{sh}\,(\alpha(X_0)))\alpha(X_0)^{-1}[X_0, T_{\alpha,i}].$$

因此

$$\left(\varphi_*|_{(kM,\exp X_0)}\right)_{K/M}$$
$$= \left(L_{k\exp X_0}\right)_*\left(-\mathrm{sh}\,(\alpha(X_0))\alpha(X_0)^{-1}[X_0, T_{\alpha,i}]\right).$$

今取 X_0 为 $\mathfrak{A}$ 中的正则元素，则

$$\sqrt{2}h_{\xi_1}, \cdots, -\sqrt{2}h_{\xi_r}, \alpha(X_0)^{-1}[X_0, T_{\alpha,i}], 1 \le i \le m(\alpha), \alpha \in \Delta_r^+$$

为 $\mathfrak{P}$ 的标准正交基. 事实上，有

$$B([X_0, T_{\alpha,i}], [X_0, T_{\beta,j}] = -B((\mathrm{ad}\,X_0)^2 T_{\alpha,i}, T_{\beta,j})$$
$$= -\alpha(X_0)^2 B(T_{\alpha,i}, T_{\beta,j}) = -\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\alpha(X_0)^2,$$

由 $T_{\alpha,i}$ 的选取可知断言成立.

再对 $K/M \times A'$ 中定点 $(kM, \exp X_0)$, 有

$$\varphi(kM, (\exp X_0)(\exp t(h'_{\xi_i}))) = (k(\exp X_0)(\exp t(h'_{\xi_i})))K$$
$$= L_{k\exp X_0}\pi(\exp t(h'_{\xi_i})),$$

所以

$$\left(\varphi_*|_{(kM,\exp X_0)}\right)_A = \left(L_{k\cdot\exp X_0}\right)_*\pi_*(h'_{\xi i}).$$

注意到 $\pi: G \to G/K$ 诱导了线性同构 $\mathfrak{P} \to T_{eK}(G/K)$, 所以

$$\left(\varphi_*\big|_{(kM,\exp X_0)}\right)_A = \left(L_{k\cdot\exp X_0}\right)_* h'_{\xi i}.$$

由此可知，映射 φ 的 Jacobian 行列式为

$$\lambda_0 \prod_{\alpha\in\Delta_r^+} (\mathrm{sh}\,(\alpha(h)))^{m_\alpha},$$

其中 λ_0 为正实常数， h 为 $\mathfrak{A}$ 中的正则元素．证完.

于是有

定理 5.5.9 任取 $f \in \mathrm{C}(G/K)$, 则

$$\int_{G/K} f = \lambda \int_{K/M} \mathrm{d}h_M \int_{A'} f(\exp{(\mathrm{Ad}\,k)X}) \prod_{\alpha\in\Delta_r^+} (\mathrm{sh}\,(B(h_\alpha), X))^{m_\alpha} \mathrm{d}a,$$

其中 $a = \exp X$, m_α 为限制根 σ 的重数， λ 为正常数.

第六章　例外对称典型域

§ 6.1　Hermite 对称空间的 Siegel 域实现

由第五章可知，Hermite 对称空间是下面三种不可分解 Hermite 对称空间的拓扑积．第一种是复欧氏空间及复环面．第二种是紧单李群作用的紧 Hermite 对称空间，它有四大类和两个例外紧 Hermite 对称空间．第三种为第二种的对偶，它们是非紧单李群作用的非紧型 Hermite 对称空间．由 Harish-Chandra 嵌入便知它全纯等价于复 Euclid 空间中的齐性有界域，也有四大类和两个例外域．它们统称典型域．在这一节中，我们只考虑第三种情形．

四大类不可分解对称有界域的实现是 E.Cartan 给出的，它们是

第一类典型域　$\mathfrak{R}_I(n,m)$: 记 Z 为 $n\times m$ 矩阵，其中元素为独立自变量，域定义为

$$I-Z\overline{Z}'>0,$$

其中 I 为 $n\times n$ 单位方阵， $H>0$ 指 Hermite 方阵 H 定正.

第二类典型域　$\mathfrak{R}_{II}(n)$: 为 $\mathfrak{R}_I(n,n)$ 的截面，定义为

$$I-Z\overline{Z}'>0,\qquad Z=Z'.$$

第三类典型域　$\mathfrak{R}_{III}(n)$: 为 $\mathfrak{R}_I(n,n)$ 的截面，定义为

$$I-Z\overline{Z}'>0,\qquad Z=-Z'.$$

第四类典型域　又称为 **李球**,$\mathfrak{R}_{IV}(n)$. 定义如下：记 $z=$

$(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, 则

$$|zz'| < 1, \qquad 1 + |zz'|^2 - 2z\overline{z}' > 0.$$

为了给出例外典型域，我们不加证明地写出一些必要的定义和结论如下.

定义 6.1.1 $\mathbb{R}^n$ 中的连通开集 V 称为 **锥**, 如果任取 $x \in V, \lambda > 0$, 则 $\lambda x \in V$. $\mathbb{R}^n$ 中的开锥 V 称为 **开凸锥**, 如果任取 $x, y \in V, t \in [0,1]$, 则 $tx + (1-t)y \in V$. 设 V 为 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为顶点，且不包含整条直线的开凸锥， $\mathbb{R}^n$ 上的非异线性变换 $y = xA$, 若适合 $A(V) = \{xA \mid \forall x \in V\} = V$, 则称为 V 上的 **线性自同构**. 它们的全体构成集合 $\mathrm{Aff}\,(V)$, 则为 $\mathrm{GL}\,(n, \mathbb{R})$ 中的闭普通子群，所以是李子群，称为 V 上的 **线性自同构群**. 当 $\mathrm{Aff}\,(V)$ 在 V 上可递时，称锥 V 为 **齐性锥**.

给定 n 个 $m \times m$ Hermite 方阵 $H_1, \cdots, H_n$, 则 $\mathbb{R}^n$ 中有向量函数 $F(u, u) = (uH_1\overline{u}', \cdots, uH_n\overline{u}'), \forall\, u \in \mathbb{C}^m$.

定义 6.1.2 设 V 为 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为顶点，且不包含整条直线的开凸锥，则

$$D(V) = \{\, z \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{Im}\,(z) \in V \,\}$$

称为锥 V 上的 **第一类 Siegel 域**. 给定 $\mathbb{R}^m$ 上的向量函数 $F(u, u)$, 则

$$D(V, F) = \{\, (z, u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \mid \mathrm{Im}\,(z) - F(u, u) \in V \,\}$$

称为锥 V 上的 **第二类 Siegel 域**, 如果向量函数 F 适合条件

(1) $F(u, u) = 0$ 当且仅当 $u = 0$;

(2) $F(u, u) \in \overline{V}, \forall\, u \in \mathbb{C}^m$,

其中 $\overline{V}$ 为开凸锥 V 的闭包.

第一和第二类 Siegel 域统称为 **Siegel 域**.

设 $D(V,F)$ 为第二类 Siegel 域. 如果对锥 V 上的线性自同构 $y=xA$, 存在 $Q\in \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$, 使得

$$F(uQ,uQ)=F(u,u)A,\quad \forall\, u\in\mathbb{C}^m,$$

显然非异线性变换 $z\to zA, u\to uQ$ 将第二类 Siegel 域 $D(V,F)$ 映为自身.

定义 6.1.3 设 $D(V,F)$ 为 Siegel 域. $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m$ 上的仿射变换 σ: $z\to zA+uB+\alpha, u\to zC+uD+\beta$, 若有 $\sigma(D(V,F))=D(V,F)$, 则称为域 $D(V,F)$ 的 **仿射自同构**, 它们全体构成的集合记作 $\mathrm{Aff}\,(D(V,F))$. 显然, 它是 $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m$ 上的仿射变换群的闭普通子群, 所以是李子群, 称为域 $D(V,F)$ 上的 **仿射自同构群**.

易证

引理 6.1.4 设 $D(V,F)$ 为 Siegel 域, 若 V 为齐性锥, 即存在锥 V 上的线性自同构群 $\mathrm{Aff}\,(V)$ 的子群 G_0 在 V 上可递. 如果任取 G_0 中元素 $y=xA$, 存在 $Q\in\mathrm{GL}\,(m,\mathbb{C})$, 使得

$$F(uQ,uQ)=F(u,u)A,\quad \forall\, u\in\mathbb{C}^m,$$

则 Siegel 域 $D(V,F)$ 在仿射自同构群 $\mathrm{Aff}\,(D(V,F))$ 的子群

$$\begin{aligned} w&=zA-2\sqrt{-1}F(uQ,u_0)+\sqrt{-1}F(u_0,u_0)+a,\\ v&=uQ-u_0,\quad \forall\, a\in\mathbb{R}^n, u_0\in\mathbb{C}^m \end{aligned}$$

下可递.

定理 6.1.5(Piatetski–Shapiro) $\mathbb{C}^{n+m}$ 中的 Siegel 域 $D(V,F)$ 必全纯同构于 $\mathbb{C}^{n+m}$ 中的有界域. 又 Siegel 域 $D(V,F)$ 为齐性 Siegel 域, 即在 **全纯自同构群** $\mathrm{Aut}\,(D(V,F))$ 下作用可递, 当且仅当

上述概念的引进及结论的导出的历史如下：

在 1935 年，É.Cartan 给出了对称有界域的分类，以及除了两个例外情形，给出了不可分解对称有界域的实现. 这些域的实现被华罗庚教授称为“典型域”. É.Cartan 给出了两个例外的不可分解对称有界域 (例外典型域) 写成齐集空间 G/K 的形式，它们的复维数分别为 16 及 27. 同时，H.Cartan 计算了 $n=1,2,3$ 时 $\mathbb{C}^n$ 中齐性有界域的完全分类，证明了它们都是对称有界域. 从而 É.Cartan 提出了如下重要猜想：$\mathbb{C}^n$ 中齐性有界域必为对称有界域. 直到 1959 年，Piatetski–Shapiro 在研究对称有界域的自守函数论时，发现了两个反例，即在 $\mathbb{C}^4$ 及 $\mathbb{C}^5$ 中各找到一个齐性有界域，它们都不是对称有界域，从而否定了 É.Cartan 猜想.

由于 Siegel 在 1943 年发现，在研究对称有界域的自守函数论时，用 É.Cartan 的典型域的表达方式不方便，于是利用 Cayley 变换，将前三类典型域表示成无界域的形式. 例如，在第一类典型域的情形，表示成

$$\mathrm{Im}\,(Z)-W\overline{W}'>0,$$

其中 Z 为 $n\times n$ 方阵，W 为 $n\times(m-n)$ 矩阵，Z,W 中元素总共给出 nm 个独立复变量. 在第二类典型域的情形，表示成

$$\mathrm{Im}\,(Z)>0,\quad Z'=Z.$$

而 Piatetski–Shapiro 的反例也用这种形式来表达，所以他取名为 Siegel 域，且推广为上述定理 6.1.6 的形式. 随后，Piatetski–Shapiro 引进并详细研究了齐性 Siegel 域，得到大量性质，并举出了更多的反例. 直到 1963 年，Vinberg, Gindikin, Piatetski–Shapiro 证明了齐性有界域的分类归之于齐性 Siegel 域的分类. 在 1990 年，Piatetski–Shapiro 由于上述一系列工作及他在自守函数论方面的贡献而获得 Wolf 奖.

但是 Piatetski–Shapiro 并没有解决齐性 Siegel 域的分类问题和实现问题. 在齐性 Siegel 域 $D(V,F)$ 的定义中，V 及 F 实际上是抽象定义的. 为了给出第一类齐性 Siegel 域的分类，Vinberg

在 1963 年作了尝试，他用一类非结合代数的子集来刻画齐性锥．另一方面， Gindikin 则在 1964 年讨论了一些函数论问题．

直到 1976 年，作者在齐性 Siegel 域中找到一批由矩阵关系定义的可具体写出的齐性 Siegel 域，作者取名为正规 Siegel 域 (原名为 N Siegel 域)．作者证明了任一齐性 Siegel 域仿射等价于正规 Siegel 域，但是仍然没有解决齐性 Siegel 域的分类问题和实现问题．在加上一些条件后，作者解决了它们的分类和实现．这类域包含了对称 Siegel 域，从而在 1979 和 1980 年，作者给出了两个例外的不可分解对称有界域 (例外典型域) 的标准域．具体实现了 É.Cartan 未能实现的例外典型域．

另一方面，作者证明了齐性 Siegel 域上的 Bergman 映射是全纯同构，使得同构像为齐性有界域，因此自然地可以将两个例外典型域也写成有界域的形式．

由于正规 Siegel 域的引进，使得齐性有界域在全纯同构分类意义下，在每个等价类中可取正规 Siegel 域来具体计算，使得研究齐性有界域上的几何性质和函数论性质，只要在正规 Siegel 域上讨论就可以了，因此成为可具体计算的事情．例如计算最大全纯自同构群，计算 Bergman 核、 Bergman 映射、 Cauchy–Szegö 核和研究 Poisson 公式，等等．关于齐性有界域的详细论述，见作者的专著《齐性有界域理论》 (科学出版社， 2000 年出版)．

现在给出正规 Siegel 域的定义．我们记 $e_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)$，其中 1 为第 i 个分量，所以 $n\times m$ 矩阵 A 的第 i 行、第 j 列元素可记为 e_iAe_j'.

定义 6.1.7 设 A_{ij}^{tk}, $t=1,2,\cdots,n_{ij}$ 为 $n_{ik}\times n_{jk}$ 实矩阵，$1\le i<j\le N$; $Q_{ij}^{(t)}$, $t=1,2,\cdots,n_{ij}$ 为 $m_i\times m_j$ 复矩阵，$1\le i<j\le N$. 如果它们适合条件

(1) $n_{ik}=0$ 蕴含 $n_{ij}n_{jk}=0, j=i+1,\cdots,k-1$;

(2)

$$(A_{ij}^{sk})'A_{ij}^{tk}+(A_{ij}^{tk})'A_{ij}^{sk}=2\delta_{st}I^{(n_{jk})},$$

其中 $1\le s,t\le n_{ij}$, $1\le i<j<k\le N$;

(3)
$$A_{ij}^{sk}A_{jp}^{tk}=\sum_r(e_rA_{ij}^{sp}e_t')A_{ip}^{rk},$$

其中 $1\le s\le n_{ij}$, $1\le t\le n_{jp}$, $1\le i<j<p<k\le N$;

(4)
$$(A_{ij}^{sk})'A_{ip}^{tk}=\sum_r(e_tA_{ij}^{sp}e_r')A_{jp}^{rk},$$

其中 $1\le s\le n_{ij}$, $1\le t\le n_{ip}$, $1\le i<j<p<k\le N$;

(5) $m_k=0$ 蕴含 $n_{ij}m_j=0, j=i+1,\cdots,N$;

(6)
$$\overline{(Q_{ij}^{(s)})}'Q_{ij}^{(t)}+\overline{(Q_{ij}^{(t)})}'Q_{ij}^{(s)}=2\delta_{st}I^{(m_j)},$$

其中 $1\le s,t\le n_{ij}$, $1\le i<j\le N$;

(7)
$$Q_{ij}^{(s)}Q_{jk}^{(t)}=\sum_r(e_rA_{ij}^{sk}e_t')Q_{ik}^{(r)},$$

其中 $1\le s\le n_{ij}$, $1\le t\le n_{jk}$, $1\le i<j<k\le N$;

(8)
$$\overline{(Q_{ij}^{(s)})}'Q_{ik}^{(t)}=\sum_r(e_tA_{ij}^{sk}e_r')Q_{jk}^{(r)},$$

其中 $1\le s\le n_{ij},1\le t\le n_{ik},1\le i<j<k\le N$,

则矩阵组 $\{A_{ij}^{tk}, Q_{ij}^{(t)}, 1\le t\le n_{ij}, 1\le< i<j<k\le N\}$ 称为 N 矩阵组.

记 $x\in\mathbb{R}^n$, 其中

$$n=\sum_{1\le i\le j\le N}n_{ij},$$

又 $n_{11}=\cdots=n_{NN}=1$. 任取 $x\in\mathbb{R}^n$, 则可记作

$$x=(r_1,x_2,r_2,\cdots,x_N,r_N),\quad x_j=(x_{1j},\cdots,x_{j-1,j}),$$

其中 $r_1,\cdots,r_N\in\mathbb{R}$, $x_{ij}\in\mathbb{R}^{n_{ij}}$. 记

$$C_j(x)=\begin{pmatrix} r_j & x_{j,j+1} & \cdots & x_{jN} \\ x'_{j,j+1} & r_{j+1}I^{(n_{j,j+1})} & \cdots & R^{(j)}_{j+1,N}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x'_{jN} & R^{(j)}_{j+1,N}(x)' & \cdots & r_N I^{(n_{jN})} \end{pmatrix},$$

其中 $1\le j\le N$, 于是 $C_j(x)$ 为

$$n'_j=n_{jj}+n_{j,j+1}+\cdots+n_{jN}$$

阶实对称方阵, 其中 $n_{jk}\times n_{jl}$ 矩阵

$$R^{(j)}_{kl}(x)=\sum_r e'_r x_{kl}(A^{rl}_{jk})',\quad 1\le j<k<l\le N.$$

记 $u\in\mathbb{C}^m$, $m=m_1+\cdots+m_N$, $u=(u_1,\cdots,u_N)$, $u_j\in\mathbb{C}^{m_j}$, 则

$$R_j(u)=\begin{pmatrix} u_j \\ R^{(j)}_{j+1}(u) \\ \vdots \\ R^{(j)}_N(u) \end{pmatrix}$$

为 $n'_j\times m_j$ 矩阵, 其中

$$R^{(j)}_k(u)=\sum_r e'_r u_k\overline{(Q^{(r)}_{jk})}',\quad 1\le j<k\le N.$$

定义 6.1.8 给定 N 矩阵组 $\mathfrak{S}=\{A^{tk}_{ij},Q^{(t)}_{ij}\}$, 由 N 矩阵组 $\mathfrak{S}$ 定义的秩为 N 的**正规 Siegel 域**为

$$\{(z,u)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m\mid \operatorname{Im}C_j(z)-\operatorname{Re}R_j(u)\overline{R_j(u)}'>0,\ 1\le j\le N\},$$

它记作 $D(V_N,F)$.

定理 6.1.9 秩为 N 的正规 Siegel 域为齐性 Siegel 域，且任一齐性 Siegel 域线性等价于正规 Siegel 域.

正规 Siegel 域线性等价于不可分解正规 Siegel 域的拓扑积.

定义 6.1.10 给定 N 矩阵组 $\mathfrak{S}=\{A_{ij}^{tk},Q_{ij}^{(t)}\}$. 我们称 **排列 σ 关于 N 矩阵组 $\mathfrak{S}$ 是可容许的**, 如果为 $i<j$, $\sigma(i)>\sigma(j)$, 则有 $n_{\sigma(j)\sigma(i)}=0$. 任取 $O_{ij}\in O(n_{ij}),U_i\in U(m_i)$, 记

$$\widetilde{A}_{ij}^{tk}=\sum_r(e_rO_{\sigma(i),\sigma(j)}e_t')O'_{\sigma(i)\sigma(k)}A_{\sigma(i)\sigma(j)}^{r\sigma(k)}O_{\sigma(j)\sigma(k)},$$
$$\widetilde{Q}_{ij}^{(t)}=\sum_r(e_rO_{\sigma(i),\sigma(j)}e_t')\overline{U}'_{\sigma(i)}Q_{\sigma(i)\sigma(j)}U_{\sigma(j)},$$

则 $\{\widetilde{A}_{ij}^{tk},\widetilde{Q}_{ij}^{(t)}\}$ 仍为 N 矩阵组. 我们称 N 矩阵组 $\{A_{ij}^{tk},Q_{ij}^{(t)}\}$ 和 $\{\widetilde{A}_{ij}^{tk},\widetilde{Q}_{ij}^{(t)}\}$ **互相等价**.

定理 6.1.11 设正规 Siegel 域 $D(V_N,F)$ 和 $D(\widetilde{V}_M,\widetilde{F})$ 分别由 N 矩阵组 $\{A_{ij}^{tk},Q_{ij}^{(t)}\}$ 和 $\widetilde{N}$ 矩阵组 $\{\widetilde{A}_{ij}^{tk},\widetilde{Q}_{ij}^{(t)}\}$ 定义. 则正规 Siegel 域 $D(V_N,F)$ 和 $D(\widetilde{V}_M,\widetilde{F})$ 互相等价, 当且仅当矩阵组 $\{A_{ij}^{tk},Q_{ij}^{(t)}\}$ 和 $\{\widetilde{A}_{ij}^{tk},\widetilde{Q}_{ij}^{(t)}\}$ 互相等价.

由此定理可知, 齐性有界域的分类化为 N 矩阵组在等价意义下的分类.

为了考虑例外典型域的 Siegel 域形式的实现, 我们要给出正规 Siegel 域的全纯自同构群为单李群的条件. 为此, 要给出正规 Siegel 域 $D(V_N,F)$ 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}\,(D(V_N,F))$ 的李代数 $\mathrm{aut}\,(D(V_N,F))$. 我们有

引理 6.1.12 (Kaup, Matsushima, Ochiai) 设 $D(V,F)$ 为 $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m$ 中的 Siegel 域, 则 $2z\dfrac{\partial'}{\partial z}+u\dfrac{\partial'}{\partial u}\in\mathrm{aut}\,(D(V,F))$, 其中李代数 $\mathrm{aut}\,(D(V,F))$ 为 Siegel 域 $D(V,F)$ 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}\,(D(V,F))$ 的李代数. 且 $\mathrm{Aut}\,(D(V,F))$ 关于元素 $2z\dfrac{\partial'}{\partial z}+u\dfrac{\partial'}{\partial u}$ 可分解为特征

向量构成的根子空间

$$\mathrm{aut}\,(D(V,F)) = L_{-2} + L_{-1} + L_0 + L_1 + L_2,$$

其中

$$L_i = \{x \in \mathrm{aut}\,(D(V,F)) \mid (\mathrm{ad}\,\partial)x = ix\}.$$

而李代数 $\mathrm{aut}\,(D(V,F))$ 的根基 S 有

$$S = (S \cap L_{-2}) + (S \cap L_{-1}) + (S \cap L_0),$$

且

$$\dim\,(S \cap L_{-2}) = n - \dim L_2,$$
$$\dim\,(S \cap L_{-1}) = 2m - \dim L_1.$$

由引理 6.1.12 可知，李代数 $\mathrm{aut}\,(D(V,F))$ 实半单，则

$$\dim L_1 = 2m, \quad \dim L_2 = n.$$

下面我们叙述正规 Siegel 域的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}\,(D(V_N,F))$ 的李代数 $\mathrm{aut}\,(D(V_N,F))$ 的一组基如下：

定理 6.1.13 设 $D(V_N,V)$ 是由 N 矩阵组 $\{A_{ij}^{tk}, Q_{ij}^{(t)}\}$ 定义的正规 Siegel 域，则 $D(V_N,F)$ 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}\,(D(V_N,F))$ 的李代数

$$\mathrm{aut}\,(D(V_N,F)) = L_{-2} + L_{-1} + L_0 + L_1 + L_2$$

的子空间 L_i 有一组基如下：

(1) L_{-2} 有基

$$\frac{\partial}{\partial s_j}, \quad e_t\frac{\partial'}{\partial z_{ij}},$$

其中 $1 \le t \le n_{ij}$, $1 \le i < j \le N$.

(2) L_{-1} 有基

$$P_j^{(t)} = e_t\frac{\partial'}{\partial u_j} + 2\sqrt{-1}(e_t u_j')\frac{\partial}{\partial s_j} + \sqrt{-1}\sum_{p<j}\sum_r (u_p Q_{pj}^{(r)} e_t')e_r\frac{\partial'}{\partial z_{pj}}$$

$$+ \sqrt{-1}\sum_{j<p}\sum_r (u_p \overline{(Q_{jp}^{(r)})}' e_t')e_r\frac{\partial'}{\partial z_{jp}},$$

$$\widetilde{P}_j^{(t)} = \sqrt{-1}e_t\frac{\partial'}{\partial u_j} + 2(e_t u_j')\frac{\partial}{\partial s_j} + \sum_{p<j}\sum_r (u_p Q_{pj}^{(r)} e_t')e_r\frac{\partial'}{\partial z_{pj}}$$

$$+ \sum_{j<p}\sum_r (u_p \overline{(Q_{jp}^{(r)})}' e_t')e_r\frac{\partial'}{\partial z_{jp}},$$

其中 $1 \le t \le m_j, 1 \le j \le N$.

(3) L_0 有子空间直接和分解

$$L_0 = L_{01} + L_{02} + L_{03},$$

(a) L_{01} 有基

$$A_j = 2s_j\frac{\partial}{\partial s_j} + \sum_{p<j} z_{pj}\frac{\partial'}{\partial z_{pj}} + \sum_{j<p} z_{jp}\frac{\partial'}{\partial z_{jp}} + u_j\frac{\partial'}{\partial u_j}, \quad 1 \le j \le N,$$

$$X_{ij}^{(t)} = 2(e_t z_{ij}')\frac{\partial}{\partial s_i} + s_j(e_t\frac{\partial'}{\partial z_{ij}}) + \sum_{p<i}\sum_r (z_{pj}A_{pi}^{rj}e_t')e_r\frac{\partial'}{\partial z_{pi}}$$

$$+ \sum_{i<p<j}\sum_r (e_t A_{ip}^{rj} z_{pj}')(e_r\frac{\partial'}{\partial z_{ip}}) + \sum_{j<p} z_{jp}(A_{ij}^{tp})'\frac{\partial'}{\partial z_{ip}} + u_j\overline{(Q_{ij}^{(t)})}'\frac{\partial'}{\partial u_i},$$

其中 $1 \le t \le n_{ij}, 1 \le i < j \le N$.

(b)

$$L_{02} = \{\sum_{1\le i<j\le N} z_{ij}L_{ij}\frac{\partial'}{\partial z_{ij}} + \sum_i u_i K_i\frac{\partial'}{\partial u_i}\},$$

其中 L_{ij} 为 $n_{ij} \times n_{ij}$ 实斜对称方阵, K_i 为 $m_i \times m_i$ 斜 Hermite

方阵，它们适合条件

$$L_{ik}A_{ij}^{tk} - A_{ij}^{tk}L_{jk} = \sum_{r}(e_r L_{ij} e_t')A_{ij}^{rk},$$

$$K_i Q_{ij}^{(t)} - Q_{ij}^{(t)} K_j = \sum_{r}(e_r L_{ij} e_t')Q_{ij}^{(r)},$$

其中 $1 \le t \le n_{ij}, 1 \le i < j < k \le N$.

(c) 再子空间 L_{03} 有如下基元素，即作多项式向量场

$$Z_{ij}^{(t)} = 2(e_t z_{ij}')\frac{\partial}{\partial s_j} + s_i(e_t \frac{\partial'}{\partial z_{ij}}) + \sum_{p<i}\sum_{r}(z_{pi}e_r')e_t(A_{pi}^{rj})'\frac{\partial'}{\partial z_{pj}}$$

$$+ \sum_{i<p<j}\sum_{r}(z_{ip}e_r')e_t A_{ip}^{rj}\frac{\partial'}{\partial z_{pj}} + \sum_{j<p} z_{ip}A_{ij}^{tp}\frac{\partial'}{\partial z_{jp}} + u_i Q_{ij}^{(t)}\frac{\partial'}{\partial u_j},$$

其中 $1 \le t \le n_{ij}, 1 \le i < j \le N$, 则 $Z_{ij}^{(t)} \in L_{02}, 1 \le t \le n_{ij}$ 当且仅当 $n_{ij} > 0$. 又

$m_i = m_j,\ n_{ip} = n_{jp},\ j < p,\ n_{pi} = n_{pj},\ p < i,\ n_{ip} = n_{pj},\ i < p < j.$

特别地，当 $n_{ip} = n_{pj} > 0$ 时， $n_{ip} = n_{pj} = n_{ij}$.

(4) 引进多项式向量场

$$B_i = \frac{1}{2}s_i(A_i + u_i\frac{\partial'}{\partial u_i}) + \frac{1}{2}\sum_{p<i}\sum_{r}(e_r z_{pi}')(X_{pi}^{(r)} + u_i\overline{Q_{pi}^{(r)}}'\frac{\partial'}{\partial u_p})$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i<p}\sum_{r}(e_r z_{ip}')(Z_{ip}^{(r)} + u_i Q_{ip}^{(r)}\frac{\partial'}{\partial u_p}), \quad 1 \le i \le N;$$

$T_{ij}^{(t)} = [X_{ij}^{(t)}, B_i], \quad 1 \le t \le n_{ij}, 1 \le i < j \le N;$

$Y_j^{(t)} = [P_j^{(t)}, B_j],\ \widetilde{Y}_j^{(t)} = [B_j, \widetilde{P}_j^{(t)}], \quad 1 \le t \le m_j,\ 1 \le j \le N.$

则存在 $1 \le i_1 < \cdots < i_\sigma \le N$, 使得 $B_j \in L_2$ 当且仅当 $j = i_1, \cdots, i_\sigma$. 这时

L_1 有基 $Y_{i_\rho}^{(t)}, \widetilde{Y}_{i_\rho}^{(t)},\ 1 \le t \le m_{i_\rho},\ 1 \le \rho \le \sigma;$

L_2 有基 $B_{i_\rho},\ 1 \le \rho \le \sigma,\ T_{i_\tau i_\rho}^{(t)},\ 1 \le t \le n_{i_\tau i_\rho},\ 1 \le \tau < \rho \le \sigma.$

又有

$$n_{t_\tau p}=0,\ i_\tau<p\le N,\ p\ne i_{\tau+1},\cdots,i_\sigma,\ 1\le\tau\le\sigma,$$
$$n_{i_\tau i_\rho}>0,\ Z^{(t)}_{i_\tau i_\rho}\in L_{03},\ 1\le t\le n_{i_\tau i_\rho},\ 1\le\tau\le\rho\le\sigma.$$

再

$$Z^{(t)}_{pi_\rho}\in L_{03},1\le t\le n_{pi_\rho},1\le p<i_\rho,$$

且 $Z^{(t)}_{pi_\rho}\ne 0$, 当且仅当 $p=i_1,\cdots i_{\rho-1}$. 又有

$$\sum_r Q^{(r)}_{pi_\rho}(e'_u e_v+e'_v e_u)(Q^{(r)}_{pi_\rho})'=0,\ p<i_\rho,$$
$$\sum_r Q^{(r)}_{i_\rho p}(e'_u e_v+e'_v e_u)(Q^{(r)}_{i_\rho p})'=0,\ i_\rho<p.$$

我们也算出了一般的正规 Siegel 域 $D(V_N,F)$ 的 Bergman 核和 Cauchy-Szegö 核如下.

定理 6.1.14 设 $D(V_N,F)$ 是由 N 矩阵组 $\{A^{tk}_{ij},Q^{(t)}_{ij}\}$ 定义的正规 Siegel 域，记

$$\mathcal{A}_j=\mathcal{A}_j(z,u;\overline{z},\overline{u})=\operatorname{Im}C_j(z)-\operatorname{Re}(R_j(u)\overline{R_j(u)}'),\quad 1\le j\le N,$$

则正规 Siegel 域 $D(V_N,F)$ **Bergman 核函数** 为

$$K(z,u;\overline{z},\overline{u})=c_0\prod_{j=1}^N\det\mathcal{A}_j(z,u;\overline{z},\overline{u})^{\mu_j},$$

其中 c_0 为正实常数，$\mu_1,\cdots,\mu_N$ 定义为

$$\sum_{j=1}^k\mu_j n_{jk}=-(n_k+n'_k+m_k),$$
$$n_k=n_{1k}+n_{2k}+\cdots+n_{kk},\quad n'_k=n_{kk}+n_{k,k+1}+\cdots+n_{kN}.$$

于是正规 Siegel 域 $D(V_N,F)$ 的 **Bergman 度量** 为

$$ds^2=-\sum_{j=1}^N\mu_j\operatorname{tr}\mathcal{A}_j^{-1}d\mathcal{A}_j\mathcal{A}_j^{-1}\overline{d}\mathcal{A}_j+\sum_{j=1}^N\mu_j\operatorname{tr}\mathcal{A}_j^{-1}d\overline{d}\mathcal{A}_j.$$

正规 Siegel 域 $D(V_N,F)$ 的 **Cauchy–Szegö 核函数** $S(z,u;\overline{\xi},\overline{\eta})$ 为

$$c_1\prod_{j=1}^N \det\left(\frac{1}{2\sqrt{-1}}(C_j(z)-C_j(\overline{\xi}))-\frac{1}{2}R_j(u)\overline{R_j(\eta)}'-\frac{1}{2}\overline{R_j(\eta)}R_j(u)'\right)^{\lambda_j},$$

其中 c_1 为实常数，$\lambda_1,\cdots,\lambda_N$ 定义为

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j n_{jk}=-\frac{1}{2}(n_k+n_k'+2m_k),\quad 1\le k\le N.$$

又 $(z,u)\in D(V_N,F))$, $(\xi,\eta)\in S(D(V_N,F))=\{(z,u)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m\mid \operatorname{Im}z=F(u,u)\}$ 为 **Silov 边界**.

引进 **形式 Poisson 核函数**

$$P(z,u;\overline{\xi},\overline{\eta})=\frac{|S(z,u;\overline{\xi},\overline{\eta})|^2}{S(z,u;\overline{z},\overline{u})},$$

其中 $(z,u)\in D(V_N,F)$, $(\xi,\eta)\in S(D(V_N,F))$, 则 $P(z,u;\overline{\xi},\overline{\eta})$ 为 **Poisson 核函数**, 当且仅当正规 Siegel 域 $D(V_N,F)$ 为对称 Siegel 域.

另一方面，我们还证明了

定理 6.1.15 设 $D(V_N,F)$ 是由 N 矩阵组 $\{A_{ij}^{tk},Q_{ij}^{(t)}\}$ 定义的正规 Siegel 域. 对 Bergman 度量 $K(z,u;\overline{z},\overline{u})$, 则 **Bergman 映射**

$$(y,v)=\operatorname{grad}_{(\overline{z},\overline{u})}\log\frac{K(z,u;\overline{z},\overline{u})}{K(\sqrt{-1}v_0,0;\overline{z},\overline{u})}\Big|_{\overline{z}=-\sqrt{-1}v_0,\overline{u}=0}P$$

为正规 Siegel 域 $D(V_N,F)$ 上的全纯同构，且像域为 $\mathbb{C}^{n+m}$ 中的齐性有界域，其中 $v_0=(s_1,z_2,s_2,\cdots,z_N,s_N)$, $s_1=1,s_j=1,z_j=0,2\le j\le N$, 则 $(\sqrt{-1}v_0,0)\in D(V_N,F)$ 为正规 Siegel 域中一固定点，又 P 为 $(n+m)\times(n+m)$ 非异常数复方阵.

一般地说，有界域的 Bergman 映射不一定是全纯同构.

应用于非紧型不可分解 Hermite 对称空间，我们知道全纯自同构群 $\operatorname{Aut}(D(V,F))$ 为单李群. 由引理 6.1.12 可知 $\dim L_1=2m$, $\dim L_2=n$. 由定理 6.1.13 有

定理 6.1.16 设正规 Siegel 域 $D(V_N,F)$ 为 $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m$ 中的非紧型不可分解 Hermite 对称空间，则全纯自同构群 $\mathrm{Aut}\,(D(V_N,F))$ 的李代数 $\mathrm{aut}\,(D(V_N,F))$ 有基

(1) $L_{-2}=<\frac{\partial}{\partial s_i}, e_t\frac{\partial'}{\partial z_{jk}}, 1\le t\le N, 1\le i,j,k\le N, j<k>$
;

(2) $L_{-1}=<P_j^{(t)}, \widetilde{P}_j^{(t)}, 1\le t\le m_j, 1\le j\le N>$;

(3) $L_{03}=<Z_{ij}^{(t)}, 1\le t\le n_{ij}, 1\le i<j\le N>$,

$L_{01}=<A_j, 1\le j\le N, X_{jk}^{(t)}, 1\le t\le n_{jk}, 1\le j<k\le N>$,

$L_{02}=\{\sum z_{ij}L_{ij}\frac{\partial'}{\partial z_{ij}}+\sum u_iK_i\frac{\partial'}{\partial u_i}\}$,

其中

$$L_{ij}A_{ik}^{tj}-A_{ik}^{tj}L_{ij}=\sum_r(e_rL_{ik}e_t')A_{ik}^{rj},$$

$$K_iQ_{ij}^{(t)}-Q_{ij}^{(t)}K_j=\sum_r(e_rL_{ij}e_t')Q_{ij}^{(r)};$$

(4) $L_1=<Y_i^{(t)}, \widetilde{Y}_i^{(t)}, 1\le t\le m_i, 1\le i\le N>$;

(5) $L_2=<B_i, 1\le i\le N, T_{ij}^{(t)}, 1\le t\le n_{ij}, 1\le i<j\le N\}$. 且有条件 $n_{ij}=\sigma>0, 1\le i<j\le N$, $m_i=\tau\ge 0, 1\le i\le N$ 都是整常数. 又

$$\sum_r Q_{ij}^{(r)}(e_u'e_v+e_v'e_u)(Q_{ij}^{(r)})'=0,$$

其中 $1\le u,v\le m_j, 1\le i<j\le N$.

证 由于正规 Siegel 域 $D(V_N,F)$ 不可分解，由定理 6.1.12 有 $\dim L_1=2m$, $\dim L_2=n$. 由定理 6.1.13 的 (4) 可知，$\sigma=N$, 而且 L_1 有基 $Y_i^{(t)}$, $\widetilde{Y}_i^{(t)}$, $\forall t,i$. L_2 有基 B_i, $T_{ij}^{(t)}$, $\forall t,i,j$. 又有

$n_{ij} > 0,\ Z_{ij}^{(t)} \in L_{03},\ \forall t, i, j$, 且

$$\sum_{r} Q_{ij}^{(r)}(e_u'e_v + e_v'e_u)(Q_{ij}^{(r)})' = 0,\ 1 \le i < j \le N.$$

所以 $n_{ij} = \sigma > 0,\ m_i = \tau \ge 0$ 都是整数. 证完.

由定理 6.1.16, 它们只可能是:

(1) $N = 1,\ D(V_1, F) = \{z \in \mathbb{C}, u \in \mathbb{C}^m \mid \operatorname{Im} z - u\overline{u}' > 0\}$;

(2) $N = 2,\ n_{12} = n,\ m_1 = m_2 = \dfrac{m}{2}, m$ 为偶数, 于是

$$D(V_2, F) = \{z \in \mathbb{C}^n, u \in \mathbb{C}^m \mid \operatorname{Im} C_1(z) - \operatorname{Re} R_1(u)\overline{R_1(u)}' > 0\},$$

其中 $z = (s_1, z_2, s_2),\ u = (u_1, u_2),\ R_2^{(1)}(u_2) = \sum e_r' u_2 \overline{(Q_{12}^{(r)})}'$, 而且

$$C_1(z) = \begin{pmatrix} s_1 & z_2 \\ z_2 & s_2 I \end{pmatrix}, \qquad R_1(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ R_2^1(u_2) \end{pmatrix}.$$

(3) $N \ge 3$,

$$D(V_N, F) = \{(z, u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \mid \operatorname{Im} C_1(z) - \operatorname{Re} R_1(u)\overline{R_1(u)}' > 0\}.$$

为了符号简单, 我们引进 2×2 方阵:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们有

引理 6.1.17 设 n 个 $n \times n$ 实方阵 $A_1, \cdots, A_n$ 有

$$A_i'A_j + A_j'A_i = 2\delta_{ij} I, \quad 1 \le i, j \le N,$$

则 $n = 1, 2, 4, 8$, 且存在实正交方阵 $O, O_1, O_2 \in O(n)$, 使得 $P_i = \sum\limits_{r=1}^{n} e_r O e_s' O_1' A_r O_2,\ 1 \le i \le n$ 为如下标准形:

(1) $n=1,\ P_1=1$;

(2) $n=2,\ P_1=I,\ P_2=J_1$;

(3) $n=4$,

$$P_1=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & -J_1 \end{pmatrix},$$

$$P_3=\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},\quad P_4=\begin{pmatrix} 0 & J_1 \\ J_1 & 0 \end{pmatrix};$$

(4) $n=8$,

$$P_1=I^{(8)},\ P_2=\operatorname{diag}(J_1,-J_1,-J_1,J_1),$$

$$P_3=\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I^{(2)} & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$P_4=\begin{pmatrix} 0 & J_1 & 0 & 0 \\ J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_1 \\ 0 & 0 & -J_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_5=\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I^{(4)} & 0 \end{pmatrix},\ P_6=\begin{pmatrix} 0 & 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_1 \\ J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_7=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -J_0 \\ 0 & 0 & J_0 & 0 \\ 0 & -J_0 & 0 & 0 \\ J_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_8=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -J_2 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & -J_2 & 0 & 0 \\ J_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

引理 6.1.18 设 n 个 $m\times m$ 复方阵 $Q_1,\cdots,Q_n$ 有

$$\overline{Q}_i'Q_j+\overline{Q}_j'Q_i=2\delta_{ij}I,\quad 1\le i,j\le n,$$

则有

$$m=2^{[\frac{n-1}{2}]}M,$$

其中 $[a]$ 为实数 a 的整数部分， M 为自然数. 若加上条件

$$\sum_r Q_r(e_u'e_v+e_v'e_u)Q_r'=0,\quad 1\le u,v\le n,$$

则对 $O\in \mathrm{O}(n)$, $U_1,U_2\in \mathrm{U}(m)$, 在等价关系

$$Q_i\to \sum_{j=1}^m (e_jOe_i')U_1Q_jU_2,\quad 1\le i\le n$$

下的标准形只出现下面几种情形：

(1) $n=2, Q_1=I,\quad Q_2=\sqrt{-1}\begin{pmatrix} I_1 & 0\\ 0 & -I_1\end{pmatrix}$;

(2) $n=4$, $m=2$, $Q_1=I$, $Q_2=\sqrt{-1}J_0$, $Q_3=-J_1$, $Q_4=\sqrt{-1}J_2$;

(3) $n=6$, $m=4$,

$$Q_1=I^{(4)},\qquad Q_2=\sqrt{-1}\begin{pmatrix} I^{(2)} & 0\\ 0 & -I^{(2)}\end{pmatrix},$$

$$Q_3=\begin{pmatrix} 0 & I^{(2)}\\ -I^{(2)} & 0\end{pmatrix},\quad Q_4=\sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & J_0\\ J_0 & 0\end{pmatrix},$$

$$Q_5=\begin{pmatrix} 0 & -J_1\\ -J_1 & 0\end{pmatrix},\quad Q_6=\sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & J_2\\ J_2 & 0\end{pmatrix}.$$

于是有如下分类结果

定理 6.1.19 设 $D(V_N,F)$ 是由 N 矩阵组 $\{A_{ij}^{tk}, Q_{ij}^{(t)}\}$ 定义的正规 Siegel 域，且它是非紧型不可分解对称 Siegel 域，则在仿射等价下的标准域如下：

第一类对称 Siegel 域. $N=1$,

$$D(V_1,F)=\{z\in\mathbb{C},u\in\mathbb{C}^m \mid \operatorname{Im} z-u\overline{u}'>0\}.$$

$N=2$, $n_{12}=2$, $m\ge 0$, 则 $4|m$. 设 $m_1=m/4$, 于是

$$Q_{12}^{(1)}=I,\qquad Q_{12}^{(2)}=\sqrt{-1}\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix},$$

$D(V_2, F)$ 为

$$\{\mathrm{Im}\begin{pmatrix} s_1 & z_2 \\ z_2' & s_2 I \end{pmatrix} - \mathrm{Re}\begin{pmatrix} u_1 \\ R_2^{(1)}(u_2) \end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix} u_1 \\ R_2^{(1)}(u_2) \end{pmatrix}'} > 0\},$$

其中 $z = (s_1, z_2 = s_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n_{12}} \times \mathbb{C}, u = (u_1, u_2) \in \mathbb{C}^{\frac{m}{2}} \times \mathbb{C}^{\frac{m}{2}}$,

$$R_2^{(1)}(u_2) = \sum e_r' u_2 \overline{(Q_{12}^{(r)})'} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \sqrt{-1}u_2 \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$N \geq 3$, $n_{ij} = 2$, $1 \leq i < j \leq N$, $m \geq 0$, 则 $4|m$. 设 $m_1 = m/4$, 于是

$$A_{ij}^{1k} = I, \quad A_{ij}^{2k} = J_1 \quad Q_{ij}^{(1)} = I, \quad Q_{ij}^{(2)} = \sqrt{-1}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

$$D(V_N, F) = \{(z, u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \mid \mathrm{Im}\, C_1(z) - \mathrm{Re}\, R_1(u)\overline{R_1(u)}' > 0\}.$$

第二类对称 Siegel 域. $N \geq 2$, $n_{ij} = 1$, $m = 0$, $A_{ij}^{1k} = 1$, 于是

$$D(V_N) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{Im}\, C_1(z) > 0\}.$$

第三类对称 Siegel 域. $n_{ij} = 4, \quad m_1 = \cdots = m_N = 0$ 或 2,

$$A_{ij}^{1k} = I^{(4)}, \quad A_{ij}^{3k} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{ij}^{2k} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & -J_1 \end{pmatrix}, A_{ij}^{4k} = \begin{pmatrix} 0 & J_1 \\ J_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_{ij}^{(1)} = I, \quad Q_{ij}^{(2)} = \sqrt{-1}J_2, \quad Q_{ij}^{(3)} = -J_1, \quad Q_{ij}^{(4)} = \sqrt{-1}J_2,$$

于是

$$D(V_N, F) = \{(z, u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \mid \mathrm{Im}\, C_1(z) - \mathrm{Re}\,(u)\overline{R_1(u)}' > 0\}.$$

第四类对称 Siegel 域. $N = 2$, $n_{12} \neq 1, 2, 4$, $m = 0$, 于是

$$D(V_2) = \{\mathrm{Im}\begin{pmatrix} s_1 & z_2 \\ z_2' & s_2 I \end{pmatrix} > 0\},$$

其中 $z=(s_1,z_2,s_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{n_{12}}\times\mathbb{C}$.

第五类例外对称 Siegel 域. $N=2$, $n_{12}=6$, $m_1=m_2=4$,

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= I^{(4)}, & Q_2 &= \sqrt{-1}\begin{pmatrix} I^{(2)} & 0 \\ 0 & -I^{(2)} \end{pmatrix}, \\
Q_3 &= \begin{pmatrix} 0 & I^{(2)} \\ -I^{(2)} & 0 \end{pmatrix}, & Q_4 &= \sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & J_0 \\ J_0 & 0 \end{pmatrix}, \\
Q_5 &= \begin{pmatrix} 0 & -J_1 \\ -J_1 & 0 \end{pmatrix}, & Q_6 &= \sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & J_2 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

于是域 $D(V_2,F)$ 表示成 $z=(s_1,z_{12},s_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^6\times\mathbb{C}, u=(u_1,u_2)\in\mathbb{C}^4\times\mathbb{C}^4$,

$$
\operatorname{Im}\begin{pmatrix} S_1 & z_2 \\ z_2' & s_2I \end{pmatrix} - \operatorname{Re}\begin{pmatrix} u_1 \\ R_2^{(1)}(u_2) \end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix} u_1 \\ R_2^{(1)}(u_2) \end{pmatrix}}' > 0,
$$

其中

$$
R_2^{(1)}(u_2)=\sum_{r=1}^{6} e_r u_2 \overline{Q_r}'.
$$

第六类例外对称 Siegel 域. $N=3$, $n_{12}=n_{13}=n_{23}=8$, $m=0$, $A_{12}^{t3}=P_t$, $1\le t\le 8$, 其中 $P_1,\cdots,P_8$ 由引理 6.1.17 的 (4) 定义. 于是域表示为

$$
\begin{aligned}
D(V_3)= \{ & z=(s_1,z_{12},s_2,z_{13},z_{23},s_3), s_i\in\mathbb{C}, z_{ij}\in\mathbb{C}^8 \mid \\
& \operatorname{Im}\begin{pmatrix} s_1 & z_{12} & z_{13} \\ z_{12}' & s_2I & R_0(z_{23}) \\ z_{13}' & R_0(z_{23})' & s_3I \end{pmatrix} > 0\},
\end{aligned}
$$

其中

$$
R_0(z_{23})=\sum_{r=1}^{8} e_r' z_{23} P_r'.
$$

证 当 $N=1,2$ 时, 分别有

$$
D(V_1,F)=\{(z,u)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m \mid \operatorname{Im} z - u\overline{u}' > 0\},
$$

$$
D(V_2,F)=\{(z,u)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m \mid \operatorname{Im} C_1(z) - \operatorname{Re}(R_1(u)\overline{R_1(u)}' > 0\},
$$

其中 $u=(u_1,u_2)$, $m_1=m_2$, 而且

$$R_1(u)=\begin{pmatrix} u_1 \\ R_2^{(1)}(u) \end{pmatrix},$$

而

$$R_2^{(1)}(u)=\sum e'_r u_2 \overline{Q_r}',$$

其中

$$\overline{Q_i}'Q_j+\overline{Q_j}'Q_i=2\delta_{ij}I, \quad \sum_r Q_r(e'_u e_v+e'_v e_u)Q'_r=0.$$

由引理 6.1.18, 所以当 $m>0$ 时, 只有 $n_{12}=2$, 或 $n_{12}=4, m_1=2$, 或 $n_{12}=6, m_1=4$. 相应的标准形也已求出. 所以, 当 $D(V_2,F)$ 为第二类正规 Siegel 域时, 只出现上面三种情形. 其余为第一类正规 Siegel 域的情形. 这证明了定理 6.1.19 中 $N=1$ 及 $N=2$ 的情形的全部结果.

现在考虑 $N\geq 3$. 这时先来证明在 N 矩阵组的等价关系下, 可取标准形如引理 6.1.17, 而且

$$A_{ij}^{tk}=P_t, \quad 1\leq t\leq n_{ij}, 1\leq i<j<k\leq N.$$

为此, 对 N 作归纳法. 当 $N=3$ 时, 只出现 $A_{12}^{t3}, 1\leq t\leq n_{12}$. 由引理 6.1.17 可知无妨取 $A_{12}^{t3}=P_t, 1\leq t\leq n_{12}$. 设若 $A_{ij}^{tk}=P_t, 1\leq t\leq n_{ij}, 1\leq i<j<k\leq N-1$, 我们取 $O_{ij}=I, 1\leq i<j\leq N-1, O_i\in O(n_{iN})$. 注意到 $n_{ij}=\sigma\in\{1,2,4,8\}, 1\leq i<j\leq N$, 我们可取 $O_i\in O(\sigma)$, 使得 $O'_1A_{1i}^{1N}O_i=I, 1<i<N$, 于是无妨设 $A_{1i}^{1N}=I$. 再作 $A_{1i}^{tN}\to O'_1A_{1i}^{tN}O_i$, 使得 $A_{1i}^{1N}=O'_1A_{1i}^{1N}O_i$, 即 $O_i=O_1, 1<i<N$. 由引理 6.1.17, 存在 O_1, 使得 $O'_1A_{12}^{tN}O_1=P_t$. 因此无妨设

$$A_{12}^{tN}=P_t, 1\leq t\leq\sigma, \quad A_{1i}^{1N}=I, 1<i<N.$$

注意到 $A_{1i}^{1j} = I, 1 < i < j \le N$, 而

$$(A_{1i}^{sN})' A_{1j}^{tN} = \sum_r (e_t A_{1i}^{sj} e_r') A_{ij}^{rN}, \quad 1 < i < j < N.$$

取 $s = 1$, 有 $A_{1j}^{tN} = A_{ij}^{tN}, 1 < i < j < N$. 因此

$$(A_{1i}^{sN})' A_{1j}^{tN} = \sum_r (e_t P_s e_r') A_{ij}^{rN}.$$

取 $t = 1$, 有 $(A_{1i}^{sN})' = -A_{1j}^{sN}, s > 1$. 由 $A_{12}^{sN} = P_s$, 可知 $A_{1j}^{sN} = P_s, 2 < j < N$. 至此证明了 $A_{ij}^{sN} = P_s, 1 \le s \le \sigma, 1 \le i < j < N$, 即断言成立. 且在第一类正规 Siegel 域的情形, 只要证明当 $n_{ij} = 8, 1 \le i < j \le N$ 时, 只出现 $N = 3$ 的情形就够了.

设 $n_{ij} = 8, 1 \le i < j \le N, N \ge 4$. 则由 $A_{ij}^{tk} = P_t$ 可知

$$P_s P_t = \sum_{r=1}^{8} (e_r P_s e_t') P_r, \quad 1 \le s, t \le 8.$$

取 $s = 3, t = 5$, 则 $P_3 e_5' = -e_7$, 代入, 有 $P_3 P_5 = -P_7$. 由直接计算便推出矛盾. 所以证明了 $N = 3$.

最后考虑第二类正规 Siegel 域的情形. 由于条件

$$\sum_r Q_{ij}^r (e_u' e_v + e_v' e_u)(Q_{ij}^r)' = 0,$$

由引理 6.1.18 可知, 只有 $m_1 = \cdots = m_N = \tau > 0$, 而且有 $\sigma = 2, \tau$ 任意, 或 $\sigma = 4, \tau = 2$, 或 $\sigma = 6, \tau = 4$.

今 $\sigma \in \{1, 2, 4, 8\}$. 当 $\sigma = 2, \tau$ 任意时, 便给出第一类典型域. 当 $\sigma = 4, \tau = 2$ 时, 便给出第三类典型域. 当 $\sigma = 6, \tau = 4$ 时, 必须 $N = 2$, 因为当 $N \ge 3$ 时有 $\sigma \in \{1, 2, 4, 8\}$. 所以只有 $N = 2, \sigma = 6, \tau = 4$. 此即第五类例外典型域. 至此证明了定理.

不难证明在前四类典型域的情形, 可通过一些计算将上面的表达式变为 Siegel 给出的原来的 Siegel 域的表达方式. 我们在此略去.

§ 6.2 例外对称 Siegel 域 $R_{VI}(27)$

在这一节中，我们考虑第六类例外典型域，给出它的表达式，求出它的最大全纯自同构群、 Bergman 核函数、 Bergman 映射和 Bergman 度量，从而给出有界域表达形式，进一步计算它们的 Cauchy–Szegö 核和 Poisson 核.

由定理 6.1.19 可知，第六类例外典型域有如下正规 Siegel 域的表达形式

$$R_{VI}(27) = \left\{ \operatorname{Im} C_1(z) = \operatorname{Im} \begin{pmatrix} s_1 & z_{12} & z_{13} \\ z_{12}' & s_2 I^{(8)} & R(z_{23}) \\ z_{13}' & R(z_{23})' & s_3 I^{(8)} \end{pmatrix} > 0, \right\} \tag{6.2.1}$$

其中

$$\begin{aligned} &z = (s_1, z_{12}, s_2, z_{13}, z_{23}, s_3), \\ &s_i \in \mathbb{C}, 1 \le i \le 3, z_{ij} \in \mathbb{C}^8, 1 \le i < j \le 8. \end{aligned}$$

又 $R(x)$ 为 8×8 实方阵， $\forall\, x \in \mathbb{R}^8$, 它定义为

$$R(x) = \sum_{r=1}^{8} e_r' x P_r'.$$

且 $P_1, \cdots, P_8$ 由引理 6.1.18 的 (4) 定义．所以有

$$\begin{aligned} &P_i P_j' + P_j P_i' = 2\delta_{ij} I^{(8)}, \quad 1 \le i, j \le 8, \\ &P_i' P_j + P_j' P_i = 2\delta_{ij} I^{(8)}, \quad 1 \le i, j \le 8, \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

$$P_i e_j' + P_j e_i' = 2\delta_{i1} e_j' + 2\delta_{j1} e_i' - 2\delta_{ij} e_1', \quad 1 \le i, j \le 8, \tag{6.2.3}$$

又 $e_i = (0, \cdots 0, 1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^8$, 其中 1 在第 i 列位置， $1 \le i \le 8$.

而且 $R(x)$ 是

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ -x_2 & x_1 & x_4 & -x_3 & x_6 & -x_5 & -x_8 & x_7 \\ -x_3 & -x_4 & x_1 & x_2 & x_7 & x_8 & -x_5 & -x_6 \\ -x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 & x_8 & -x_7 & x_6 & -x_5 \\ -x_5 & -x_6 & -x_7 & -x_8 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_6 & x_5 & -x_8 & x_7 & -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_7 & x_8 & x_5 & -x_6 & -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ -x_8 & -x_7 & x_6 & x_5 & -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \quad (6.2.4)$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_8)\in\mathbb{R}^8$. 因此有

$$R(x)R(y)'+R(y)R(x)'=2xy'I^{(8)},\quad \forall\ x,y\in\mathbb{R}^8. \quad (6.2.5)$$

特别地，有

$$(xx')^{-\frac{1}{2}}R(x)\in O(8),\quad \forall x\ \in\ \mathbb{R}^8-\{0\}.$$

令 $C_3(z)=(s_3)$,

$$C_2(z)=\begin{pmatrix} s_2 & z_{23} \\ z'_{23} & s_3I^{(8)} \end{pmatrix},$$

$$C_1(z)=\begin{pmatrix} s_1 & z_{12} & z_{13} \\ z'_{12} & s_2I & R(z_{23}) \\ z'_{13} & R(z_{23})' & s_3I \end{pmatrix}, \quad (6.2.6)$$

若 $s_1\neq 0$, 则

$$\begin{pmatrix} I & 0 & -s_3^{-1}z_{13} \\ 0 & I & -s_3^{-1}R(z_{23}) \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} C_1(z) \begin{pmatrix} I & 0 & -s_3^{-1}z_{13} \\ 0 & I & -s_3^{-1}R(z_{23}) \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}'$$

$$=\begin{pmatrix} s_1-s_3^{-1}z_{13}z'_{13} & z_{12}-s_3^{-1}z_{13}R(z_{23})' & 0 \\ (z_{12}-s_3^{-1}z_{13}R(z_{23})')' & (s_2-s_3^{-1}z_{23}z'_{23})I & 0 \\ 0 & 0 & s_3I \end{pmatrix}.$$

于是在 $s_2s_3 \neq z_{23}z_{23}'$ 时，记

$$
\begin{aligned}
q_{12} &= -(s_2s_3 - z_{23}z_{23}')^{-1}(s_3z_{12} - z_{13}R(z_{23})'),\\
q_{13} &= -(s_2s_3 - z_{23}z_{23}')^{-1}(s_2z_{13} - z_{12}R(z_{23})),\\
q_{23} &= -s_3^{-1}R(z_{23}).
\end{aligned}
$$

则

$$
Q(z) = \begin{pmatrix} 1 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 1 & q_{23} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \tag{6.2.7}
$$

有

$$
\begin{aligned}
\Lambda(z) &= Q(z)C_1(z)Q(z)'\\
&= \operatorname{diag}((s_2s_3 - z_{23}z_{23}')^{-1}\Delta_0(z),\\
&\qquad s_3^{-1}(s_2s_3 - z_{23}z_{23}')I^{(8)}, s_3I^{(8)}),
\end{aligned} \tag{6.2.8}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\Delta_0(z) = &\ s_1s_2s_3 - s_1z_{23}z_{23}' - s_2z_{13}z_{13}'\\
&-s_3z_{12}z_{12}' + 2z_{12}R(z_{23})z_{13}'.
\end{aligned} \tag{6.2.9}
$$

由此可知

$$
\det C_1(z) = (s_2s_3 - z_{23}z_{23}')^7\Delta_0(z), \tag{6.2.10}
$$

$$
\det C_2(z) = s_3^7(s_2s_3 - z_{23}z_{23}'), \tag{6.2.11}
$$

$$
\det C_3(z) = s_3. \tag{6.2.12}
$$

定理 6.2.1 第六类例外对称 Siegel 域 $R_{VI}(27)$ 可表示为

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Im}(s_3) > 0,\\
&(\operatorname{Im}(s_2))(\operatorname{Im}(s_3)) - (\operatorname{Im}(z_{23}))(\operatorname{Im}(z_{23}))' > 0,\\
&\Delta_0(\operatorname{Im}(z)) > 0.
\end{aligned} \tag{6.2.13}
$$

证 今 $R_{VI}(27)$ 中点 $z \in \mathbb{C}^{27}$ 定义为 $\operatorname{Im} C_1(z) > 0$, 它等价于

$$
Q(\operatorname{Im}(z))C_1(\operatorname{Im}(z))Q(\operatorname{Im}(z))' > 0,
$$

由式 (6.2.8) 便证明了引理. 证完.

由定理 6.1.14 立即有

定理 6.2.2 第六类例外对称 Siegel 域 $R_{VI}(27)$ 的 Bergman 核函数为

$$K(z,\overline{z}) = \lambda_0\Delta_0(\mathrm{Im}\,(z))^{-18}, \quad \forall\ z \in R_{VI}(27). \tag{6.2.14}$$

Bergman 度量为

$$ds^2 = -18\Delta_0(\mathrm{Im}\,z)^{-2}[d\Delta_0(\mathrm{Im}\,z)\overline{d}\Delta_0(\mathrm{Im}\,z) - \Delta_0(\mathrm{Im}\,z)d\overline{d}\Delta_0(\mathrm{Im}\,z)]. \tag{6.2.15}$$

Cauchy–Szegö 核为

$$S(z,\overline{\xi}) = \lambda_0'\Delta_0(\frac{1}{2\sqrt{-1}}(z-\overline{\xi}))^{-9}, \tag{6.2.16}$$

其中 $z \in R_{VI}(27)$,$\xi \in S(R_{VI}(27))$ 为 Siegel 域 $R_{VI}(27)$ 的 Silov 边界, 即

$$S(R_{VI}(27)) = \{\mathrm{Im}\,\xi = 0\} = \mathbb{R}^{27}. \tag{6.2.17}$$

Poisson 核为

$$P(z,\overline{\xi}) = \frac{|S(z,\overline{\xi})|^2}{S(z,\overline{z})} = \lambda_0'\frac{\Delta_0(\frac{1}{2\sqrt{-1}}(z-\overline{z}))^9}{|\Delta_0(\frac{1}{2\sqrt{-1}}(z-\overline{\xi})|^{18}}. \tag{6.2.18}$$

证 令 $n_{ij} = 8, 1 \le i < j \le 3$, 所以 $n_i + n_i' = 18, 1 \le i \le 3, m_i = 0, 1 \le i \le 3$. 由于 $\sum_{i=1}^{j}\mu_i n_{ij} = -(n_j + n_j'), \sum_{i=1}^{j}\lambda_i n_{ij} = -\frac{1}{2}(n_i + n_i')$, 所以 $2\lambda_i = \mu_i, \mu_1 = -18, 8\mu_1 + \mu_2 = -18, 8\mu_1 + 8\mu_2 + \mu_3 = -18$. 因此

$$\mu_1 = -18, \mu_2 = 126, \mu_3 = -882.$$

令

$$K(z,\overline{z}) = \lambda_0(\det C_1(\mathrm{Im}\,z))^{\mu_1}(\det C_2(\mathrm{Im}\,z))^{\mu_2}(\det C_3(\mathrm{Im}\,z))^{\mu_3}.$$

由式 (6.2.10)—(6.2.12), 代入便算出式 (6.2.14). 由 $\lambda_i = \frac{1}{2}\mu_i$, 所以有式 (6.2.16), 于是显然有式 (6.2.18). 证完.

由此可见, 利用正规 Siegel 域 $D(V_N, F)$ 的 Bergman 核函数、Bergman 度量、Bergman 映射、有界域的表达形式, Cauchy–Szegö 核函数和 Poisson 核函数的一般表达式, 可以很简单地给出例外对称 Siegel 域的 Bergman 核函数、Bergman 度量、Bergman 映射、有界域的表达形式, Cauchy–Szegö 核函数和 Poisson 核函数. 当然这些表达式比较复杂.

关于式 (6.2.18) 给出的 Poisson 核适合关于 Bergman 度量的 Laplace-Beltrami 算子 Δ, 我们已给出证明. 证明见作者的专著《$\mathbb{C}^n$ 中的齐性有界域理论》(科学出版社 2000 年出版).

由定理 6.1.16, 有

定理 6.2.3 设 $R_{VI}(27)$ 为第六类例外对称 Siegel 域, 它的全纯自同构群 Aut $(R_{VI}(27))$ 的李代数记为 aut $(R_{VI}(27))$. 记单可递连通全纯自同构群 $T(R_{VI}(27))$ 的李代数为 $t(R_{VI}(27))$, 记固定点

$$\sqrt{-1}v_0 = \sqrt{-1}(1,0,1,\cdots,1,0)$$

的迷向子群 Iso $(R_{VI}(27))$ 的李代数为 iso $(R_{VI}(27))$. 则有如下子空间直接和分解

$$\begin{aligned}\text{aut}\,(R_{VI}(27)) = &\ t(R_{VI}(27)) + \text{iso}\,(R_{VI}(27))\\ = &\ L_{-2} + L_0 + L_2,\end{aligned} \tag{6.2.19}$$

其中

$$L_0 = L_{01} + L_{02} + L_{03},\ t(R_{VI}(27)) = L_{-2} + L_{01}. \tag{6.2.20}$$

(1) L_{-2} 有基:

$$\frac{\partial}{\partial s_i}, 1 \leq i \leq 3; \quad e_t\frac{\partial'}{\partial z_{ij}}, 1 \leq t \leq 8,\ 1 \leq i < j \leq 3;$$

(2) $L_0 = L_{01} + L_{02} + L_{03}$ 为子空间直接和, 其中

L_{01} 有基: $1 \leq t \leq 8$,

$$A_1 = 2s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + z_{12} \frac{\partial'}{\partial z_{12}} + z_{13} \frac{\partial'}{\partial z_{13}},$$

$$A_2 = 2s_2 \frac{\partial}{\partial s_2} + z_{12} \frac{\partial'}{\partial z_{12}} + z_{23} \frac{\partial'}{\partial z_{23}},$$

$$A_3 = 2s_3 \frac{\partial}{\partial s_3} + z_{13} \frac{\partial'}{\partial z_{13}} + z_{23} \frac{\partial'}{\partial z_{23}},$$

$$X_{12}^{(t)} = 2(e_t z_{12}') \frac{\partial}{\partial s_1} + s_2 (e_t \frac{\partial'}{\partial z_{12}}) + z_{23} P_t' \frac{\partial'}{\partial z_{13}},$$

$$X_{13}^{(t)} = 2(e_t z_{13}') \frac{\partial}{\partial s_1} + s_3 (e_t \frac{\partial'}{\partial z_{13}}) + \sum_r (e_t P_r z_{23}') e_r \frac{\partial'}{\partial z_{12}},$$

$$X_{23}^{(t)} = 2(e_t z_{23}') \frac{\partial}{\partial s_2} + s_3 (e_t \frac{\partial'}{\partial z_{23}}) + \sum_r (z_{13} P_r e_t') e_r \frac{\partial'}{\partial z_{12}};$$

L_{02} 有基: $1 \leq s < t \leq 8$,

$$P_{st} = 2z_{12}(e_s' e_t - e_t' e_s) \frac{\partial'}{\partial z_{12}} - z_{13} P_t P_s' \frac{\partial'}{\partial z_{13}} + z_{23} P_s' P_t \frac{\partial'}{\partial z_{23}};$$

L_{03} 有基: $1 \leq t \leq 8$,

$$Z_{12}^{(t)} = 2(e_t z_{13}') \frac{\partial}{\partial s_2} + s_1 (e_t \frac{\partial'}{\partial z_{12}}) + z_{13} P_t \frac{\partial'}{\partial z_{23}},$$

$$Z_{13}^{(t)} = 2(e_t z_{13}') \frac{\partial}{\partial s_3} + s_1 (e_t \frac{\partial'}{\partial z_{13}}) + \sum_r (z_{12} e_r') e_t P_t \frac{\partial'}{\partial z_{23}},$$

$$Z_{23}^{(t)} = 2(e_t z_{23}') \frac{\partial}{\partial s_3} + s_2 (e_t \frac{\partial'}{\partial z_{23}}) + \sum_r (z_{12} e_r') e_t P_t' \frac{\partial'}{\partial z_{13}},$$

(3) L_2 有基: $1 \leq t \leq 8$, $1 \leq i < j \leq 3$,

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2} s_1 A_1 + \frac{1}{2} \sum_r (e_r z_{12}') Z_{12}^{(r)} + \frac{1}{2} \sum_r (e_r z_{13}') Z_{13}^{(r)} \\ &= s_1^2 \frac{\partial}{\partial s_1} + z_{12} z_{12}' \frac{\partial}{\partial s_2} + z_{13} z_{13}' \frac{\partial}{\partial s_3} + s_1 z_{12} \frac{\partial'}{\partial z_{12}} \\ &\quad + s_1 z_{13} \frac{\partial'}{\partial z_{13}} + \sum_r (z_{12} e_r') z_{13} P_r \frac{\partial'}{\partial z_{23}}, \end{aligned}$$

$$B_2=\frac{1}{2}s_2A_2+\frac{1}{2}\sum_r(e_rz_{12}')X_{12}^{(r)}+\frac{1}{2}\sum_r(e_rz_{23}')Z_{23}^{(r)}$$

$$=s_2^2\frac{\partial}{\partial s_2}+z_{12}z_{12}'\frac{\partial}{\partial s_1}+z_{23}z_{23}'\frac{\partial}{\partial s_3}+s_2z_{12}\frac{\partial'}{\partial z_{12}}$$

$$+s_2z_{23}\frac{\partial'}{\partial z_{23}}+\sum_r(z_{12}e_r')z_{23}P_r\frac{\partial'}{\partial z_{13}},$$

$$B_3=\frac{1}{2}s_3A_3+\frac{1}{2}\sum_r(e_rz_{13}')X_{13}^{(r)}+\frac{1}{2}\sum_r(e_rz_{23}')X_{23}^{(r)}$$

$$=s_3^2\frac{\partial}{\partial s_3}+z_{13}z_{13}'\frac{\partial}{\partial s_1}+z_{23}z_{23}'\frac{\partial}{\partial s_2}+s_3z_{13}\frac{\partial'}{\partial z_{13}}$$

$$+s_3z_{23}\frac{\partial'}{\partial z_{23}}+\sum_r(z_{13}P_rz_{23}')e_r\frac{\partial'}{\partial z_{12}},$$

$$T_{ij}^{(t)}=[X_{ij}^{(t)},B_i]=[Z_{ij}^{(t)},B_j].$$

证 令 $n_{12}=n_{13}=n_{23}=8$, 由定理 6.1.16, 可知这时 $Z_{ij}^{(t)}-X_{ij}^{(t)},1\le t\le 8,1\le i<j\le 3$ 及 $\frac{\partial}{\partial s_i}+B_i,1\le i\le 3,e_t\frac{\partial'}{\partial z_{ij}}+T_{ij}^{(t)},1\le t\le 8,1\le i<j\le 3$ 都在 $\mathrm{iso}(R_{VI}(27))$ 中. 所以, 我们只要证明子空间 L_{02} 有基 $P_{st},1\le s<t\le 8$ 就够了.

先证 $P_{st}\in L_{02}$, 即证

$$(-P_tP_s')P_p-P_p(P_s'P_t)=\sum_r e_r(2(e_s'e_t-e_t'e_s))e_p'P_r.$$

由 $s<t$ 时,

$$\begin{aligned}P_tP_s'P_p&=2\delta_{sp}P_t-P_tP_p'P_s=2\delta_{sp}P_t-2\delta_{tp}P_s+P_pP_t'P_s\\&=2\delta_{sp}P_t-2\delta_{tp}P_s-P_pP_sP_t'\end{aligned}$$

立即可证.

余下证 P_{st}, $1\le s<t\le 8$ 为基. 问题化为证明: 若 $z_{13}\widetilde{L}_{13}\frac{\partial'}{\partial z_{13}}+z_{23}\widetilde{L}_{23}\frac{\partial'}{\partial z_{23}}\in L_{02}$, 则 $\widetilde{L}_{13}=\widetilde{L}_{23}=0$. 事实上, 由

$$\widetilde{L}_{13}P_p-P_p\widetilde{L}_{23}=0,\quad 1\le p\le 8.$$

取 $p=1$, 有 $\widetilde{L}_{13}=\widetilde{L}_{23}$. 所以 $\widetilde{L}_{13}P_p=P_p\widetilde{L}_{13}, 1\leq p\leq 8$. 这推出 $\widetilde{L}_{12}=0$. 证完.

显然, $t(R_{VI}(27))=L_{-2}+L_{01}$. 又子代数 iso$(R_{VI}(27))$ 有子空间直接和

$$\text{iso}\,(R_{VI}(27)=L_{02}+L'_{03}+L'_2,$$

其中 L'_{03} 有基 $X_{ij}^{(t)}-Z_{ij}^{(t)}, 1\leq t\leq 8, 1\leq i<j\leq 3$, L'_2 有基 $B_i+\dfrac{\partial}{\partial s_i}, 1\leq i\leq 3, T_{ij}^{(t)}+e_t\dfrac{\partial'}{\partial z_{ij}}, 1\leq t\leq 8, 1\leq i<j\leq 3$.

定理 6.2.4 第六类例外对称 Siegel 域 $R_{VI}(27)$ 的连通单可递李群 $T(R_{VI}(27))$ 由映射 $\tau(\alpha,\beta): z\to y$ 构成, 它们定义为

$$C_1(\tau(\alpha,\beta)(z))=P(\alpha)C_1(z)P(\alpha)'+C_1(\beta), \tag{6.2.21}$$

其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^{27}, \alpha_{ii}>0, 1\leq i<j\leq 3$, 又

$$P(\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ 0 & \alpha_{22}I & \sum\limits_r e'_r\alpha_{23}P'_r\\ 0 & 0 & \alpha_{33}I\end{pmatrix}, \tag{6.2.22}$$

$\tau(\alpha,\beta)$ 又可写成 $y=\sigma(\alpha,\beta)z=\sigma(\alpha,\beta)(s_1,z_{12},s_2,z_{13},z_{23},s_3)$, $y=(r_1,y_{12},r_2,y_{13},y_{23},r_3)$, 其中

$$\begin{aligned}
r_1&=\beta_{11}+\alpha_{11}^2s_1+2\alpha_{11}\alpha_{12}z'_{12}+(\alpha_{12}\alpha'_{12})s_2+2\alpha_{11}\alpha_{13}z'_{13}\\
&\quad+\sum(\alpha_{12}e'_r)\alpha_{13}P_rz'_{23}+\alpha_{13}\alpha'_{13}s_3,\\
r_2&=\beta_{22}+\alpha_{22}^2s_2+2\alpha_{22}\alpha_{23}z'_{23}+\alpha_{23}\alpha'_{23}s_3,\\
r_3&=\beta_{33}+\alpha_{33}^2s_3,\\
y_{12}&=\beta_{12}+\alpha_{11}\alpha_{22}z_{12}+\alpha_{22}\alpha_{12}s_2+\alpha_{11}\sum(z_{13}P_r\alpha'_{23})e_r\\
&\quad+\sum(\alpha_{12}e'_r)z_{23}P'_rP_s\alpha'_{23}e_s+\alpha_{22}\sum\alpha_{13}P_rz'_{23}e_r\\
&\quad+s_3\sum(\alpha_{13}P_r\alpha'_{23})e_r,\\
y_{13}&=\beta_{13}+\alpha_{22}\alpha_{33}z_{13}+\alpha_{33}\sum(\alpha_{12}e'_r)z_{23}P'_r+\alpha_{33}\alpha_{13}s_3,\\
y_{23}&=\beta_{23}+\alpha_{22}\alpha_{33}z_{23}+\alpha_{33}\alpha_{23}s_3.
\end{aligned} \tag{6.2.23}$$

证 今 $L_{01}+L_{-2}$ 中元素可表示为 $\xi(z)\dfrac{\partial'}{\partial z}$, 其中

$$\xi(z)=(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{22},\xi_{13},\xi_{23},\xi_{33}).$$

任取 $\rho,\zeta\in\mathbb{R}^{27}$, 则

$$\begin{aligned}
\xi_{11}&=\zeta_{11}+2s_1\rho_{11}+2z_{12}\rho_{12}'+2z_{13}\rho_{13}',\\
\xi_{22}&=\zeta_{22}+2s_2\rho_{22}+2z_{23}\rho_{23}',\\
\xi_{33}&=\zeta_{33}+2s_3\rho_{33},\\
\xi_{12}&=\zeta_{12}+(\rho_{11}+\rho_{22})z_{12}+s_2\rho_{12}\\
&\qquad+\sum(\rho_{13}P_r z_{23})'e_r+\sum(z_{13}P_r\rho_{23}')e_r,\\
\xi_{13}&=\zeta_{13}+(\rho_{11}+\rho_{33})z_{13}+\sum(\rho_{12}e_t')z_{23}P_t'+s_3\rho_{13},\\
\xi_{23}&=(\rho_{22}+\rho_{33})z_{23}+s_3\rho_{23}.
\end{aligned}$$

于是

$$C_1(\xi(z))=P(\rho)C_1(z)+C_1(z)P(\rho)'+C_1(\zeta).$$

即 $y=\tau(\alpha,\beta)(z)$ 为常微分方程组

$$\frac{\partial}{\partial\theta}C_1(y)=P(\rho)C_1(y)+C_1(y)P(\rho)'+C_1(\zeta)$$

的适合初值 $y(0)=z$ 的唯一解析解. 今由归纳法可证

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\theta^k}C_1(y)=\sum_{i=0}^{k}C_k^iP(\rho)^iC_1(y)(P(\rho)')^{k-i},\quad k\geq 2.$$

因此 $C_1(y)$ 关于 θ 在 $\theta=0$ 附近展开成幂级数，有

$$\begin{aligned}
C(y)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}^kC_1(y)}{\mathrm{d}\theta^k}\Big|_{\theta=0}\right)\\
&=C_1(z)+\theta P(\rho)C_1(z)+\theta C_1(z)P(\rho,+\theta C_1(\zeta)\\
&\quad+\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}C_k^i(\theta P(\rho))^iC_1(z)(\theta P(\rho)')^{k-i}
\end{aligned}$$

$$= C_1(\theta\zeta) + \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{i!j!}(\theta P(\rho))^i C_1(z)(\theta P(\rho)')^j$$
$$= C_1(\theta\zeta) + (\exp\theta P(\rho))C_1(z)(\theta P(\rho))'.$$

由归纳法可证唯一存在 $\alpha \in \mathbb{R}^{27}, \alpha_{ii} = \exp(\theta\rho_{ii}) > 0, 1 \leq i \leq 3$, 使得 $\exp\theta P(\rho) = P(\alpha)$. 记 $\theta\zeta = \beta$, 便证明了式 (6.2.21) 成立.

再由式 (6.2.23), 取 $z = \sqrt{-1}v_0, z_0 \in R_{VI}(27), \beta = \operatorname{Re} z_0$, 则可唯一解出 $\alpha \in \mathbb{R}^{27}, \alpha_{ii} > 0, 1 \leq i \leq 3$. 这证明了李群 $T(R_{VI}(27))$ 在域 $R_{VI}(27)$ 上单可递. 证完.

由定理 6.1.15 有

定理 6.2.5 第六类例外对称 Siegel 域 $R_{VI}(27)$ 的 Bergman 映射为全纯同构, 它是标准 Bergman 映射 σ 及一个非异常数线性变换的乘积. 记为 $y = \sigma(z)$, 则有

$$\Delta_0(z + \sqrt{-1}v_0)\Delta_0(y - \sqrt{-1}v_0) = 8. \tag{6.2.24}$$

记 $z = (s_1, z_{12}, s_2, z_{13}, z_{23}, s_3), y = (r_1, y_{12}, r_2, y_{13}, y_{23}, r_3), s_i, r_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq 3, z_{ij}, y_{ij} \in \mathbb{C}^8, 1 \leq i < j \leq 3$, 则 σ 为

$$\begin{aligned}
r_1 - \sqrt{-1} &= 2\Delta_0(z + \sqrt{-1}v_0)^{-1}[(s_2 + \sqrt{-1})(s_3 + \sqrt{-1}) - z_{23}z_{23}'],\\
r_2 - \sqrt{-1} &= 2\Delta_0(z + \sqrt{-1}v_0)^{-1}[(s_1 + \sqrt{-1})(s_3 + \sqrt{-1}) - z_{13}z_{13}'],\\
r_3 - \sqrt{-1} &= 2\Delta_0(z + \sqrt{-1}v_0)^{-1}[(s_1 + \sqrt{-1})(s_2 + \sqrt{-1}) - z_{12}z_{12}'],\\
y_{12} &= -2\Delta_0(z + \sqrt{-1}v_0)^{-1}[(s_3 + \sqrt{-1})z_{12} - \sum(z_{13}P_r z_{23}')e_r],\\
y_{13} &= -2\Delta_0(z + \sqrt{-1}v_0)^{-1}[(s_2 + \sqrt{-1})z_{13} - \sum(z_{12}e_r')z_{23}P_r'],\\
y_{23} &= -2\Delta_0(z + \sqrt{-1}v_0)^{-1}[(s_1 + \sqrt{-1})z_{23} - \sum(z_{12}e_r')z_{13}P_r].
\end{aligned} \tag{6.2.25}$$

σ^{-1} 为

$$\begin{aligned}
s_1 + \sqrt{-1} &= 2\Delta_0(y - \sqrt{-1}v_0)^{-1}[(r_2 - \sqrt{-1})(r_3 - \sqrt{-1}) - y_{23}y_{23}'],\\
s_2 + \sqrt{-1} &= 2\Delta_0(y - \sqrt{-1}v_0)^{-1}[(r_1 - \sqrt{-1})(r_3 - \sqrt{-1}) - y_{13}y_{13}'],\\
s_3 + \sqrt{-1} &= 2\Delta_0(y - \sqrt{-1}v_0)^{-1}[(r_1 - \sqrt{-1})(r_2 - \sqrt{-1}) - y_{12}y_{12}'],
\end{aligned}$$

$$z_{12}=-2\Delta_0(y-\sqrt{-1}v_0)^{-1}[(r_3-\sqrt{-1})y_{12}-\sum(y_{13}P_r y_{23}')e_r],$$
$$z_{13}=-2\Delta_0(y-\sqrt{-1}v_0)^{-1}[(r_2-\sqrt{-1})y_{13}-\sum(y_{12}e_r')y_{23}P_r'],$$
$$z_{23}=-2\Delta_0(y-\sqrt{-1}v_0)^{-1}[(r_1-\sqrt{-1})y_{23}-\sum(y_{12}e_r')y_{13}P_r]. \tag{6.2.26}$$

其中 $v_0=(1,0,1,0,0,1)$, $\Delta_0(z)$ 由式 (6.2.9) 定义.

证　由定理 6.1.15, Bergman 映射为

$$y=\operatorname{grad}_{\overline{z}}(\log K(z,\overline{z})-\log K(\sqrt{-1}v_0,\overline{z}))\big|_{\overline{z}=-\sqrt{-1}v_0}P,$$

其中 P 为非异常数方阵, 而 $K(z,\overline{z})=\lambda_0\Delta_0(\operatorname{Im}z)^{-18}$. 所以

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{d}}\log K(z,\overline{z})|_{\overline{z}=-\sqrt{-1}v_0}=-18\Delta_0(z-\overline{z})^{-1}\overline{\mathrm{d}}\Delta_0(z-\overline{z})|_{\overline{z}=-\sqrt{-1}v_0}\\
=&-18\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)^{-1}[-\overline{\mathrm{d}s_1}(s_2+\sqrt{-1})(s_3+\sqrt{-1})\\
&-\overline{\mathrm{d}s_2}(s_1+\sqrt{-1})(s_3+\sqrt{-1})-\overline{\mathrm{d}s_3}(s_1+\sqrt{-1})(s_2+\sqrt{-1})\\
&+\overline{\mathrm{d}s_3}z_{12}z_{12}'+2(s_3+\sqrt{-1})\overline{\mathrm{d}z_{12}}z_{12}'+\overline{\mathrm{d}s_2}z_{13}z_{13}'\\
&+2(s_2+\sqrt{-1})\overline{\mathrm{d}z_{13}}z_{13}'+\overline{\mathrm{d}s_1}z_{23}z_{23}'+2(s_1+\sqrt{-1})\overline{\mathrm{d}z_{23}}z_{23}'\\
&-2\sum(\overline{\mathrm{d}z_{12}}e_r')z_{13}P_r z_{23}'-2\sum(z_{12}e_r')\overline{\mathrm{d}z_{13}}P_r z_{23}'\\
&-2\sum(z_{12}e_r')z_{13}P_r\overline{\mathrm{d}z_{23}}'].
\end{aligned}$$

详细写出而且适当取非异常数方阵 P, 便给出了 σ. 由直接计算可算出 σ^{-1}. 证完.

为了给出 Bergman 映射 σ 的像, 我们来求 $(C_1(z)+\sqrt{-1}I)^{-1}=C_1(z+\sqrt{-1}v_0)^{-1}$. 由式 (6.2.7),(6.2.8) 及 (6.2.9), 有

$$C_1(z+\sqrt{-1}v_0)^{-1}=Q(z+\sqrt{-1}v_0)'\Lambda(z+\sqrt{-1}v_0)^{-1}Q(z+\sqrt{-1}v_0).$$

记 Bergman 映射 σ 为 $y=\sigma(z)$, 则 $Q(z+\sqrt{-1}v_0)$ 为

$$\begin{pmatrix}1&(r_1-\sqrt{-1})^{-1}y_{12}&0\\0&I&0\\0&0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-(s_3+\sqrt{-1})^{-1}z_{13}\\0&I&-(s_3+\sqrt{-1})^{-1}R(z_{23})\\0&0&I\end{pmatrix},$$

于是记

$$Z(y)=C_1(y)+(r_1-\sqrt{-1})^{-1}\begin{pmatrix}0&0\\0&W(y)\end{pmatrix}, \tag{6.2.27}$$

其中

$$W(y)=\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12}' & w_{22} \end{pmatrix},$$

$$w_{11}=y_{12}'y_{12}-y_{12}y_{12}'I,\quad w_{22}=y_{13}'y_{13}-y_{13}y_{13}'I,$$
$$w_{12}=y_{12}'y_{13}-R(\sum(y_{12}e_r')y_{13}P_r).$$

则

$$C_1(z+\sqrt{-1}v_0)^{-1}=(C_1(z)+\sqrt{-1}I)^{-1}=\frac{1}{2}(Z(y)-\sqrt{-1}I).\quad(6.2.28)$$

因此有

$$C_1(z)=-\sqrt{-1}(Z(y)+\sqrt{-1}I)(Z(y)-\sqrt{-1}I)^{-1},\qquad(6.2.29)$$

$$Z(y)=\sqrt{-1}(C_1(z)-\sqrt{-1}I)(C-1(z)+\sqrt{-1}I)^{-1}.\qquad(6.2.30)$$

定理 6.2.6 设 $R_{VI}(27)$ 为第六类例外对称 Siegel 域，σ 为由式 (6.2.25) 定义的域 $R_{VI}(27)$ 上的 Bergman 映射. 记 $\sigma(z)=y$, 则 $\sigma(R_{VI}(27))=\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 可表示为

$$I-Z(y)\overline{Z(y)}'>0,\qquad(6.2.31)$$

其中 $Z(y)$ 由式 (6.2.27) 定义. 域 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 是 27 维复 Euclid 空间 $\mathbb{C}^{27}$ 中包含原点的有界域，称为**第六类例外典型域**.

证 由式 (6.2.29), 所以 $\operatorname{Im}C_1(z)>0$ 等价于

$$\operatorname{Im}C_1(z)=(Z(y)-\sqrt{-1}I)^{-1}(I-Z(y)\overline{Z(y)}')(\overline{Z(y)}'+\sqrt{-1}I)^{-1},$$

即 $I-Z(y)\overline{Z(y)}'>0$. 显然域 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 为包含原点的有界域. 证完.

定理 6.2.7 第六类例外典型域 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 有单可递全纯自同构群

$$T(\mathfrak{R}_{VI}(27))=\{\tau=\tau(\alpha,\beta)\mid\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}^{27}\},\qquad(6.2.32)$$

其中

$$\alpha = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}), \quad \alpha_{ii} > 0, \quad 1 \le i \le 3,$$
$$\alpha_{ij} \in \mathbb{R}^8, \quad 1 \le i < j \le 3,$$

又 τ 定义为

$$Z(\tau(y)) = -(Z(y)A + B)^{-1}(Z(y)\overline{B} + \overline{A}), \tag{6.2.33}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= P(\alpha)' - P(\alpha)^{-1} + \sqrt{-1}P(\alpha)^{-1}C_1(\beta), \\ B &= \sqrt{-1}(P(\alpha)' + P(\alpha)^{-1}) + P(\alpha)^{-1}C_1(\beta). \end{aligned} \tag{6.2.34}$$

证　由定理 6.2.4 可知，第六类例外对称 Siegel 域 $R_{VI}(27)$ 有单可递仿射自同构群

$$T(R_{VI}(27)) = \{\sigma(\alpha, \beta) \mid \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{27}, \alpha_{ii} > 0, 1 \le i \le 3\},$$

其中 $\sigma(\alpha, \beta)$ 定义为

$$C_1(\sigma(\alpha, \beta)z) = P(\alpha)C_1(z)P(\alpha)' + C_1(\beta),$$

这里 $P(\alpha)$ 由式 (6.2.22) 定义．由定理 6.2.5 可知第六类例外对称 Siegel 域 $R_{VI}(27)$ 到第六类例外典型域 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 上的 Bergman 映射 σ 为全纯同构，且式 (6.2.30) 给出

$$Z(\sigma(z)) = \sqrt{-1}(C_1(z) + \sqrt{-1}I)^{-1}(C_1(z) - \sqrt{-1}I).$$

由于域 $R_{VI}(27)$ 的全纯自同构 $\sigma(\alpha, \beta)$ 诱导了域 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 的全纯自同构 $\tau(\alpha, \beta) = \sigma \circ \sigma(\alpha, \beta) \circ \sigma^{-1}$，且当 α, β 遍历 $\mathbb{R}^{27}$ 中适合 $\alpha_{ii} > 0, 1 \le i \le 3$ 的元素时，由李群 $T(R_{VI}(27))$ 在域 $R_{VI}(27)$ 上单可递，可知李群 $T(\mathfrak{R}_{VI}(27))$ 在域 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 上单可递，由式

(6.2.29) 及 (6.2.30) 有

$$
\begin{aligned}
&Z(\tau(\alpha,\beta)y) = Z(\tau(\alpha,\beta)(\sigma(z)) = Z(\sigma(\tau(\alpha,\beta)(z)))\\
&= \sqrt{-1}(C_1(\sigma(\alpha,\beta)(z)) + \sqrt{-1}I)^{-1}(C_1(\sigma(\alpha,\beta)(z)) - \sqrt{-1}I)\\
&= \sqrt{-1}(P(\alpha)C_1(z)P(\alpha)' + C_1(\beta) + \sqrt{-1}I)^{-1}\\
&\quad (P(\alpha)C_1(z)P(\alpha)' + C_1(\beta) - \sqrt{-1}I)\\
&= \sqrt{-1}[-\sqrt{-1}P(\alpha)(Z(y) - \sqrt{-1}I)^{-1}(Z(y) + \sqrt{-1}I)P(\alpha)'\\
&\quad + C_1(\beta) + \sqrt{-1}I]^{-1}[-\sqrt{-1}P(\alpha)(Z(y) - \sqrt{-1}I)^{-1}\\
&\quad (Z(y) + \sqrt{-1}I)P(\alpha)' + C_1(\beta) - \sqrt{-1}I]\\
&= (Z(y) + \sqrt{-1}I)P(\alpha)' + \sqrt{-1}(Z(y) - \sqrt{-1}I)\\
&\quad P(\alpha)^{-1}(C_1(\beta) + \sqrt{-1}I))^{-1}(-\sqrt{-1}(Z(y) + \sqrt{-1}I)\\
&\quad P(\alpha)' + (Z(y) - \sqrt{-1}I)P(\alpha)^{-1}(C_1(\beta) - \sqrt{-1}I))\\
&= (Z(y)A + B)^{-1}(Z(y)\overline{B} + \overline{A}),
\end{aligned}
$$

其中 17×17 复方阵 A, B 由式 (6.2.34) 定义. 证完.

推论 符号同上. 记 $C_1(\delta) = P(\alpha)P(\alpha)'$, 则第六类例外典型域 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 有参数表示

$$
\{\sqrt{-1}(I+\sqrt{-1}C_1(\beta+\sqrt{-1}\delta)(I-\sqrt{-1}C_1(\beta+\sqrt{-1}\delta))^{-1}\}, \tag{6.2.35}
$$

其中 $\alpha = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}), \beta \in \mathbb{R}^{27}, \alpha_{ii} > 0, 1 \le i \le 3$.

证 由于李群 $T(\mathfrak{R}_{VI}(27))$ 在域 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 上单可递, 且域 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 包含原点, 取 $y = 0$, 便证明了推论. 证完.

上面给出了第六类例外典型域的正规 Siegel 域表达形式及有界域表达形式. 而 Seigel 域表达形式具有简单于有界域表达形式的特点. 同样, 我们可以在有界域表达形式上计算 Bergman 核函数、 Bergman 度量以及 Cauchy-Szegö 核、 Poisson 核. 但是计算这些函数, 其目的在于研究域的函数论性质, 由于在全纯等价下全纯函数的函数论性质不改变. 因此我们就不再计算上述各种核函数. 留给读者.

不过, Bergman 映射有一个重要特点, 即在上面给出的有界域表达形式 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 上, 原点的迷向子群由线性自同构群构成. 定理

6.2.7 告诉我们, 域 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 上的单可递全纯自同构群 $T(\mathfrak{R}_{VI}(27))$ 由分式线性变换构成. 另一方面, 已知在正规 Siegel 域表达形式 $R_{VI}(27)$ 上的单可递全纯自同构群 $T(R_{VI}(27))$ 由线性自同构构成, 而固定点 $\sqrt{-1}v_0 = (\sqrt{-1}, 0, \sqrt{-1}, 0, 0, \sqrt{-1})$ 的迷向子群部分由线性自同构构成, 部分由分式线性变换构成.

下面我们来求第六类例外典型域 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 的原点迷向子群.

由于 σ 为 Bergman 映射时, 域 $\sigma(R_{VI}(27)) = \mathfrak{R}_{VI}(27)$ 的原点迷向子群 $\mathrm{Iso}\,(\mathfrak{R}_{VI}(27))$ 由非异线性变换构成, 它具有表达简单的特点, 因此我们先来计算齐性有界域 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 上的原点迷向子群 $\mathrm{Iso}\,(\mathfrak{R}_{VI}(27))$ 的李代数

$$\begin{aligned}\mathrm{iso}\,(\mathfrak{R}_{VI}(27)) &= \sigma_*(\mathrm{iso}\,(R_{VI}(27))) = \sigma_*(L_{02} + L'_{03} + L'_2)\\ &= \sigma_*(L_{02} + \sigma_*(L'_{03}) + \sigma_*(L'_2).\end{aligned}$$

定理 6.2.8 符号同上.

(1) 子空间 $\sigma_*(L_{02})$ 有基

$$\sigma_*(P_{ij}) = P_{ij}, \quad 1 \le i < j \le 8; \tag{6.2.36}$$

(2) 子空间 $\sigma_*(L'_{03})$ 有基

$$\sigma_*(X_{ij}^{(t)} - Z_{ij}^{(t)}) = C_{ij}^{(t)} - B_{ij}^{(t)},\ 1 \le t \le 8,\ 1 \le i < j \le 3, \tag{6.2.37}$$

其中

$$\begin{aligned}B_{12}^{(t)} &= 2(y_{12}e'_t)\frac{\partial}{\partial r_1} + r_2 e_t \frac{\partial'}{\partial y_{12}} + y_{23}P'_t \frac{\partial'}{\partial y_{13}},\\ B_{13}^{(t)} &= 2(y_{13}e'_t)\frac{\partial}{\partial r_1} + r_3 e_t \frac{\partial'}{\partial y_{13}} + \sum_r (e_t P_r y'_{23} e_r)\frac{\partial'}{\partial y_{12}},\\ B_{23}^{(t)} &= 2(y_{23}e'_t)\frac{\partial}{\partial r_2} + r_3 e_t \frac{\partial'}{\partial y_{23}} + \sum_r (y_{13}P_r e'_t) e_r \frac{\partial'}{\partial y_{12}},\end{aligned}$$

$$C_{12}^{(t)} = 2(y_{12}e_t')\frac{\partial}{\partial r_2} + r_1 e_t\frac{\partial'}{\partial y_{12}} + y_{13}P_t'\frac{\partial'}{\partial y_{23}},$$

$$C_{13}^{(t)} = 2(y_{13}e_t')\frac{\partial}{\partial r_3} + r_1 e_t\frac{\partial'}{\partial y_{13}} + \sum_r y_{12}e_r'e_tP_r\frac{\partial'}{\partial y_{23}}, \qquad (6.2.38)$$

$$C_{23}^{(t)} = 2(y_{23}e_t')\frac{\partial}{\partial r_3} + r_2 e_t\frac{\partial'}{\partial y_{23}} + \sum_r y_{12}e_r'e_tP_r'\frac{\partial'}{\partial y_{13}};$$

(3) 子空间 $\sigma_*(L_2')$ 有基

$$\sigma_*(B_1') = \sqrt{-1}(2r_1\frac{\partial}{\partial r_1} + y_{12}\frac{\partial'}{\partial y_{12}} + y_{13}\frac{\partial'}{\partial y_{13}}),$$

$$\sigma_*(B_2') = \sqrt{-1}(2r_2\frac{\partial}{\partial r_2} + y_{12}\frac{\partial'}{\partial y_{12}} + y_{23}\frac{\partial'}{\partial y_{23}}),$$

$$\sigma_*(B_3') = \sqrt{-1}(2r_3\frac{\partial}{\partial r_3} + y_{13}\frac{\partial'}{\partial y_{13}} + y_{23}\frac{\partial'}{\partial y_{23}}), \qquad (6.2.39)$$

$$\sigma_*(e_t\frac{\partial'}{\partial z_{ij}} + T_{ij}^{(t)}) = \sqrt{-1}(B_{ij}^{(t)} + C_{ij}^{(t)}),$$

这里 $1 \le t \le 8,\ 1 \le i < j \le 3$.

证　记 $\sigma(z) = y$. 记 $y = (y_1, \cdots, y_{27}), z = (z_1, \cdots, z_{27})$. 写成函数表达式为 $y_i = f_i(z), 1 \le i \le 27$, 于是 $\mathrm{d}y_i = \sum\limits_j \frac{\partial f_i(z)}{\partial z_j}\mathrm{d}z_j$. 任取域 $R_{VI}(27)$ 上的向量场 $\xi(z)\frac{\partial'}{\partial z} = \sum\limits_i \xi_i(z)\frac{\partial}{\partial z_i}$, 则

$$\sigma_*(\sum_i \xi_i(z)\frac{\partial}{\partial z_i}) = \sum_{i,j}\xi_i(z)\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_j \eta_j(y)\frac{\partial}{\partial y_j},$$

所以

$$\eta_j(y) = \sum_i \xi_i(z)\frac{\partial f_j}{\partial z_i}.$$

比较式 $\mathrm{d}y_i = \sum\limits_j \frac{\partial f_i(z)}{\partial z_j}\mathrm{d}z_j$ 可知, 易 $\mathrm{d}y_i$ 为 η_i, $\mathrm{d}z_j$ 为 ξ_j, 则得

$\eta_j = \sum \dfrac{\partial f_j}{\partial z_i}\xi_i$. 由定理 6.2.5, 记

$$\eta(y) = (\eta_{11}(y), \eta_{12}(y), \eta_{22}(y), \eta_{13}(y), \eta_{23}(y), \eta_{33}(y)),$$
$$\xi(z) = (\xi_{11}(y), \xi_{12}(y), \xi_{22}(y), \xi_{13}(y), \xi_{23}(y), \xi_{33}(y)),$$

则有

$$\begin{aligned}
\eta_{11} = & -2\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)^{-2}\mathrm{d}\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)|_{\mathrm{d}z=\xi} \\
& ((s_2+\sqrt{-1})(s_3+\sqrt{-1}) - z_{23}z'_{23}) + 2\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)^{-1} \\
& [\xi_{22}(z)(s_3+\sqrt{-1}) + \xi_{33}(z)(s_2+\sqrt{-1}) - 2\xi_{23}(z)z'_{23}], \\
\eta_{22} = & -2\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)^{-2}\mathrm{d}\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)|_{\mathrm{d}z=\xi} \\
& ((s_1+\sqrt{-1})(s_3+\sqrt{-1}) - z_{13}z'_{13}) + 2\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)^{-1} \\
& [\xi_{11}(z)(s_3+\sqrt{-1}) + \xi_{33}(z)(s_1+\sqrt{-1}) - 2\xi_{13}(z)z'_{13}], \\
\eta_{33} = & -2\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)^{-2}\mathrm{d}\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)|_{\mathrm{d}z=\xi} \\
& ((s_1+\sqrt{-1})(s_2+\sqrt{-1}) - z_{12}z'_{12}) + 2\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)^{-1} \\
& [\xi_{11}(z)(s_2+\sqrt{-1}) + \xi_{22}(z)(s_1+\sqrt{-1}) - 2\xi_{12}(z)z'_{12}], \\
\eta_{12} = & 2\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)^{-2}\mathrm{d}\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)|_{\mathrm{d}z=\xi} \\
& ((s_3+\sqrt{-1})z_{12} - \sum(z_{13}P_r z'_{23})e_r) - 2\Delta_0(z-\sqrt{-1}v_0)^{-1} \\
& [\xi_{33}(z)z_{12} + (s_3+\sqrt{-1})\xi_{12} - \sum(\xi_{13}(z)P_r z'_{23} \\
& + z_{13}P_r\xi_{23}(z)')e_r], \\
\eta_{13} = & 2\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)^{-2}\mathrm{d}\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)|_{\mathrm{d}z=\xi} \\
& ((s_2+\sqrt{-1})z_{13} - \sum(z_{12}e'_r)z_{23}P_r) - 2\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)^{-1} \\
& [\xi_{22}(z)z_{13} + (s_2+\sqrt{-1})\xi_{13} - \sum(\xi_{12}e'_r)z_{23}P'_r \\
& - \sum(z_{12}e_r)\xi_{23}P'_r], \\
= & 2\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)^{-2}\mathrm{d}\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)|_{\mathrm{d}z=\xi} \\
& ((s_1+\sqrt{-1})z_{23} - \sum(z_{12}e'_r)z_{13}P_r) - 2\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)^{-1} \\
\eta_{23} = & [\xi_{11}(z)z_{23} + (s_1+\sqrt{-1})\xi_{23} - \sum(\xi_{12}(z)e'_r)z_{13}P_r \\
& - \sum(z_{12}e'_r)\xi_{13}P_r],
\end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)|_{\mathrm{d}z=\xi}\\
=&\ \xi_{11}(z)((s_2+\sqrt{-1})(s_3+\sqrt{-1})-z_{23}z_{23}')\\
&+\xi_{22}(z)((s_1+\sqrt{-1})(s_3+\sqrt{-1})-z_{13}z_{13}')\\
&+\xi_{33}(z)((s_1+\sqrt{-1})(s_2+\sqrt{-1})-z_{12}z_{12}')\\
&+2\xi_{12}(z)(\sum(z_{13}P_rz_{23}')e_r-(s_3+\sqrt{-1})z_{12}')\\
&+2\xi_{13}(z)(\sum(z_{12}e_r')P_rz_{23}'-(s_2+\sqrt{-1})z_{13}')\\
&+2\xi_{23}(z)(\sum(z_{12}e_r')z_{13}P_r-(s_1+\sqrt{-1})z_{23}').
\end{aligned}
$$

任取 $\alpha=(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{22},\alpha_{13},\alpha_{23},\alpha_{33})\in\mathbb{R}^{27},\beta_{ij}\in\mathbb{R}^8$. 取

$$
\begin{aligned}
\xi(z)\frac{\partial'}{\partial z}=&\sum_i\alpha_{ii}(\frac{\partial}{\partial s_i}+B_i)+\sum_{i<j}\sum_t(\alpha_{ij}e_t')(e_t\frac{\partial'}{\partial z_{ij}}+T_{ij}^{(t)})\\
&+\sum_{i<j}\sum_t(\beta_{ij}e_t')(X_{ij}^{(t)}-Z_{ij}^{(t)}),
\end{aligned}
$$

代入上面的公式，利用定理 6.2.5 便证明了定理．证完．

于是，立即有

定理 6.2.9 第六类例外典型域 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 是关于原点的圆型域，所以是对称有界域．对称变换为 $y\to -y$.

证 令 $\sigma^*(B_1'+B_2'+B_3')=2\sqrt{-1}y\dfrac{\partial'}{\partial y}$，而 $\exp(\sqrt{-1}\theta y\dfrac{\partial'}{\partial y})$ 为 $y\to ye^{\sqrt{-1}\theta},\forall\,\theta\in\mathbb{R}$，所以证明了定理．证完．

定理 6.2.10 第六类例外对称 Siegel 域 $R_{VI}(27)$ 的点 $\sqrt{-1}v_0$ 的对称变换为

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{s}_1=\Delta_0^{-1}(s_2s_3-z_{23}z_{23}'),\quad \widetilde{z}_{12}=\Delta_0^{-1}(s_3z_{12}-\sum z_{13}P_rz_{23}'e_r),\\
&\widetilde{s}_2=\Delta_0^{-1}(s_1s_3-z_{13}z_{13}'),\quad \widetilde{z}_{13}=\Delta_0^{-1}(s_2z_{13}-\sum(z_{12}e_r')z_{23}P_r'),\\
&\widetilde{s}_3=\Delta_0^{-1}(s_1s_2-z_{12}z_{12}'),\quad \widetilde{z}_{23}=\Delta_0^{-1}(s_1z_{23}-\sum(z_{12}e_r')z_{13}P_r),
\end{aligned}
\tag{6.2.40}
$$

其中

$$\Delta_0 = s_1s_2s_3 - s_1z_{23}z'_{23} - s_2z_{13}z'_{13} - s_3z_{12}z'_{12} + 2\sum(z_{12}e'_r)z_{13}P_rz'_{23}.$$

证 今域 $\mathfrak{R}_{VI}(27) = \sigma(R_{VI}(27))$ 有原点对称变换 τ: $\widetilde{y} = -y$. 所以域 $R_{VI}(27)$ 有点 $\sqrt{-1}v_0$ 的对称变换 $\sigma^{-1}\circ\tau\circ\sigma$. 由定理 6.2.5 及直接计算立即可证. 证完.

在定理 6.2.7 中，我们已经算出对称有界域 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 的单可递全纯自同构群 G_0. 下面来计算对称有界域 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 的原点迷向子群 $\mathrm{Iso}\,(\mathfrak{R}_{VI}(27))$.

定理 6.2.11 第六类例外典型域 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 的原点迷向子群的单位连通分支有如下生成元素：

(1) $\exp L_{02} = G_{02}$ 为原点迷向子群 $\mathrm{Iso}\,(\mathfrak{R}_{VI}(27))$ 的连通子群，它为

$$r_i \to r_i,\ 1 \le i \le 3, \quad y_{ij} \to y_{ij}O_{ij},\ 1 \le i < j \le 3, \tag{6.2.41}$$

$$O_{13}P_tO'_{23} = \sum_r (e_rO_{12}e'_t)P_r, \quad 1 \le t \le 8, \tag{6.2.42}$$

其中 $O_{12}, O_{13} \in \mathrm{O}\,(8)$.

(2) $\exp \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_{ii}\sigma^*(B_i + \dfrac{\partial}{\partial s_i})$, $\forall\, \alpha_{ii} \in \mathbb{R}, 1 \le i \le 3$, 为

$$r_i \to r_ie^{2\sqrt{-1}\alpha_{ii}},\ y_{ij} \to y_{ij}e^{\sqrt{-1}(\alpha_{ii}+\alpha_{jj})},\ 1 \le i < j \le 3. \tag{6.2.43}$$

(3) 任取 $\theta_{ij} \in \mathbb{R}, \alpha_{ij} \in \mathbb{R}^8, \alpha_{ij}\alpha'_{ij} = 1$, 则

(a) $\exp\theta_{12}\sum\limits_t(\alpha_{12}e'_t)\sigma_*(X^{(t)}_{12} - Z^{(t)}_{12})$ 为 $v_3 = r_3$,

$$\begin{aligned}
v_1 &= r_1\cos^2\theta_{12} + r_2\sin^2\theta_{12} - y_{12}\alpha'_{12}\sin 2\theta_{12},\\
v_2 &= r_1\sin^2\theta_{12} + r_2\cos^2\theta_{12} + y_{12}\alpha'_{12}\sin 2\theta_{12},\\
w_{12} &= y_{12} - 2y_{12}\alpha'_{12}(\sin^2\theta_{12})\alpha_{12} + \frac{1}{2}(r_1 - r_2)(\sin 2\theta_{12})\alpha_{12},\\
w_{13} &= y_{13}\cos\theta_{12} - (\sin\theta_{12})y_{23}A'_{12},\\
w_{23} &= y_{23}\cos\theta_{12} + (\sin\theta_{12})y_{13}A_{12}.
\end{aligned} \tag{6.2.44}$$

(b) $\exp \theta_{13} \sum_t (\alpha_{13} e_t') \sigma_* (X_{13}^{(t)} - Z_{13}^{(t)})$ 为 $v_2 = r_2$,

$$
\begin{aligned}
v_1 &= r_1 \cos^2 \theta_{13} + r_3 \sin^2 \theta_{13} - (y_{13} \alpha_{13}') \sin 2\theta_{13}, \\
v_3 &= r_1 \sin^2 \theta_{13} + r_3 \cos^2 \theta_{13} + (y_{13} \alpha_{13}') \sin 2\theta_{13}, \\
w_{12} &= y_{12} \cos \theta_{13} - y_{23} A_{13} \sin \theta_{13}, \\
w_{13} &= y_{13} - 2(y_{13} \alpha_{13}')(\sin^2 \theta_{13}) \alpha_{13} + \frac{1}{2}(r_1 - r_3)(\sin 2\theta_{13}) \alpha_{13}, \\
w_{23} &= y_{23} \cos \theta_{13} + y_{12} A_{13}' \sin \theta_{13},
\end{aligned}
\tag{6.2.45}
$$

(c) $\exp \theta_{23} \sum_t (\alpha_{23} e_t') \sigma_* (X_{23}^{(t)} - Z_{23}^{(t)})$ 为 $v_1 = r_1$,

$$
\begin{aligned}
v_2 &= r_2 \cos^2 \theta_{23} + r_3 \sin^2 \theta_{23} - (y_{23} \alpha_{23}') \sin 2\theta_{23}, \\
v_3 &= r_2 \sin^2 \theta_{23} + r_3 \cos^2 \theta_{23} + (y_{23} \alpha_{23}') \sin 2\theta_{23}, \\
w_{12} &= y_{12} \cos \theta_{23} - y_{13} A_{23} \sin \theta_{23}, \\
w_{13} &= y_{13} \cos \theta_{23} + y_{12} A_{23}' \sin \theta_{23}, \\
w_{23} &= y_{23} - 2(y_{23} \alpha_{23}')(\sin^2 \theta_{23}) \alpha_{23} + \frac{1}{2}(r_2 - r_3)(\sin 2\theta_{23}) \alpha_{23},
\end{aligned}
\tag{6.2.46}
$$

其中

$$
A_{12} = \sum_r (\alpha_{12} e_r') P_r, \ A_{13} = \sum_r P_r' \alpha_{13}' e_r, \ A_{23} = \sum_r P_r \alpha_{23}' e_r. \tag{6.2.47}
$$

又 $P_1, \cdots, P_8$ 由式 (6.1.5) 定义.

(4) 任取 $\theta_{ij} \in \mathbb{R}, \alpha_{ij} \in \mathbb{R}^8, \alpha_{ij} \alpha_{ij}' = 1$, 则

(a) $\exp \theta_{12} \sum_t (\alpha_{12} e_t') \sigma_* (T_{12}^{(t)} + e_t \frac{\partial'}{\partial z_{12}})$ 为 $v_3 = r_3$,

$$
\begin{aligned}
v_1 &= r_1 \cos^2 \theta_{12} - r_2 \sin^2 \theta_{12} + \sqrt{-1} y_{12} \alpha_{12}' \sin 2\theta_{12}, \\
v_2 &= -r_1 \sin^2 \theta_{12} + r_2 \cos^2 \theta_{12} + \sqrt{-1} y_{12} \alpha_{12}' \sin 2\theta_{12}, \\
w_{12} &= \frac{\sqrt{-1}}{2}(r_1 + r_2)(\sin 2\theta_{12}) \alpha_{12} + y_{12} \alpha_{12}' \alpha_{12} \cos 2\theta_{12}, \qquad (6.2.48) \\
w_{13} &= y_{13} \cos \theta_{12} + \sqrt{-1} y_{23} A_{12}' \sin \theta_{12}, \\
w_{23} &= y_{23} \cos \theta_{12} + \sqrt{-1} y_{12} A_{12} \sin \theta_{12}.
\end{aligned}
$$

(b) $\exp\theta_{13}\sum_t(\alpha_{13}e_t')\sigma_*(T_{13}^{(t)}+e_t\frac{\partial'}{\partial z_{13}})$ 为 $v_2=r_2$,

$$
\begin{aligned}
v_1 &= r_1\cos^2\theta_{13}-r_3\sin^2\theta_{13}+\sqrt{-1}y_{13}\alpha_{13}'\sin 2\theta_{13},\\
v_3 &= -r_1\sin^2\theta_{13}+r_3\cos^2\theta_{13}+\sqrt{-1}y_{13}\alpha_{13}'\sin 2\theta_{13},\\
w_{12} &= y_{12}\cos\theta_{13}+\sqrt{-1}y_{23}A_{13}\sin\theta_{13},\\
w_{13} &= \frac{\sqrt{-1}}{2}(r_1+r_3)(\sin 2\theta_{13})\alpha_{13}+y_{13}\alpha_{13}'\alpha_{13}\cos 2\theta_{13},\\
w_{23} &= y_{23}\cos\theta_{13}+\sqrt{-1}y_{12}A_{13}'\sin\theta_{13}.
\end{aligned}
\tag{6.2.49}
$$

(c) $\exp\theta_{23}\sum_t(\alpha_{23}e_t')\sigma_*(T_{23}^{(t)}+e_t\frac{\partial'}{\partial z_{23}})$ 为 $v_1=r_1$,

$$
\begin{aligned}
v_2 &= r_2\cos^2\theta_{23}-r_3\sin^2\theta_{23}+\sqrt{-1}y_{23}\alpha_{23}'\sin 2\theta_{23},\\
v_3 &= -r_2\sin^2\theta_{23}+r_3\cos^2\theta_{23}+\sqrt{-1}y_{23}\alpha_{23}'\sin 2\theta_{23},\\
w_{12} &= y_{12}\cos\theta_{23}+\sqrt{-1}y_{13}A_{23}\sin\theta_{23},\\
w_{13} &= y_{13}\cos\theta_{23}+\sqrt{-1}y_{12}A_{23}'\sin\theta_{23},\\
w_{23} &= \frac{\sqrt{-1}}{2}(r_2+r_3)(\sin 2\theta_{23})\alpha_{23}+y_{23}\alpha_{23}'\alpha_{23}\cos 2\theta_{23}.
\end{aligned}
\tag{6.2.50}
$$

证 下面只证明情形 (3) 及 (4). 任取 $\theta_{ij}\in\mathbb{R}$, $\alpha_{ij}\in\mathbb{R}^8$, $|\alpha_{ij}|=1$, 则

$$\exp\theta_{ij}\sum_t(\alpha_{ij}e_t')\sigma_*(X_{ij}^{(t)}-Z_{ij}^{(t)}),\quad 1\le i<j\le 3$$

分别为常微分方程组的适合初值 $x(0)=y$ 的唯一解析解.

(a) $(i,j)=(1,2), x=(x_{11},x_{12},x_{22},x_{13},x_{23},x_{33})$, 则

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx_{12}}{d\theta}=(x_{11}-x_{22})\alpha_{12}, &&\frac{dx_{13}}{d\theta}=-\sum(\alpha_{12}e_t')x_{23}P_t',\\
&\frac{dx_{23}}{d\theta}=\sum(\alpha_{12}e_t')x_{13}P_t, &&\frac{dx_{11}}{d\theta}=-2x_{12}\alpha_{12}',\\
&\frac{dx_{22}}{d\theta}=2x_{12}\alpha_{12}', &&\frac{dx_{33}}{d\theta}=0,
\end{aligned}
$$

(b) $(i,j)=(1,3)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}x_{12}}{\mathrm{d}\theta}=-\sum\alpha_{13}P_r x'_{23}e_r,\quad \frac{\mathrm{d}x_{13}}{\mathrm{d}\theta}=(x_{11}-x_{33})\alpha_{13},$$
$$\frac{\mathrm{d}x_{23}}{\mathrm{d}\theta}=\sum(x_{12}e'_r)\alpha_{13}P_r,\quad \frac{\mathrm{d}x_{11}}{\mathrm{d}\theta}=-2x_{13}\alpha'_{13},$$
$$\frac{\mathrm{d}r_{22}}{\mathrm{d}\theta}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}r_{33}}{\mathrm{d}\theta}=2x_{13}\alpha'_{13},$$

(c) $(i,j)=(2,3)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}x_{12}}{\mathrm{d}\theta}=-\sum(x_{13}P_r x'_{23})e_r,\quad \frac{\mathrm{d}x_{13}}{\mathrm{d}\theta}=\sum(x_{12}e'_r)\alpha_{23}P'_r,$$
$$\frac{\mathrm{d}x_{23}}{\mathrm{d}\theta}=(x_{22}-x_{33})\alpha_{23},\qquad \frac{\mathrm{d}x_{11}}{\mathrm{d}\theta}=0,$$
$$\frac{\mathrm{d}r_{22}}{\mathrm{d}\theta}=-2x_{23}\alpha'_{23},\qquad \frac{\mathrm{d}x_{33}}{\mathrm{d}\theta}=2x_{23}\alpha'_{23}.$$

因此相应的单参数子群为定理中的 (3).

再任取 $\alpha_{ij}\in\mathbb{R}^8$, 则 $\exp\sum_t(\alpha_{ij}e'_t)\sigma_*(e_t\frac{\partial'}{\partial z_{ij}}+T^{(t)}_{ij})$ 分别为常微分方程组的适合初值 $x(0)=y$ 的唯一解析解:

(a) $(i,j)=(1,2)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}x_{12}}{\mathrm{d}\theta}=\sqrt{-1}(x_{11}+x_{22})\alpha_{12},\qquad \frac{\mathrm{d}x_{13}}{\mathrm{d}\theta}=\sqrt{-1}\sum(\alpha_{12}e'_r)x_{23}P'_r,$$
$$\frac{\mathrm{d}x_{23}}{\mathrm{d}\theta}=\sqrt{-1}\sum(\alpha_{12}e'_r)x_{13}P_r,\quad \frac{\mathrm{d}x_{11}}{\mathrm{d}\theta}=2\sqrt{-1}x_{12}\alpha'_{12},$$
$$\frac{\mathrm{d}x_{22}}{\mathrm{d}\theta}=2\sqrt{-1}x_{12}\alpha'_{12},\qquad \frac{\mathrm{d}x_{33}}{\mathrm{d}\theta}=0,$$

(b) $(i,j)=(1,3)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}x_{12}}{\mathrm{d}\theta}=\sqrt{-1}\sum(\alpha_{13}P_r x'_{23})e_r,\quad \frac{\mathrm{d}x_{13}}{\mathrm{d}\theta}=\sqrt{-1}(x_{11}+x_{33})\alpha_{13},$$
$$\frac{\mathrm{d}x_{23}}{\mathrm{d}\theta}=\sqrt{-1}\sum(x_{12}e'_r)\alpha_{13}P_r,\quad \frac{\mathrm{d}x_{11}}{\mathrm{d}\theta}=2\sqrt{-1}x_{13}\alpha'_{13},$$
$$\frac{\mathrm{d}x_{22}}{\mathrm{d}\theta}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}x_{33}}{\mathrm{d}\theta}=2\sqrt{-1}x_{13}\alpha'_{13},$$

(b) $(i,j)=(2,3)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}x_{12}}{\mathrm{d}\theta}=\sqrt{-1}(x_{13}P_r\alpha'_{23})e_r,\quad \frac{\mathrm{d}x_{13}}{\mathrm{d}\theta}=\sqrt{-1}\sum(x_{12}e'_r)\alpha_{23}P'_r,$$
$$\frac{\mathrm{d}x_{23}}{\mathrm{d}\theta}=\sqrt{-1}(x_{22}+x_{33})\alpha_{23},\quad \frac{\mathrm{d}x_{11}}{\mathrm{d}\theta}=0,$$
$$\frac{\mathrm{d}x_{22}}{\mathrm{d}\theta}=2\sqrt{-1}x_{23}\alpha'_{23},\qquad \frac{\mathrm{d}x_{33}}{\mathrm{d}\theta}=2\sqrt{-1}x_{23}\alpha'_{23}.$$

因此相应的单参数子群为定理中的 (4). 证完.

最后, 我们来考虑李群 $\mathrm{Aut}\,(R_{VI}(27))$ 的连通分支. 我们有

定理 6.2.12 第六类例外对称 Siegel 域 $R_{VI}(27)$ 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}\,(R_{VI}(27))$ 双连通, 除单位连通分支外, 另一分量代表元素为

$$r_i\to r_i,1\le i\le 3,y_{12}\to y_{12},y_{13}\to -y_{13},y_{23}\to -y_{23}.\qquad(6.2.51)$$

第六类例外典型域 $\mathfrak{R}_{VI}(27)$ 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{R}_{VI}(27))$ 也双连通.

下面我们写出证明概要: 考虑第六类例外对称 Siegel 域 R_{VI}, 利用 Vinberg 的代数李群的极大三角子群的共轭性定理, 可证无妨取最大全纯自同构群 $\mathrm{Aut}\,(R_{VI})$ 的连通分支的代表元素, 在共轭下使三角群 $T(R_{VI})$ 不动, 从而可证可取连通分支的代表元素为仿射变换. 利用域 R_{VI} 在仿射变换群 $T(R_{VI})$ 下单可递, 可证无妨取连通分支的代表元素为使点 $(\sqrt{-1}v_0,0)$ 不动的仿射变换. 它将第六类例外对称 Siegel 域 R_{VI} 的 Silov 边界变为自身, 因此它具有形式 $\sigma:\to zA_0$, 其中 $A_0\in\mathrm{GL}\,(27,\mathbb{R})$. 进一步利用 $\mathrm{Iso}\,(R_{VI})\to\sigma(\mathrm{Iso}\,(R_{VI}))\sigma^{-1}$, 由直接计算可知无妨取分量代表元素为恒等变换 id 及 $r_i\to r_i,1\le i\le 3,y_{12}\to y_{12},y_{13}\to -y_{13},y_{23}\to -y_{23}$. 所以证明了李群 $\mathrm{Aut}\,(R_{VI})$ 双连通. 因此, 李群 $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{R}_{VI}(27))$ 也双连通 (见参考文献 [38]).

§ 6.3 例外对称 Siegel 域 $R_V(16)$

在这一节中，我们考虑第五类例外典型域，给出它的表达式，求出它的最大全纯自同构群、Bergman 核函数、Bergman 映射和 Bergman 度量，从而给出有界域的表达形式，进一步计算它们的 Cauchy-Szegö 核和 Poisson 核.

由定理 6.1.19 可知，第五类例外典型域有如下正规 Siegel 域的表达形式 $R_V(16)$:

$$\operatorname{Im} C_1(z) - \operatorname{Re} R_1(u)\overline{R_1(u)}' > 0, \tag{6.3.1}$$

其中 $z = (s_1, z_{12}, s_2)$, $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$, $z_{12} \in \mathbb{C}^6, u = (u_1, u_2)$, $u_1, u_2 \in \mathbb{C}^4$,

$$C_1(z) = \begin{pmatrix} s_1 & z_{12} \\ z_{12}' & s_2 I \end{pmatrix}, \quad R_1(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ R(u_2) \end{pmatrix}, \tag{6.3.2}$$

其中 $R(u_2)$ 为 6×4 复矩阵，它定义为

$$R(u_2) = \sum_{r=1}^{6} e_r' u_2 \overline{Q_r}',$$

而 4×4 复矩阵 $Q_1, \cdots, Q_6$ 由引理 6.1.18 定义.

显然有

$$Q_i\overline{Q}_j' + Q_j\overline{Q}_i' = 2\delta_{ij} I^{(4)}, \quad 1 \le i, j \le 6, \tag{6.3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{6} Q_i(e_u' e_v + e_v' e_u)Q_i' = \sum_{i=1}^{6} Q_i'(e_u' e_v + e_v' e_u)Q_i = 0, \tag{6.3.4}$$

其中 $1 \le u, v \le 4$,

$$\sum_{i=1}^{6} Q_i e_u' e_v \overline{Q}_i' = 2\delta_{uv} I^{(4)} - 2J e_v' e_u J,\ 1 \le u, v \le 4, \tag{6.3.5}$$

$$\sum_{i=1}^{6}\overline{Q}_i'e_u'e_vQ_i=2\delta_{uv}I^{(4)}+2Je_v'e_uJ,\ 1\le u,v\le 4, \tag{6.3.6}$$

$$(Q_jJ)'=-Q_jJ,\quad 1\le j\le 6, \tag{6.3.7}$$

这里

$$J=\begin{pmatrix}0 & -J_1\\ -J_1 & 1\end{pmatrix}=-Q_3Q_5. \tag{6.3.8}$$

所以记 $u_2=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, 则

$$R(u_2)=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ -\sqrt{-1}x_1 & -\sqrt{-1}x_2 & \sqrt{-1}x_3 & \sqrt{-1}x_4\\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2\\ -\sqrt{-1}x_3 & \sqrt{-1}x_4 & -\sqrt{-1}x_1 & \sqrt{-1}x_4\\ x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1\\ -\sqrt{-1}x_4 & -\sqrt{-1}x_3 & -\sqrt{-1}x_2 & -\sqrt{-1}x_1\end{pmatrix}, \tag{6.3.9}$$

于是

$$R(u_2)\overline{R(u_2)}'+\overline{R(u_2)}R(u_2)'=2|u_2|^2I^{(4)}. \tag{6.3.10}$$

而

$$\operatorname{Im}C_1(z)-\operatorname{Re}(R_1(u)\overline{R_1(u)}')=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{12}' & c_{22}\end{pmatrix}, \tag{6.3.11}$$

其中

$$\begin{aligned}&c_{11}=\operatorname{Im}(s_1)-|u_1|^2,\quad c_{22}=(\operatorname{Im}(s_2)-|u_2|^2)I^{(6)},\\ &c_{12}=\operatorname{Im}(z_{12})-\sum_{i=1}^{6}(\operatorname{Re}(u_1Q_i\overline{u}_2'))e_i,\end{aligned} \tag{6.3.12}$$

又任取 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}^4$, 记

$$A=\sum_{j=1}^{6}e_j'\alpha Q_j,\quad B=\sum_{j=1}^{4}Q_j\overline{\beta}'e_j, \tag{6.3.13}$$

则

$$\overline{A}A' = \sum_{j=1}^{6} \overline{Q}_j'\overline{\alpha}'\alpha Q_j = 2\alpha\overline{\alpha}'I^{(4)} + 2J\alpha'\overline{\alpha}J,$$
$$B\overline{B}' = \sum_{j=1}^{6} Q_j\overline{\beta}'\beta\overline{Q}_j' = 2\beta\overline{\beta}'I^{(4)} - 2J\beta'\overline{\beta}J. \tag{6.3.14}$$

且有 $AJ\alpha' = 0$, $\overline{\beta}JB = 0$,

$$A\overline{A}'A = 2|\alpha|^2 A, \quad B\overline{B}B = 2|\beta|^2 B. \tag{6.3.15}$$

于是

$$(\overline{A}'A)^k = 2^{k-1}|\alpha|^{2k-2}\overline{A}'A, \quad (B\overline{B}')^k = 2^{k-1}|\beta|^{2k-2}B\overline{B}'. \tag{6.3.16}$$

定理 6.3.1 第五类例外对称 Siegel 域 $R_V(16)$ 可表示为

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}\,(s_2) - |u_2|^2 > 0, \\ &(\mathrm{Im}\,(s_1) - |u_1|^2)(\mathrm{Im}\,(s_2) - |u_2|^2) \\ &- |\mathrm{Im}\,(z_{12}) - \sum_{i=1}^{6} \mathrm{Re}\,(u_1 Q_i \overline{u_2}')e_i|^2 > 0. \end{aligned} \tag{6.3.17}$$

证 由

$$\begin{pmatrix} 1 & -s_2^{-1}z_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 & z_{12} \\ z_{12}' & s_2 I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -s_2^{-1}z_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} s_1 - s_2^{-1}z_{12}z_{12}' & 0 \\ 0 & s_2 I \end{pmatrix},$$

当 $s_i \in \mathbb{R}, z_{12} \in \mathbb{R}^6$ 时, $\begin{pmatrix} s_1 & z_{12} \\ z_{12}' & s_2 I \end{pmatrix} > 0$, 当且仅当 $s_2 > 0, s_1 - s_2^{-1}z_{12}z_{12}' > 0$. 取 s_i 为 $\mathrm{Im}\,(s_i) - |u_i|^2, z_{12}$ 为 $\sum_{i=1}^{6} \mathrm{Re}\,(u_1 Q_i \overline{u_2}')e_i$ 便证明了定理. 证完.

由定理 6.1.14 立即有

定理 6.3.2 第五类例外对称 Siegel 域 $R_V(16)$ 的 Bergman 核函数为

$$K(z,u;\overline{z},\overline{u}) = \lambda_0[(\mathrm{Im}(s_1)-|u_1|^2)(\mathrm{Im}(s_2)-|u_2|^2) - \sum_{i=1}^{6}(\mathrm{Im}\, z_j - \mathrm{Re}(u_1 Q_j \overline{u_2}'))^2]^{-12}, \tag{6.3.18}$$

其中 $\lambda_0>0,\ z_{12}=(z_1,\cdots,z_6)\in\mathbb{C}^6, (s_1,z_{12},s_2,u_1,u_2)\in R_V(16)$.

Bergman 度量为

$$ds^2 = \mathrm{d}\overline{\mathrm{d}}\log K(z,u;\overline{z},\overline{u}). \tag{6.3.19}$$

Cauchy–Szegö 核为

$$\begin{aligned} S(z,u;\overline{\xi},\overline{\eta}) = & \lambda_0'[(\frac{1}{2\sqrt{-1}}(s_1-\overline{\xi}_1)-u_1\overline{\zeta}_1')(\frac{1}{2\sqrt{-1}}(s_2-\overline{\xi}_2)-u_2\overline{\zeta}_2') \\ & -\sum_{j=1}^{6}(\frac{1}{2\sqrt{-1}}(z_j-\overline{\eta}_j)-\frac{1}{2}u_1Q_j\overline{\zeta}_2'-\frac{1}{2}u_2\overline{Q}_j'\overline{\zeta}_1')^2]^{-8} \\ = & \lambda_0''K(z,u;\overline{\xi},\overline{\zeta})^{\frac{2}{3}}, \end{aligned} \tag{6.3.20}$$

其中 $\lambda_0',\lambda_0''>0$, 又 $\xi=(\xi_1,\xi_{12},\xi_2),\xi_{12}=(\eta_1,\cdots,\eta_6)\in\mathbb{C}^6,\xi_1,\xi_2\in\mathbb{C},\zeta=(\zeta_1,\zeta_2),\ \zeta_1,\zeta_2\in\mathbb{C}^4$, 适合条件

$$\mathrm{Im}(\xi_j)=|\zeta_i|^2,\ i=1,2,\ \mathrm{Im}(\xi_{12})=\sum_{i=1}^{6}(\mathrm{Re}(\zeta_1Q_i\overline{\zeta}_2'))e_i. \tag{6.3.21}$$

它们全体构成的集合为第五类例外对称 Siegel 域 $R_V(16)$ 的 Silov 边界 $S(R_V(16))$. Poisson 核为

$$P(z,u;\overline{\xi},\overline{\eta}) = \frac{|S(z,u;\overline{\xi},\overline{\eta})|^2}{S(z,u;\overline{u},\overline{z})} = \lambda_0''\Big(\frac{|K(z,u;\overline{\xi},\overline{\eta})|^2}{K(z,u;\overline{z},\overline{u})}\Big)^{\frac{2}{3}}. \tag{6.3.22}$$

证 令 $n_{12}=6$, 所以

$$n_1+n_1'=2n_{11}+n_{12}=8, n_2+n_2'=n_{12}+2n_{22}=8.$$

又 $m_1 = m_2 = 4$, 所以由

$$\sum_{i=1}^{j} \mu_i n_{ij} = -(n_j + n_j' + m_j), \quad \sum_{i=1}^{j} \lambda_i n_{ij} = -\frac{1}{2}(n_j + n_j' + 2m_j),$$

有 $\mu_1 = -12, \mu_2 = 60, \lambda_1 = -8, \lambda_2 = 40$. 令

$$K(z, u; \overline{z}, \overline{u}) = \lambda_0 \det (C_1(\operatorname{Im} z) - \operatorname{Re}(R_1(u)\overline{R_1(u)}'))^{\mu_1} \\ \cdot \det (C_2(\operatorname{Im} z) - \operatorname{Re}(R_2(u)\overline{R_2(u)}')^{\mu_2},$$

其中

$$C_1(z) = \begin{pmatrix} s_1 & z_{12} \\ z_{12}' & s_2 I \end{pmatrix}, \quad C_2(z) = (s_2),$$

$$R_1(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{6} e_r' u_2 \overline{Q}_r' \end{pmatrix}, \quad R_2(u) = u_2.$$

由于 $\det C_1(z)^{\mu_1} \det C_2(z)^{\mu_2} = (s_1 s_2 - z_{12} z_{12}')^{\mu_1}, \forall\, z \in \mathbb{R}^6$, 所以证明了式 (6.3.18) 成立. 令 $\lambda_i = \dfrac{2}{3}\mu_i, i = 1, 2$. 所以证明了式 (6.3.20), 从而式 (6.3.22) 成立. 证完.

由定理 6.1.16 有

定理 6.3.3 记 $\operatorname{aut}(R_V)$ 为第五类例外对称 Siegel 域 R_V 上的全纯自同构群 $\operatorname{Aut}(R_V)$ 的李代数, $t(R_V)$ 及 $\operatorname{iso}(R_V)$ 分别为域 R_V 上的单可递连通全纯自同构群 $T(R_V)$ 及固定点

$$(\sqrt{-1}v_0, 0) = (\sqrt{-1}, 0, \sqrt{-1}; 0, 0)$$

的迷向子群 $\operatorname{Iso}(R_V)$ 的李代数. 则有如下子空间直接和分解

$$\begin{aligned} \operatorname{aut}(R_V(16)) &= t(R_V(16)) + \operatorname{iso}(R_V(16)) \\ &= L_{-2} + L_{-1} + L_0 + L_1 + L_2, \end{aligned} \tag{6.3.23}$$

其中

$$t(R_V(16)) = L_{-2} + L_{-1} + L_{01}. \tag{6.3.24}$$

记 $z_{12}=(z_1,\cdots,z_6)\in\mathbb{C}^6$, 则

(1) L_{-2} 有基: $\dfrac{\partial}{\partial s_1},\dfrac{\partial}{\partial s_2},\dfrac{\partial}{\partial y_1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial y_6}$;

(2) L_{-1} 有基: $1\leq t\leq 4$,

$$P_1^{(t)}=e_t\frac{\partial'}{\partial u_1}+2\sqrt{-1}u_1e_t'\frac{\partial}{\partial s_1}+\sqrt{-1}\sum_r(u_2\overline{Q}_r'e_t')\frac{\partial}{\partial y_r},$$

$$\widetilde{P}_1^{(t)}=\sqrt{-1}e_t\frac{\partial'}{\partial u_1}+2u_1e_t'\frac{\partial}{\partial s_1}+\sum_r(u_2\overline{Q}_r'e_t')\frac{\partial}{\partial y_r},$$

$$P_2^{(t)}=e_t\frac{\partial'}{\partial u_2}+2\sqrt{-1}u_2e_t'\frac{\partial}{\partial s_2}+\sqrt{-1}\sum_r(u_1Q_re_t')\frac{\partial}{\partial y_r},$$

$$\widetilde{P}_2^{(t)}=\sqrt{-1}e_t\frac{\partial'}{\partial u_2}+2u_2e_t'\frac{\partial}{\partial s_2}+\sum_r(u_1Q_re_t')\frac{\partial}{\partial y_r};$$

(3) $L_0=L_{01}+L_{02}+L_{03}$, 而且

(a) L_{01} 有基

$$A_1=2s_1\frac{\partial}{\partial s_1}+z_{12}\frac{\partial'}{\partial z_{12}}+u_1\frac{\partial'}{\partial u_1},$$

$$A_2=2s_2\frac{\partial}{\partial s_2}+z_{12}\frac{\partial'}{\partial z_{12}}+u_2\frac{\partial'}{\partial u_2},$$

$$X_t=2z_t\frac{\partial}{\partial s_1}+s_2\frac{\partial}{\partial z_t}+u_2\overline{Q}_t'\frac{\partial'}{\partial u_1},\quad 1\leq t\leq 6;$$

(b) L_{02} 有基 $A_0=\sqrt{-1}u_1\dfrac{\partial'}{\partial u_1}+\sqrt{-1}u_1\dfrac{\partial'}{\partial u_1}$ 及

$$P_{st}=2(z_s\frac{\partial}{\partial z_t}-z_t\frac{\partial}{\partial z_s})-u_1Q_sQ_t\frac{\partial'}{\partial u_1}+u_2Q_tQ_s\frac{\partial'}{\partial u_2},\ 1\leq s<t\leq 6;$$

(c) L_{03} 有基

$$Z_t=2z_t\frac{\partial}{\partial s_2}+s_1\frac{\partial}{\partial z_t}+u_1Q_t\frac{\partial'}{\partial u_2},\quad 1\leq t\leq 6;$$

(4) L_2 有基

$$B_1 = \frac{1}{2}[s_1(A_1 + u_1\frac{\partial'}{\partial u_1}) + \sum_r z_r(Z_r + u_1 Q_r \frac{\partial'}{\partial u_2})]$$

$$= s_1^2\frac{\partial}{\partial s_1} + z_{12}z'_{12}\frac{\partial}{\partial s_2} + s_1 z_{12}\frac{\partial'}{\partial z_{12}} + s_1 u_1\frac{\partial'}{\partial u_1} + \sum_r z_r u_1 Q_r \frac{\partial'}{\partial u_2},$$

$$B_2 = \frac{1}{2}[s_2(A_2 + u_2\frac{\partial'}{\partial u_2}) + \sum_r z_r(X_r + u_2\overline{Q}'_r \frac{\partial'}{\partial u_1})]$$

$$= s_2^2\frac{\partial}{\partial s_2} + z_{12}z'_{12}\frac{\partial}{\partial s_1} + s_2 z_{12}\frac{\partial'}{\partial z_{12}} + \sum_r z_r u_2 \overline{Q}'_r \frac{\partial'}{\partial u_1} + s_2 u_2\frac{\partial'}{\partial u_2},$$

$$T_t = [X_t, B_1] = [Z_t, B_2], \quad 1 \le t \le 6;$$

(5) L_1 有基

$$Y_i^{(t)} = [P_i^{(t)}, B_i], \quad \widetilde{Y}_i^{(t)} = [B_i, \widetilde{P}_i^{(t)}], \quad 1 \le t \le 4,\ 1 \le i \le 2.$$

证 令 $n_{12} = 6, m_1 = m_2 = 4$. 由定理 6.1.16 可知，这时多项式向量场

$$Z_t - X_t,\ 1 \le t \le 6,\ \frac{\partial}{\partial s_1} + B_1,\ \frac{\partial}{\partial s_2} + B_2,\ \frac{\partial}{\partial y_t} + T_t,\ 1 \le t \le 6,$$

$$Y_i^{(t)} - \widetilde{P}_i^{(t)},\ \widetilde{Y}_i^{(t)} - P_i^{(t)},\ 1 \le t \le 4, i = 1, 2$$

都在 $\mathrm{iso}\,(R_V(16))$ 中，所以我们只要证明子空间 L_{02} 有基 $P_{st}, 1 \le s < t \le 8$ 就够了.

先证 $P_{ij} \in L_{02}$. 由定理可知，要证

$$(-Q_sQ_t)Q_p - Q_p(Q_tQ_s) = \sum_r e_r(2(e'_se_t - e'_te_s))e'_pQ_r.$$

令 $s < t, Q_s\overline{Q}'_t + Q_t\overline{Q}'_s = 0, Q_1 = I, \overline{Q}'_t = -Q_t, t > 1$, 所以

$$\begin{aligned}&-Q_sQ_tQ_p - Q_pQ_tQ_s = Q_s\overline{Q}'_tQ_p + Q_p\overline{Q}'_tQ_s\\ &= -Q_t\overline{Q}'_sQ_p + 2\delta_{pt}Q_s - Q_t\overline{Q}'_pQ_s = -2\delta_{sp}Q_t + 2\delta_{tp}Q_s\\ &= 2\sum_r e_r(e'_se_t - e'_te_s)e'_pQ_r.\end{aligned}$$

于是条件适合，即 $P_{st}\in L_{02}, 1\le s<t\le 6$.

余下证 A_0 及 $P_{st}, 1\le s<t\le 6$ 为子空间 L_{02} 的基. 问题化为讨论 $u_1K_1\frac{\partial'}{\partial u_1}+u_2K_2\frac{\partial'}{\partial u_2}\in L_{02}$. 这时有 $K_1Q_p-Q_pK_2=0, 1\le p\le 6$, 则由 $K_s+\overline{K}_s'=0, 1\le s\le 2$ 可知 $K_2=K_1$, 且 $K_1Q_p=Q_pK_1$. 因此 K_1 为纯量斜 Hermite 方阵, 所以 $K_1=K_2=\lambda\sqrt{-1}I^{(4)}, \lambda\in\mathbb{R}$. 这证明了 $u_1K_1\frac{\partial'}{\partial u_1}+u_2K_2\frac{\partial'}{\partial u_2}$ 为 A_0 的实纯量积. 证完.

显然 $t(R_V(16))=L_{-2}+L_{-1}+L_{01}$, 又子代数 $\mathrm{iso}\,(R_V(16))$ 有子空间直接和 $\mathrm{iso}\,(R_V(16))=L_{02}+L_{03}'+L_1'+L_2'$, 其中 L_{03}' 有基 $X_t-Z_t, 1\le t\le 6$, L_1' 有基 $Y_i^{(t)}-\widetilde{P}_i^{(t)}, \widetilde{Y}_i^{(t)}-P_i^{(t)}, 1\le t\le 4, i=1,2$, L_2' 有基 $\frac{\partial}{\partial s_1}+B_1, \frac{\partial}{\partial s_2}+B_2, \frac{\partial}{\partial z_t}+T_t, 1\le t\le 6$.

定理 6.3.4 连通单可递李群 $T(R_V)$ 由映射 $\tau=\tau(\alpha,\beta;\delta):(z,u)\to(y,v)$ 构成, 它们定义为

$$
\begin{aligned}
C_1(\tau'(z))=&P[C_1(z)+\sqrt{-1}R_1(\delta)R_1(u)'+\sqrt{-1}R_1(u)\overline{R_1(\delta)}'\\
&+\frac{\sqrt{-1}}{2}R_1(\delta)\overline{R_1(\delta)}'+\frac{\sqrt{-1}}{2}\overline{R_1(\delta)}R_1(\delta)'+C_1(\beta)]P',\\
R_1(\tau'(u))=&PR_1(u)+PR_1(\delta),
\end{aligned}
\tag{6.3.25}
$$

其中

$$
\tau(\alpha,\beta;\delta)(z,u)=(\tau'(z),\tau'(u))=(y,v), \alpha,\beta\in\mathbb{R}^8, \delta\in\mathbb{C}^8,
$$

又

$$
P(\alpha)=P=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ 0 & \alpha_{22}I\end{pmatrix}, \tag{6.3.26}
$$

其中 $\alpha=(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{22}), \alpha_{ii}\in\mathbb{R}, \alpha_{ii}>0, i=1,2, \alpha_{ij}\in\mathbb{R}^6$. 而第五类例外对称 Siegel 域 $R_V(16)$ 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}\,(R_V(16))$ 有半直乘积分解

$$
\mathrm{Aut}\,(R_V(16))=T(R_V(16))\mathrm{Iso}\,(R_V(16)). \tag{6.3.27}
$$

证 由直接验算可知，令 $\beta=0$, $\delta=0$, 则式 (6.3.25) 可写成如下的坐标表达式

$$
\begin{aligned}
s_1 &\to \alpha_{11}^2 s_1 + 2\alpha_{11}\alpha_{12}z'_{12} + (\alpha_{12}\alpha'_{12})s_2,\\
s_2 &\to \alpha_{22}^2 s_2,\\
z_{12} &\to \alpha_{11}\alpha_{22}z_{12} + \alpha_{22}\alpha_{12}s_2,\\
u_1 &\to \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}R_1(u_2),\\
u_2 &\to \alpha_{22}u_2.
\end{aligned}
$$

令 $a_{11}=a_{22}=1$, $a_{12}=0$, 记

$$\delta=(\delta_1,\delta_2),\delta_i\in\mathbb{C}^4,\beta=(\beta_{11},\beta_{12},\beta_{22}),\beta_{ii}\in\mathbb{R},\beta_{12}\in\mathbb{R}^6,$$

则式 (6.3.25) 可写成如下的坐标表达式

$$
\begin{aligned}
s_1 &\to s_1 + 2\sqrt{-1}u_1\overline{\delta}_1' + \sqrt{-1}\delta_1\overline{\delta}_1' + \beta_{11},\\
z_{12} &\to z_{12} + \beta_{12} + \sqrt{-1}\sum[u_1Q_r\overline{\delta}_2' + u_2\overline{Q}_r'\overline{\delta}_1' + (\mathrm{Re}\,(\delta_1Q_r\overline{\delta}_2'))]e_r,\\
s_2 &\to s_2 + 2\sqrt{-1}u_2\overline{\delta}_2' + \sqrt{-1}\delta_2\overline{\delta}_2' + \beta_{22},\\
u_1 &\to u_1 + \delta_1,\\
u_2 &\to u_2 + \delta_2.
\end{aligned}
$$

最后证它单可递．事实上，在域 $R_V(16)$ 中任取一点

$$(z^{(0)},u^{(0)})=((s_1^{(0)},z_{12}^{(0)},s_2^{(0)}),(u_1^{(0)},u_2^{(0)})),$$

则有如下唯一解 $\alpha,\beta;\delta$, 使得

$$\tau(\alpha,\beta;\delta)(z^{(0)},u^{(0)})=(\sqrt{-1}v_0,0),$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\delta_i=-u_i^{(0)},\ \beta_{ii}=-\mathrm{Re}\,(s_i^{(0)}),\ i=1,2,\\
&\beta_{12}=-\mathrm{Re}\,(z_{12}^{(0)}),\ \alpha_{11}=\lambda\mu^{-1},\ \alpha_{22}=\lambda^{-1},\\
&\alpha_{12}=-\lambda^{-1}\mu^{-1}(\mathrm{Im}\,z_{12}^{(0)}-\mathrm{Re}\sum(u_1^{(0)}Q_r\overline{u_2^{(0)}}')e_r),
\end{aligned}
$$

又

$$\lambda = (\operatorname{Im} s_2^{(0)} - u_2^{(0)}\overline{u_2^{(0)}}')^{\frac{1}{2}},$$
$$\mu = \det(\operatorname{Im} C_1(z^{(0)}) - \operatorname{Re} R_1(u^{(0)})\overline{R_1(u^{(0)})}')^{\frac{1}{2}}.$$

所以证明了定理. 证完.

现在考虑域 $R_V(16)$ 上的 Bergman 映射 σ. 记

$$z = (s_1, z_{12}, s_2),\ y = (r_1, y_{12}, r_2),\ s_i, r_i \in \mathbb{C},\ z_{12}, y_{12} \in \mathbb{C}^6,$$
$$u = (u_1, u_2),\ v = (v_1, v_2),\ u_i, v_i \in \mathbb{C}^4.$$

又记

$$\Delta(z) = s_1 s_2 - z_{12} z_{12}', \tag{6.3.28}$$

我们有

定理 6.3.5 第五类例外对称 Siegel 域 $R_V(16)$ 上的 Bergman 映射 σ, 将域 $R_V(16)$ 全纯同构地映为齐性有界域 $\mathfrak{R}_V(16)$. 它是 16 维复 Euclid 空间 $\mathbb{C}^{16}$ 中包含原点的有界域, 称为**第五类例外典型域**. 这里 σ 的坐标表达式为

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{-1} + 2\Delta(z + \sqrt{-1}v_0)^{-1}(s_2 + \sqrt{-1}),\\
r_2 &= \sqrt{-1} + 2\Delta(z + \sqrt{-1}v_0)^{-1}(s_1 + \sqrt{-1}),\\
y_{12} &= -2\Delta(z + \sqrt{-1}v_0)^{-1} z_{12},\\
v_1 &= \sqrt{2}\Delta(z + \sqrt{-1}v_0)^{-1}((s_2 + \sqrt{-1})u_1 - \sum z_t u_2 \overline{Q}_t'),\\
v_2 &= \sqrt{2}\Delta(z + \sqrt{-1}v_0)^{-1}((s_1 + \sqrt{-1})u_2 - \sum z_t u_1 Q_t),
\end{aligned} \tag{6.3.29}$$

其中 $z_{12} = (z_1, \cdots, z_6), v_0 = (1, 0, 1)$, 又有

$$\Delta(z + \sqrt{-1}v_0)\Delta(y - \sqrt{-1}v_0) = 4. \tag{6.3.30}$$

证 由定理 6.1.15, Bergman 映射为

$$(y, v) = \operatorname{grad}_{(\overline{z}, \overline{u})} \log \frac{K(z, u; \overline{z}, \overline{u})}{K(\sqrt{-1}v_0, 0; \overline{z}, \overline{u})}\Big|_{\overline{z} = -\sqrt{-1}v_0, \overline{u} = 0} P,$$

其中 P 为非异常数方阵. 由定理 6.3.2, Bergman 核函数为

$$K(z,u;\overline{z},\overline{u})=\lambda_0[(\operatorname{Im}(s_1)-|u_1|^2)(\operatorname{Im}(s_2)-|u_2|^2)\\ -\sum_{j=1}^{6}(\operatorname{Im}(z_j)-\operatorname{Re}(u_1Q_j\overline{u}_2'))^2]^{-12},$$

所以

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{d}}\log K(z,u;\overline{z},\overline{u})\big|_{\overline{z}=-\sqrt{-1}v_0,\overline{u}=0}\\=&-12\Delta_0(z+\sqrt{-1}v_0)^{-1}\overline{\mathrm{d}}F\big|_{\overline{z}=-\sqrt{-1}v_0,\overline{u}=0},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&F(z,u;\overline{z},\overline{u})=(s_1-\overline{s}_1-2\sqrt{-1}|u_1|^2)(s_2-\overline{s}_2-2\sqrt{-1}|u_2|^2)\\&-\sum_{j=1}^{6}(z_j-\overline{z}_j-\sqrt{-1}u_1Q_j\overline{u}_2'-\sqrt{-1}u_2\overline{Q}_j'\overline{u}_1')^2.\\&\overline{\mathrm{d}}F|_{\overline{z}=-\sqrt{-1}v_0,\overline{u}=0}=(s_1+\sqrt{-1})(-\overline{\mathrm{d}s_2}-2\sqrt{-1}u_2\overline{\mathrm{d}u_2}')\\&+(s_2+\sqrt{-1})(-\overline{\mathrm{d}s_1}-2\sqrt{-1}u_1\overline{\mathrm{d}u_1}')\\&+2\sum_{j=1}^{8}z_j(\overline{\mathrm{d}z_j}+\sqrt{-1}u_1Q_j\overline{\mathrm{d}u_2}'+\sqrt{-1}u_2\overline{Q}_j'\overline{\mathrm{d}u_1}').\end{aligned}$$

详细写出 Bergman 映射的表达式, 适当选取非异常数方阵, 便证明了定理. 证完.

由直接计算可知, 定理 6.3.5 给出的 Bergman 映射 σ 的逆映射 σ^{-1} 的坐标表达式为

$$\begin{aligned}&s_1=-\sqrt{-1}+2\Delta(y-\sqrt{-1}v_0)^{-1}(r_2-\sqrt{-1}),\\&s_2=-\sqrt{-1}+2\Delta(y-\sqrt{-1}v_0)^{-1}(r_1-\sqrt{-1}),\\&z_{12}=-2\Delta(y-\sqrt{-1}v_0)^{-1}y_{12},\\&u_1=\sqrt{2}\Delta(y-\sqrt{-1}v_0)^{-1}((r_2-\sqrt{-1})v_1-\sum y_tv_2\overline{Q}_t'),\\&u_2=\sqrt{2}\Delta(y-\sqrt{-1}v_0)^{-1}((r_1-\sqrt{-1})v_2-\sum y_tv_1Q_t).\end{aligned}\tag{6.3.31}$$

现在来给出第五类例外典型域 $\widetilde{\mathfrak{R}}_V(16)$ 的坐标表达式. 由定理 6.3.1 及定理 6.3.5, 我们有

定理 6.3.6 第五类例外对称 Siegel 域 $R_V(16)$ 在 Bergman 映射 σ 下的像为第五类例外典型域 $\widetilde{\mathfrak{R}}_V(16)$, 它定义为

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_V(16)=\{(y,v)\in\mathbb{C}^8\times\mathbb{C}^8\mid f_1-f_2>0,\ g_1-g_2+g_3>0\},\quad(6.3.32)$$

其中

$$\begin{aligned}
f_1&=1-|r_1r_2-y_{12}y_{12}'|^2-\mathrm{Im}\,(r_1+r_2)(\overline{r}_1\overline{r}_2-\overline{y}_{12}\overline{y}_{12}'+1),\\
f_2&=|r_1-\sqrt{-1}|^2v_2\overline{v}_2'+|r_2-\sqrt{-1}|^2v_1\overline{v}_1'\\
&\quad-2\mathrm{Re}\sum((\overline{r}_1+\sqrt{-1})y_r+(r_2-\sqrt{-1})\overline{y}_r)v_1Q_r\overline{v}_2'\\
&\quad+\sum y_r\overline{y}_s(v_1Q_r\overline{Q}_s'\overline{v}_1'+v_2\overline{Q}_r'Q_s\overline{v}_2'),
\end{aligned}\qquad(6.3.33)$$

$$\begin{aligned}
g_1&=1-|r_1|^2-|r_2|^2-2y_{12}\overline{y}_{12}'+|r_1r_2-y_{12}y_{12}'|^2,\\
g_2&=2(1-|r_1|^2)v_2\overline{v}_2'+2(1-|r_2|^2)v_1\overline{v}_1'\\
&\quad+4\mathrm{Re}\sum(\overline{r}_1y_r+r_2\overline{y}_r)v_1Q_r\overline{v}_2'\\
&\quad-2\sum y_s\overline{y}_t(v_1Q_s\overline{Q}_t'\overline{v}_1'+v_2\overline{Q}_s'Q_t\overline{v}_2'),\\
g_3&=2\sum|v_1Q_r\overline{v}_2'|^2-4|v_1|^2|v_2|^2.
\end{aligned}\qquad(6.3.34)$$

证 由定理 6.3.1 可知第五类例外对称 Siegel 域 $R_V(16)$ 由

$$(\mathrm{Im}\,(s_1)-|u_1|^2)(\mathrm{Im}\,(s_2)-|u_2|^2)-\sum_r(\mathrm{Im}\,(z_r)-\mathrm{Re}\,(u_1Q_r\overline{u}_2'))^2>0\qquad(6.3.35)$$

以及

$$\mathrm{Im}\,(s_2)-|u_2|^2>0$$

定义. 显然条件 (6.3.35) 蕴含 $(\mathrm{Im}\,(s_1)-|u_1|^2)(\mathrm{Im}\,(s_2)-|u_2|^2)>0$. 所以 $\mathrm{Im}\,(s_2)-|u_2|^2>0$ 当且仅当 $\mathrm{Im}\,(s_1+s_2)-|u_1|^2-|u_2|^2>0$. 因此第五类例外对称 Siegel 域 $R_V(16)$ 的定义条件可写为式 (6.3.35) 及

$$\mathrm{Im}\,(s_1+s_2)-|u_1|^2-|u_2|^2>0.\qquad(6.3.36)$$

记 $\Delta_0 = 4\Delta(z + \sqrt{-1}v_0)^{-1}$,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f_1} = \mathrm{Im}\,(s_1 + s_2), \quad \widetilde{f_2} = |u_1|^2 + |u_2|^2,\\
&\widetilde{g_1} = (\mathrm{Im}\,(s_1))(\mathrm{Im}\,(s_2)) - (\mathrm{Im}\,(z_{12}))(\mathrm{Im}\,(z_{12})'),\\
&\widetilde{g_2} = |u_1|^2\mathrm{Im}\,(s_2) + |u_2|^2\mathrm{Im}\,(s_1) - 2\sum(\mathrm{Im}\,(z_r))\mathrm{Re}\,(u_1Q_r\overline{u}_2'),\\
&\widetilde{g_3} = |u_1|^2|u_2|^2 - \sum(\mathrm{Re}\,(u_1Q_r\overline{u}_2'))^2.
\end{aligned}$$

于是式 (6.3.35) 为 $\widetilde{g_1} - \widetilde{g_2} + \widetilde{g_3} > 0$, 式 (6.3.36) 为 $\widetilde{f_1} - \widetilde{f_2} > 0$. 作 Bergman 映射，我们来求齐性有界域 $R_V(16)$ 的定义条件. 首先, $\Delta_0 = 4\Delta(z + \sqrt{-1}v_0)^{-1} = \Delta(y - \sqrt{-1}v_0)$. 又

$$\begin{aligned}
\widetilde{f_1} &= \mathrm{Im}\,((s_1 + \sqrt{-1}) + (s_2 + \sqrt{-1})) - 2\\
&= 2|\Delta_0|^{-2}\mathrm{Re}\,(\Delta_0(\sqrt{-1}\overline{r}_1 + \sqrt{-1}\overline{r}_2 - 2 - \overline{\Delta}_0))\\
&= 2|\Delta_0|^{-2}\mathrm{Re}\,(\Delta_0(-\overline{r}_1\overline{r}_2 + \overline{y}_{12}\overline{y}_{12}' - 1)) = 2|\Delta_0|^{-2}f_1,\\
\widetilde{f_2} &= |u_1|^2 + |u_2|^2 = 2|\Delta_0|^{-2}f_2,\\
\widetilde{g_1} &= (\mathrm{Im}\,(s_1 + \sqrt{-1}) - 1)(\mathrm{Im}\,(s_2 + \sqrt{-1}) - 1) - \mathrm{Im}\,(z_{12})\mathrm{Im}\,(z_{12})'\\
&= |\Delta_0|^{-4}[\Delta_0(\sqrt{-1}\overline{r}_2 - 1) + \overline{\Delta_0}(-\sqrt{-1}r_2 - 1) - |\Delta_0|^2)\\
&\quad\cdot(\Delta_0(\sqrt{-1}\overline{r}_1 - 1) + \overline{\Delta_0}(-\sqrt{-1}r_1 - 1) - |\overline{\Delta_0}|^2)\\
&\quad+ (\overline{\Delta_0}y_{12} - \Delta_0\overline{y}_{12})(\overline{\Delta_0}y_{12}' - \Delta_0\overline{y}_{12}')]\\
&= |\Delta_0|^{-2}[|\Delta_0|^2 - 2y_{12}\overline{y}_{12}'\\
&\quad+ (r_1 - \sqrt{-1})(\overline{r}_2 + \sqrt{-1}) + (\overline{r}_1 + \sqrt{-1})(r_2 - \sqrt{-1})\\
&\quad+ (1 - \sqrt{-1}\overline{r}_1 - \sqrt{-1}\overline{r}_2)\Delta_0 + (1 + \sqrt{-1}r_1 + \sqrt{-1}r_2)\overline{\Delta_0}]\\
&= |\Delta_0|^{-2}[|r_1r_2 - y_{12}y_{12}'|^2 - |r_1|^2 - |r_2|^2 + 1] = |\Delta_0|^{-2}g_1,\\
\widetilde{g_2} &= |u_1|^2(\mathrm{Im}\,(s_2 + \sqrt{-1}) - 1) + |u_2|^2(\mathrm{Im}\,(s_1 + \sqrt{-1}) - 1)\\
&\quad- 2\sum_r(\mathrm{Im}\,(z_r))\mathrm{Re}\,(u_1Q_r\overline{u}_2')\\
&= -|u_1|^2 - |u_2|^2 - \sqrt{-2}|\Delta_0|^{-2}\\
&\quad(v_1\overline{(\Delta_0u_1)}' + v_2\overline{(\Delta_0u_2)}' - (\Delta_0u_1)\overline{v}_1' - (\Delta_0u_2)\overline{v}_2').
\end{aligned}$$

利用 $\sum\limits_r Q_r(\alpha'\beta + \beta'\alpha)Q_r' = 0, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}^4$, 由直接计算可证

$$\widetilde{g_2} = |\Delta_0|^{-2}g_2.$$

又

$$\begin{aligned}\widetilde{g_3} &= |u_1|^2|u_2|^2 - \sum_r (\mathrm{Re}\,(u_1 Q_r \overline{u}_2'))^2 \\ &= |u_1|^2|u_2|^2 - \frac{1}{4}\sum_r (u_1 Q_r \overline{u}_2')^2 \\ &\quad - \frac{1}{4}\sum_r (u_2 \overline{Q}_r' \overline{u}_1')^2 - \frac{1}{2}\sum_r u_1 Q_r \overline{u}_2 u_2 \overline{Q}_r' \overline{u}_1'.\end{aligned}$$

由于 $\sum\limits_r Q_r' \alpha' \alpha Q_r = 0, \forall\ \alpha \in \mathbb{C}^4$, 所以

$$\sum_r (u_1 Q_r \overline{u}_2')^2 = \sum_r (u_2 \overline{Q}_r \overline{u}_1')^2 = 0.$$

因此

$$\widetilde{g_3} = |u_1|^2|u_2|^2 - \frac{1}{2}\sum_r |u_1 Q_r \overline{u}_2'|^2.$$

再不断利用关于 $Q_1, \cdots, Q_6$ 的恒等关系式便得 $\widetilde{g_3} = |\Delta_0|^{-2} g_3$. 证完.

将第五类例外对称 Siegel 域 $R_V(16)$ 作截面 $u = 0$, 得到第四类典型域 $\mathfrak{R}_{IV}(8)$ 的 Siegel 域表达形式 $R_{IV}(8)$:

$$\{z \in \mathbb{C}^8 \mid \mathrm{Im}\,(s_1 + s_2) > 0, \mathrm{Im}\,(s_1)\mathrm{Im}\,(s_2) - \mathrm{Im}\,(z_{12})\mathrm{Im}\,(z_{12})' > 0\}.$$

第四类典型域的 Siegel 域表达形式 $R_{IV}(8)$ 作 Bergman 映射:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{-1} + 2\Delta(z + \sqrt{-1}v_0)^{-1}(s_2 + \sqrt{-1}), \\ r_2 &= \sqrt{-1} + 2\Delta(z + \sqrt{-1}v_0)^{-1}(s_1 + \sqrt{-1}), \\ y_{12} &= -2\Delta(z + \sqrt{-1}v_0)^{-1} z_{12}. \end{aligned}$$

得到齐性有界域 $\mathfrak{R}_{IV}(8)$ 的表达形式为

$$\begin{aligned}\{y \in \mathbb{C}^8 \mid 1 > |r_1 r_2 - y_{12} y_{12}'|^2 + \mathrm{Im}\,(r_1 + r_2)(\overline{r}_1 \overline{r}_2 - \overline{y}_{12} \overline{y}_{12}' + 1), \\ 1 > |r_1|^2 + |r_2|^2 + 2 y_{12} \overline{y}_{12}' - |r_1 r_2 - y_{12} y_{12}'|^2\ \}.\end{aligned}$$

显然作线性同构

$$x_{12}=y_{12},\ x_7=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(r_1+r_2),\ x_8=\frac{1}{2}(r_1-r_2).$$

记

$$x=(x_{12},x_7,x_8)=(x_1,\cdots,x_8)\in\mathbb{C}^8,$$

则它将域 $R_{IV}(8)$ 映为李球

$$\widetilde{R}_{IV}(8)=\{x\in\mathbb{C}^8\,|\,1+|xx'|^2>2x\overline{x}',1>|xx'|^2+2\mathrm{Re}\,(1-xx')\overline{x}_7\}.$$

为此，我们对第五类例外典型域 $\widetilde{\mathfrak{R}}_V(16)$ 再作线性同构，定义为

$$y=(r_1,y_{12},r_2)\to x=(x_{12},x_7,x_8),\ x_{12}=(x_1,\cdots,x_6),v\to v,$$

其中

$$x_{12}=y_{12},\ x_7=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(r_1+r_2),\ x_8=\frac{1}{2}(r_1-r_2),\ v=v.\quad(6.3.37)$$

映射的逆为

$$y_{12}=x_{12},\ r_1=\sqrt{-1}x_7+x_8,\ r_2=\sqrt{-1}x_7-x_8,\ v=v.\quad(6.3.38)$$

这时域 $\widetilde{\mathfrak{R}}_V(16)$ 映为齐性有界域 $\mathfrak{R}_V(16)$.

定理 6.3.7 Bergman 映射 $\sigma(6.2.29)$ 和线性同构 (6.3.37) 将域 $R_V(16)$ 映为域 $\mathfrak{R}_V(16)$, 定义为

$$\begin{cases}(x,u)\in\mathbb{C}^8\times\mathbb{C}^8\mid f_1(x,v)-f_2(x,v)>0,\\ g_1(x,v)-g_2(x,v)+g_3(x,v)>0\end{cases}\Bigg\},\quad(6.3.39)$$

其中

$$\begin{aligned}f_1(x,v)&=1-|xx'|^2-2\mathrm{Re}\,x_7(1-\overline{xx}'),\\ f_2(x,v)&=|\sqrt{-1}x_7+x_8-\sqrt{-1}|^2|v_2|\ +|\sqrt{-1}x_7-x_8-\sqrt{-1}|^2|v_1|^2\\ &\quad-2\mathrm{Re}\sum[(\sqrt{-1}-\sqrt{-1}\overline{x}_7+\overline{x}_8)x_r\\ &\quad+(\sqrt{-1}x_7-x_8-\sqrt{-1})\overline{x}_r]v_1Q_r\overline{v}_2'\\ &\quad+\sum_{r,s}x_r\overline{x}_s(v_1Q_r\overline{Q}_s'\overline{v}_1'+v_2\overline{Q}_r'Q_s\overline{v}_2'),\end{aligned}$$

(6.3.40)

$$g_1(x,v) = 1 - 2x\overline{x}' + |xx'|^2,$$

$$\begin{aligned} g_2(x,v) = & 2(1-|\sqrt{-1}x_7+x_8|^2)|v_2|^2 + 2(1-|\sqrt{-1}x_7-x_8|^2)|v_1|^2 \\ & - 4\mathrm{Re}\sum_r[(\sqrt{-1}\overline{x}_7-\overline{x}_8)x_r - (\sqrt{-1}x_7-x_8)\overline{x}_r]v_1Q_r\overline{v}_2' \\ & - 2\sum_{s,t}x_s\overline{x}_t(v_1Q_s\overline{Q}_t'\overline{v}_1' + v_2\overline{Q}_s'Q_t\overline{v}_2'), \end{aligned}$$

$$g_3(x,v) = 2\sum_r|v_1Q_r\overline{v}_2'|^2 - 4|v_1|^2|v_2|^2, \tag{6.3.41}$$

也称为 **第五类例外典型域**.

上面的计算给出了第五类例外典型域的正规 Siegel 域的表达形式, 记作 $R_V(16)$, 也给出了第五类例外典型域的有界域表达形式, 记作 $\mathfrak{R}_V(16)$. 而正规 Siegel 域的表达形式比有界域的表达形式简单, 并且单可递全纯自同构群 $T(R_V(16))$ 由仿射自同构组成, 但是单可递全纯自同构群 $T(\mathfrak{R}_V(16))$ 由有理分式变换构成. 另一方面, 对迷向子群 $\mathrm{Iso}\,(R_V(16))$ 及 $\mathrm{Iso}\,(\mathfrak{R}_V(16))$ 而言, $\mathrm{Iso}\,(R_V(16))$ 由有理分式变换构成, 而 $\mathrm{Iso}\,(\mathfrak{R}_V(16))$ 却由线性自同构构成. 且由此可知, 原点迷向子群 $\mathrm{Iso}\,(\mathfrak{R}_V(16))$ 有一维中心, 使得第五类例外典型域 $\mathfrak{R}_V(16)$ 为关于原点的有界圆型域.

由定理 6.3.3 可知, 迷向子群 $\mathrm{Iso}\,(R_V(16))$ 的李代数

$$\mathrm{iso}\,(R_V(16)) = L_{02} + L_{03}' + L_1' + L_2',$$

其中 L_{02} 有基 $A_0, P_{st}, 1 \le s < t \le 6, L_{03}'$ 有基 $X_t - Y_t, 1 \le t \le 6, L_1'$ 有基 $Y_i^{(t)} - \widetilde{P}_i^{(t)}, \widetilde{Y}_i^{(t)} - P_i^{(t)}, 1 \le t \le 4, i = 1,2, L_2'$ 有基 $B_1 + \dfrac{\partial}{\partial s_1}, B_2 + \dfrac{\partial}{\partial s_2}, T_t + \dfrac{\partial}{\partial z_t}, 1 \le t \le 6.$

下面来求李群 $\mathrm{Iso}\,(\mathfrak{R}_V)$ 的李代数 $\mathrm{iso}\,(\mathfrak{R}_V(16))$ 的一组基. 今记 τ 为由式 (6.3.29) 及 (6.3.37) 给出的 Bergman 映射, 显然有

$$\begin{aligned} \mathrm{iso}\,(\mathfrak{R}_V(16)) &= \tau_*(\mathrm{iso}\,(R_V(16))) \\ &= \tau_*(L_{02}) + \tau(L_{03}') + \tau_*(L_1') + \tau_*(L_2'), \end{aligned} \tag{6.3.42}$$

且有

$$\dim(\mathrm{Aut}(R_V(16))) = 78, \quad \dim(\mathrm{Iso}(R_V(16))) = 46. \tag{6.3.43}$$

定理 6.3.8 符号同上. 记由式 (6.3.29) 及式 (6.3.37) 定义的 Bergman 映射为 τ, 则李代数 $\mathrm{iso}(\mathfrak{R}_V(16)) = \tau_*(\mathrm{iso}(R_V(16)))$ 有基如下:

(1) 子空间 $\tau_*(L_{02})$ 有基

$$A_0 = \sqrt{-1}v_1\frac{\partial'}{\partial v_1} + \sqrt{-1}v_2\frac{\partial'}{\partial v_2}, \tag{6.3.44}$$

$$L_{st} = 2(x_s\frac{\partial}{\partial x_t} - x_t\frac{\partial}{\partial x_s}) - v_1Q_sQ_t\frac{\partial'}{\partial v_1} + v_2Q_tQ_s\frac{\partial'}{\partial v_2}, \tag{6.3.45}$$

其中 $1 \le s < t \le 6$;

(2) 子空间 $\tau_*(L'_{03})$ 有基

$$L_{s8} = 2(x_s\frac{\partial}{\partial x_8} - x_8\frac{\partial}{\partial x_s}) - v_1Q_s\frac{\partial'}{\partial v_2} + v_2\overline{Q}'_s\frac{\partial'}{\partial v_1}, \tag{6.3.46}$$

其中 $1 \le s \le 6$;

(3) 子空间 $\tau_*(L'_2)$ 有基

$$A_1 = 2\sqrt{-1}x\frac{\partial'}{\partial x} + \sqrt{-1}v\frac{\partial'}{\partial v}, \tag{6.3.47}$$

$$L_{78} = 2(x_7\frac{\partial}{\partial x_8} - x_8\frac{\partial}{\partial x_7}) - \sqrt{-1}v_1\frac{\partial'}{\partial v_1} + \sqrt{-1}v_2\frac{\partial'}{\partial v_2}, \tag{6.3.48}$$

$$L_{s7} = 2(x_s\frac{\partial}{\partial x_7} - x_7\frac{\partial}{\partial x_s}) + \sqrt{-1}v_1Q_s\frac{\partial'}{\partial v_2} + \sqrt{-1}v_2\overline{Q}'_s\frac{\partial'}{\partial v_1}, \tag{6.3.49}$$

其中 $1 \le s \le 6$;

(4) 子空间

$$\tau_*(L'_1) = \{Z_1(\alpha) + Z_2(\beta) \mid \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}^4\}, \tag{6.3.50}$$

其中

$$Z_1(\alpha)= \frac{1}{2}(v_1\overline{\alpha}')(-\frac{\partial}{\partial x_7}-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_8})+\sqrt{-1}v_2\overline{A}'\frac{\partial'}{\partial x_{12}}$$

$$+(x_7-\sqrt{-1}x_8)\alpha\frac{\partial'}{\partial v_1}+\sqrt{-1}x_{12}A\frac{\partial'}{\partial v_2}, \tag{6.3.51}$$

$$Z_2(\beta)= \frac{1}{2}(v_2\overline{\beta}')(-\frac{\partial}{\partial x_7}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_8})+\sqrt{-1}v_1B\frac{\partial'}{\partial x_{12}}$$

$$+(x_7+\sqrt{-1}x_8)\beta\frac{\partial'}{\partial v_2}+\sqrt{-1}x_{12}\overline{B}'\frac{\partial'}{\partial v_1}, \tag{6.3.52}$$

其中 A 及 B 由式 (6.3.13) 定义.

证 令 $\sigma(z,u)=(y,v)$ 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}r_1 =& -2\Delta(z+\sqrt{-1}v_0)^{-2}(\mathrm{d}\Delta(z+\sqrt{-1}v_0))(s_2+\sqrt{-1})\\
&+2\Delta(z+\sqrt{-1}v_0)^{-1}\mathrm{d}s_2,\\
\mathrm{d}r_2 =& -2\Delta(z+\sqrt{-1}v_0)^{-2}(\mathrm{d}\Delta(z+\sqrt{-1}v_0))(s_1+\sqrt{-1})\\
&+2\Delta(z+\sqrt{-1}v_0)^{-1}\mathrm{d}s_1,\\
\mathrm{d}y_{12} =& 2\Delta(z+\sqrt{-1}v_0)^{-2}(\mathrm{d}\Delta(z+\sqrt{-1}v_0))z_{12}\\
&-2\Delta(z+\sqrt{-1}v_0)^{-1}\mathrm{d}z_{12},\\
\mathrm{d}v_1 =& -\sqrt{2}\Delta(z+\sqrt{-1}v_0)^{-2}(\mathrm{d}\Delta(z+\sqrt{-1}v_0))\\
&((s_2+\sqrt{-1})u_1-\sum_t z_tu_2\overline{Q}_t'+\sqrt{2}\Delta(z+\sqrt{-1}v_0)^{-1}(\mathrm{d}s_2)u_1\\
&+(s_2+\sqrt{-1})\mathrm{d}u_1-\sum_t(\mathrm{d}z_t)u_2\overline{Q}_t'-\sum_t z_t(\mathrm{d}u_2)\overline{Q}_t'),\\
\mathrm{d}v_2 =& -\sqrt{2}\Delta(z+\sqrt{-1}v_0)^{-2}(\mathrm{d}\Delta(z+\sqrt{-1}v_0))\\
&((s_1+\sqrt{-1})u_2-\sum_t z_tu_1Q_t'+\sqrt{2}\Delta(z+\sqrt{-1}v_0)^{-1}(\mathrm{d}s_1)u_2\\
&+(s_1+\sqrt{-1})\mathrm{d}u_2-\sum_t(\mathrm{d}z_t)u_1Q_t-\sum_t z_t(\mathrm{d}u_1)Q_t).
\end{aligned}$$

任取 $\xi(z,u)\frac{\partial'}{\partial z}+\eta(z,u)\frac{\partial'}{\partial u}\in\mathrm{aut}\,(R_V(16))$, 则

$$\sigma_*(\xi(z,u)\frac{\partial'}{\partial z}+\eta(z,u)\frac{\partial'}{\partial u})=\widetilde{\xi}(y,v)\frac{\partial'}{\partial y}+\widetilde{\eta}(y,v)\frac{\partial'}{\partial v},$$

其中

$$\begin{aligned}
&\xi(z,u)=(\xi_{11}(z,u),\xi_{12}(z,u),\xi_{22}(z,u)),\\
&\eta(z,u)=(\eta_1(z,u),\eta_2(z,u)),\\
&\widetilde{\xi}(y,v)=(\widetilde{\xi}_{11}(y,v),\widetilde{\xi}_{12}(y,v),\widetilde{\xi}_{22}(y,v)),\\
&\widetilde{\eta}(y,v)=(\widetilde{\eta}_1(y,v),\widetilde{\eta}_2(y,v)).
\end{aligned}$$

易 dr_i 为 $\widetilde{\xi}_{ii}(y,v), i=1,2$. 易 dy_{12} 为 $\widetilde{\xi}_{12}(z,u)$. 易 dv_i 为 $\widetilde{\eta}_i(z,u), i=1,2$. 易 ds_i 为 $\xi_{ii}(z,u)$, $i=1,2$. 易 dz_{12} 为 $\xi_{12}(z,u)$. 易 du_i 为 $\eta_i(z,u)$, $i=1,2$.

直接将定理 6.3.3 给出的迷向子群的李代数 iso(R_V) 的基用上面的办法代入计算，再作线性同构

$$x_{12}=y_{12}, x_7=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(r_1+r_2), x_8=\frac{1}{2}(r_1-r_2), v=v,$$

便证明了定理．证完．

利用定理 6.3.8, 我们来给出紧李群 Iso$(\mathfrak{R}_V)$ 的单位连通分支如下：

(1)　由基 A_0, A_1 生成的子空间为李代数 iso$(\mathfrak{R}_V)$ 的交换子代数，而 $\exp(\theta A_1+\varphi A_0)$ 为

$$x\to xe^{2\sqrt{-1}\theta},\ v\to ve^{\sqrt{-1}(\theta+\varphi)},\ \forall\,\theta,\varphi\in\mathbb{R}. \tag{6.3.53}$$

由此可知域 $\mathfrak{R}_V$ 为圆型域，所以是对称有界域．由式 (6.3.53) 构成的连通交换李群记作 G_0.

(2)　由基 $L_{st}, 1\le s<t\le 8$ 生成的子空间为李代数 iso$(\mathfrak{R}_V)$ 的紧子代数，它同构于 so(8), 其中元素可表示为

$$xK_0\frac{\partial'}{\partial x}+vK_1\frac{\partial'}{\partial v}, \tag{6.3.54}$$

这里 K_0 取任一 8 阶实斜对称方阵，而 K_1 为 8 阶斜 Hermite 方阵，它有

$$K_1=\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12}\\ -\overline{K_{12}}' & K_{22}\end{pmatrix}, \tag{6.3.55}$$

其中

$$K_{11} = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}(e_7K_0e_8')I - \frac{1}{2}\sum_{s<t}(e_sK_0e_t')Q_sQ_t,$$

$$K_{12} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{6}(-(e_sK_0e_8') + \sqrt{-1}(e_sK_0e_7'))Q_s,$$

$$K_{22} = \frac{1}{2}\sqrt{-1}(e_7K_0e_8') + \frac{1}{2}\sum_{s<t}(e_sK_0e_t')Q_tQ_s.$$

又 $\exp(xK_0\frac{\partial'}{\partial x} + vK_1\frac{\partial'}{\partial v})$ 为

$$x \to x\exp K_0, \quad v \to v\exp K_1, \tag{6.3.56}$$

其中 $\exp K_0$ 遍历 SO (8) 中元素. 由式 (6.3.56) 构成的连通李群记作 G_1.

(3) 子空间 $\tau_*(L_1')$ 有生成元集 $\exp Z_1(\alpha)$ 及 $\exp Z_2(\beta)$, 其中 $Z_1(\alpha), Z_2(\beta)$ 由式 (6.3.51) 及式 (6.3.52) 定义, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}^4$.

利用式 (6.3.54) 及式 (6.3.55) 我们分别计算如下:

(1) 记

$$K = \begin{pmatrix} 0 & K_{12} \\ K_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1}A \\ \alpha & 0 \\ -\sqrt{-1}\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\overline{\alpha}' & -\frac{\sqrt{-1}}{2}\overline{\alpha}' \\ \sqrt{-1}\overline{A}' & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是

$$(K_{12}K_{21})^k = (-1)^k \begin{pmatrix} (2|\alpha|^2)^{k-1}A\overline{A}' & 0 \\ 0 & \frac{|\alpha|^{2k}}{2}(I - \sqrt{-1}J_1) \end{pmatrix},$$

$$(K_{21}K_{12})^k = (-1)^k \begin{pmatrix} |\alpha|^{2k-2}\overline{\alpha}'\alpha & 0 \\ 0 & (2|\alpha|^2)^{k-1}\overline{A}'A \end{pmatrix},$$

$$K_{12}(K_{21}K_{12})^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1}(2|\alpha|^2)^k A \\ |\alpha|^{2k}\alpha & 0 \\ -\sqrt{-1}|\alpha|^{2k}\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$(K_{21}K_{12})^k K_{21}$$

$$= (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}|\alpha|^{2k}\overline{\alpha}' & -\frac{\sqrt{-1}}{2}|\alpha|^{2k}\overline{\alpha}' \\ \sqrt{-1}(2|\alpha|^2)^k\overline{A}' & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

而

$$\exp Z_1(\alpha) = (x, v)\exp K$$

$$= (x, v)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2K)!}\begin{pmatrix} (K_{12}K_{21})^k & 0 \\ 0 & (K_{21}K_{12})^k \end{pmatrix}$$

$$+(x, v)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\begin{pmatrix} 0 & K_{12}(K_{21}K_{12})^k \\ (K_{21}K_{12})^k K_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $\exp Z_1(\alpha)$ 为

$$\begin{aligned}
x_{12} \to\ & x_{12} + (2|\alpha|^2)^{-1}(\cos\sqrt{2}|\alpha| - 1)x_{12}A\overline{A}' \\
& + \sqrt{-1}(\sqrt{2}|\alpha|)^{-1}(\sin\sqrt{2}|\alpha|)v_2\overline{A}', \\
x_7 \to\ & \frac{1}{2}(x_7 - \sqrt{-1}x_8)(\cos|\alpha| - 1) + x_7 - \frac{1}{2}|\alpha|^{-1}(\sin|\alpha|)v_1\overline{\alpha}', \\
x_8 \to\ & \frac{1}{2}(\sqrt{-1}x_7 + x_8)(\cos|\alpha| - 1) + x_8 - \frac{\sqrt{-1}}{2}|\alpha|^{-1}(\sin|\alpha|)v_1\overline{\alpha}', \\
v_1 \to\ & |\alpha|^{-2}(\cos|\alpha| - 1)v_1\overline{\alpha}'\alpha + v_1 + |\alpha|^{-1}(\sin|\alpha|)(x_7 - \sqrt{-1}x_8)\alpha, \\
v_2 \to\ & (2|\alpha|^2)^{-1}(\cos\sqrt{2}|\alpha| - 1)v_2\overline{A}'A + v_2 + \sqrt{-1}(\sqrt{2}|\alpha|)^{-1}x_{12}A.
\end{aligned} \tag{6.3.57}$$

(2) 记

$$K = \begin{pmatrix} 0 & K_{12} \\ K_{21} & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_{12} = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}B' & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & \sqrt{-1}\beta \end{pmatrix},$$

$$K_{21} = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}B & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\overline{\beta}' & \frac{\sqrt{-1}}{2}\overline{\beta}' \end{pmatrix},$$

于是

$$(K_{12}K_{21})^k = (-1)^k \begin{pmatrix} (2|\beta|^2)^{k-1}\overline{B}'B & 0 \\ 0 & \frac{|\beta|^{2k}}{2}(I+\sqrt{-1}J_1) \end{pmatrix},$$

$$(K_{21}K_{12})^k = (-1)^k \begin{pmatrix} (2|\beta|^{k-1}B\overline{B}' & 0 \\ 0 & |\beta|^{2k-2}\overline{\beta}'\beta \end{pmatrix},$$

$$K_{12}(K_{21}K_{12})^k = (-1)^k \begin{pmatrix} \sqrt{-1}(2|\beta|^2)^k\overline{B}' & 0 \\ 0 & |\beta|^{2k}\beta \\ 0 & \sqrt{-1}|\beta|^{2k}\beta \end{pmatrix},$$

$$(K_{21}K_{12})^k K_{21}$$

$$= (-1)^k \begin{pmatrix} \sqrt{-1}(2|\beta|^2)^k B & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}|\beta|^{2k}\overline{\beta}' & \frac{\sqrt{-1}}{2}|\beta|^{2k}\overline{\beta}' \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned} x_{12} \to\ & x_{12} + (2|\beta|^2)^{-1}(\cos\sqrt{2}|\beta|-1)x_{12}\overline{B}'B \\ & + \sqrt{-1}(\sqrt{2}|\beta|)^{-1}(\sin\sqrt{2}|\beta|)v_1 B, \\ x_7 \to\ & x_7 + \frac{1}{2}(x_7+\sqrt{-1}x_8)(\cos|\beta|-1) - \frac{1}{2}|\beta|^{-1}(\sin|\beta|)v_2\overline{\beta}', \\ x_8 \to\ & x_8 - \frac{1}{2}(\sqrt{-1}x_7 - x_8)(\cos|\beta|-1) + \frac{\sqrt{-1}}{2}|\beta|^{-1}(\sin|\beta|)v_2\overline{\beta}', \\ v_1 \to\ & (2|\beta|^2)^{-1}(\cos\sqrt{2}|\beta|-1)v_1 B\overline{B}' + v_1 \\ & + \sqrt{-1}(\sqrt{2}|\beta|)^{-1}(\sin\sqrt{2}|\beta|)x_{12}\overline{B}', \\ v_2 \to\ & |\beta|^{-2}(\cos|\beta|-1)v_2\overline{\beta}'\beta + v_2 + |\beta|^{-1}(\sin|\beta|)(x_7+\sqrt{-1}x_8)\beta. \end{aligned}$$

最后，我们有

定理 6.3.9 第五类例外对称 Siegel 域 R_V 和第五类例外典型域 $\Re_V$ 的全纯自同构群都是连通李群.

这个定理的证明方法和定理 6.2.12 的证明方法完全相同．见参考文献 [37].

定理 6.3.10 第五类例外典型域 $\mathfrak{R}_V(16)$ 是关于原点的圆型域，所以是对称有界域．对称变换为 $y \to -y$.

证 令

$$\sigma^*(B_1' + B_2') = 2\sqrt{-1}y\frac{\partial'}{\partial y} + 2\sqrt{-1}u\frac{\partial'}{\partial u},$$

而

$$\exp\left(\sqrt{-1}\theta y\frac{\partial'}{\partial y} + \sqrt{-1}u\frac{\partial'}{\partial u}\right)$$

为 $y \to ye^{\sqrt{-1}\theta}, \forall\, \theta \in \mathbb{R}$, 所以证明了定理．证完.

由式 (6.3.53), 用 Bergman 映射的逆，我们有

定理 6.3.11 第五类例外对称 Siegel 域 R_V 的点 $(\sqrt{-1}v_0, 0)$ 的对称变换为

$$\begin{aligned}
&s_1 \to -s_2\Delta_0^{-1}, \quad s_2 \to -s_1\Delta_0^{-1}, \quad z_{12} \to \Delta_0^{-1}z_{12},\\
&u_1 \to -\sqrt{-1}(s_2u_1 - \sum z_ju_2\overline{Q}_j')\Delta_0^{-1},\\
&u_2 \to -\sqrt{-1}(s_1u_2 - \sum z_ju_1Q_j)\Delta_0^{-1},
\end{aligned}$$

其中 $\Delta_0 = s_1s_2 - z_{12}z_{12}'$.

参 考 文 献

[1] Cartan, É.. Sur les domaines bornes homogenes de L'espace de n variables complexes, Abh. Math. Sem. Hamburg, 11 (1935), 116—162

[2] Cartan, H.. Sur les groupes de transformations analytiques, Act. Sci. Ind., Hermann, Paris, 1935

[3] Chevally, C.. Theory of Lie Groups, Vol. I. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1946

[4] Chevally, C.. Théorie des groupes de Lie, *II*, *III*, Hermann, Paris, 1951

[5] Harish-Chandra. Representations of semi-simple Lie groups, IV, V, VI, Amer. J. Math. , 77 (1955), 743—777, 78 (1956), 1—41, 564—628

[6] Helgason, S.. Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Acad. Press, New York-San Francisco-London, 1978

[7] Hua, L. K.. Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains, Tran. Math. Mono. , Vol. 6, Amer. Math. Soc. Providence, 1963

[8] Humphreys, J.E.. Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, Berlin, 1972

[9] Jacobson, N.. Lie algebras, Wiley NewYork 1972

[10] Koranyi, A.. The Poisson integral for generalized half planes and bounded symmetric domains, Ann. Math. , 82 (1965), 332—350

[11] Koranyi, A.. Analytic invariants of bounded symmetric domains, Proc. Amer. Math. Soc. , 19 (1968), 279—284

[12] Koranyi, A.. Poisson integrals and boundany components of symmetric spaces, Inv. Math., 34 (1976), 185—209

[13] Koranyi, A. & Wolf, J. A.. Realization of Hermatian symmetric spaces as generalized half-planes, Ann. Math. , 81 (1965), 265—288

[14] Look , K.H. & Xu, Yichao (Hsu I-Chau), A note on transitive domains, Acta Math. Sinica, 11 (1961), 11-23. Translated as Chinese Math. , 2 (1963), 11—26 (Chinese)

[15] Piatetski-Shipiro, I. I.. On a problem proposed by É. Cartan, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 124 (1959), 272—273

[16] Piatetski-Shipiro, I. I..Geometry of Classical Domains and Theory of Automorphic Functions, Fizmatgiz, Moscow, 1961, (English transl.) Gordon and Breach, New York, 1969

[17] Pontrjagin, L.. Continuous groups, Moscow, 1954

[18] Serre, J.P.. Lie algebras and Lie groups, Benjamin, New York, 1965

[19] Vinberg, E. B., Gindikin, S. G. & Piatetski-Shapiro, I. I.. Classification and canonical realization of complex bounded homogeneous domains, Trudy Moskov. Mat. Obsc., 12 (1963), 359—388, Transl. Moscow Math. Soc., 12 (1963), 404—437

[20] Wolf, J. A. & Koranyi, A.. Generalized Cayley transformations of bounded symjetric domains, Amer. J. Math, 87 (1965), 899—939

[21] Xu Yichao. On the classification of symmetric schlicht domains in several complex variables, Shuxue Jinzhan, China, 8 (1965), 109—144

[22] Xu Yichao. On the automorphism group of the homgeneous bounded domains, Acta Math. Sinica, 19 (1976), 169—191
[23] Xu Yichao. On the isomorphism of homogeneous bounded domains, Acta Math. Sinica, 20 (1977), 248—266
[24] Xu Yichao. The Siegel domains of first kind associated with the cones of the square type, Acta Math. Sinica, 21 (1978), 1—17
[25] Xu Yichao. Classification of square type domains, Scientia Sinica, 22 (1979), 375—392
[26] Xu Yichao. On the Bergman kernel function of homogeneous bounded domains, Scientia Sinica, Special Issue, II (1979), 80—90
[27] Xu Yichao. A note on the homogeneous Siegel domains, Acta Math. Sinica, 24 (1981), 99—105
[28] Xu Yichao. Tube domains over cones with dual square type, Scientia Sinica, 24 (1981), 1475—1488
[29] Xu Yichao. On the invariant differential operators of order two over N-Siegal domains, Acta Math. Sinica, 25 (1982), 340—353
[30] Xu Yichao. Some results on the classification of homogeneous bounded domains, Proceedings of the 1980 Beijing symposium on differential geometry and differentisl equations, Vol. 3 (1982), 1621—1737. Gordan and Breach Science Publishers Inc.
[31] Xu Yichao. The canonical realizational of homogeneous bounded domains, Scientia Sinica, 26 (1983), 25—34
[32] Xu Yichao. Classification of a class of homogeneous Kaehlerian manifolds, Scientia Sinica (series A), 29 (1986), 449—463
[33] Xu Yichao. On the classification of the homogenous bounded domains, Advances in Science of China Mathematics, Vol. 2 (1988), 105—137. Science press, Beijing , China and John Wiley & Sons, New York
[34] Xu Yichao. Exceptional Symmetric Classical Domains I, Progress in Natural Science, 9 (1999), 330—339
[35] Xu Yichao. Exceptional Symmetric Classical Domains R_V, Scientia in China (series A), 43 (2000), 347—356
[36] Xu Yichao. Exceptional Symmetric Classical Domains R_{VI}, Scientia in China (series A), 43 (2000), 1035—1045
[37] Xu, Yichao & Wu Lanfang. The holomorphic sectional curvatures of the homogeneous bounded domains, Kexue Tongbao, China, 28 (1983), 592—596
[38] Xu, Yichao & Wang D.. On the holomorphic automorphism group of the bounded domain with positive (m,p) circle type, Acta Math. Sinica, 13 (1963), 419—432 (Chinese)
[39] Xu, Yichao & Wang D.. On the classification of the bounded domains with semi-circle type in $\mathbb{C}^2$, Acta Math. Sinica, 23 (1980), 372—384 (Chinese)
[40] 万哲先. 李代数, 科学出版社, 1965
[41] 许以超. 线性代数与矩阵论, 高等教育出版社, 1992
[42] 许以超. 代数学引论, 上海科技出版社, 1965
[43] 许以超. $\mathbb{C}^n$ 中的齐性有界域理论, 科学出版社, 2000
[44] 严志达, 许以超. Lie 群及其 Lie 代数, 高等教育出版社, 1985

名词索引

六画

七画

八画

九画

十画

十一画

十二画

十三画

十四画以上

A—W